PRISMA 1 (2018)
PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/

Sifat-Sifat Ideal Utama dan Ideal Maksimal dalam Near-Ring

Zulfia Memi Mayasari

Fakultas MIPA, Universitas Bengkulu, Bengkulu
Email: zulfiamemimaysari@yahoo.com

Abstrak

Suatu himpunan tak kosong N yang dilengkapi dengan dua operasi biner '+' dan '•' biasa dinotasikan dengan (N,+,•) dikatakan near-ring jika memenuhi: (i).(N,+) grup, (ii). (N,•) semigrup, (iii). (N,+,•) distributif kanan. Jika I suatu ideal dalam near-ring N dibangun oleh satu elemen maka I disebut ideal utama. Jika J suatu ideal dalam near-ring N sehingga J ≠ N dan tidak ada ideal lain dalan N yang memuat J maka J disebut ideal maksimal. Dalam tulisan ini dibahas beberapa sifat ideal utama dan ideal maksimal dalam near-ring berdasarkan sifat ideal utama dan ideal maksimal yang terdapat dalam ring. Hasil penelitian menunjukkan bahwa beberapa sifat ideal utama dan ideal maksimal dalam ring juga berlaku dalam near-ring.

Kata Kunci: near-ring, ring, ideal, ideal utama, ideal maksimal.

PENDAHULUAN

Near-ring merupakan salah satu perluasan dari ring dimana beberapa aksioma yang terdapat pada ring dapat dilepas. Suatu himpunan $N \neq \phi$ yang dilengkapi dengan dua operasi biner '+' dan '•' yang masing-masing disebut operasi pertama dan kedua dikatakan near-ring jika memenuhi:(i). $(N,+)$ grup (ii) $(N,\bullet)$ semigrup dan (iii). Terhadap operasi '+' dan '•' berlaku sifat distributif kanan dan dinotasikan dengan $(N,+,\bullet)$. Selanjutnya dalam penulisan $(N,+,\bullet)$ near-ring dituliskan sebagai N near-ring. Seperti halnya dalam ring, dalam near-ring juga terdapat istilah ideal. Misalkan N near-ring. $I \neq \phi \subseteq N$ dikatakan ideal N jika memenuhi: (i). $(I,+)$ subgrup normal $(N,+)$ (ii). $NI \subseteq I$ dan (iii). $(n+i)m - nm \in I, (\forall i \in I, m, n \in N)$. Suatu ideal I dalam near-ring N yang dibangun oleh satu elemen N disebut ideal utama. Jika J suatu ideal dalam near-ring N sehingga $J \neq N$ dan tidak ada ideal lain dalam N yang memuat J maka J disebut ideal maksimal.

Penelitian mengenai ideal pada near-ring terus dikembangkan. Pengembangan dilakukan baik pada strukturnya maupun dengan cara memadukannya dengan teori lain. Beberapa penelitian tentang ideal pada near-ring diantaranya dilakukan oleh: Brenner (1974) yang meneliti ideal maksimal dalam polynomial near-ring, Kim & Kim (1996) yang meneliti ideal fuzzy dalam near-ring, Abdurrahman *et al*. (2013) yang meneliti ideal prima fuzzy pada near-ring, Sahputri (2016) yang meneliti sifat-sifat ideal dan homomorphisma ring pada yang berlaku pada near-ring, dan Mariana (2017) yang meneliti sifat-sifat ideal pada near-ring.

Permasalahan yang dibahas dalam tulisan ini mengenai sifat-sifat ideal tertentu dalam near-ring yaitu ideal utama dan ideal maksimal. Pembahasan didasarkan pada sifat-sifat ideal utama dan ideal maksimal yang dimiliki dalam ring. Tujuannya dari tulisan ini adalah untuk menyelidiki apakah sifat-sifat ideal utama dan ideal maksimal yang berlaku pada ring juga berlaku pada near-ring.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini diberikan definisi-definisi dan teorema-teorema yang mendukung hasil dan pembahasan serta pembahasan mengenai sifat-sifat ideal utama dan ideal maksimal pada near-ring.

Definisi 1 (Adkinds & Weintraub (1992), Fraleigh (1999))

Diberikan himpunan $R \neq \phi$. Pada R diberikan dua operasi yaitu $'+'$ dan $'\bullet'$ dan yang masing-masing disebut sebagai operasi pertama dan operasi kedua. R terhadap dua operasi ini dikatakan ring jika memenuhi:

I. $(R,+)$ grup abelian

II. $(R,\bullet)$ Semigrup

III. $(R,+,\bullet)$ distributif

i. Distributif kanan yaitu $(\forall a,b,c \in R)(a+b)\bullet c = (a \bullet c)+(b \bullet c)$

ii. Distributif kiri yaitu $(\forall a,b,c \in R)c \bullet (a+b) = (c \bullet a)+(c \bullet b)$

Himpunan R yang membentuk ring terhadap dua operasi $'+'$ dan $'\bullet'$ dinotasikan sebagai $(R,+,\bullet)$. Selanjutnya penulisan $(R,+,\bullet)$ ring dituliskan sebagai R ring.

Definisi 2. (Adkinds & Weintraub (1992), Fraleigh (1999))

Misalkan R ring. $I \neq \phi \subseteq R$ dikatakan ideal pada R jika memenuhi:

i. $a-b \in I(\forall a,b \in I)$

ii. $ar, ra \in I(\forall a \in I, r \in R)$

Teorema 3. (Subiono (2016))

Misalkan I adalah suatu ideal dalam ring R maka R/I adalah suatu ring terhadap operasi yang didefinisikan oleh:

(1) $(a+I)+(b+I) = (a+b)+I$

(2) $(a+I)\bullet(b+I) = (a \bullet b)+I \quad (\forall (a+I),(b+I) \in R/I$

Definisi 4. (Subiono (2016))

Misalkan I adalah suatu ideal dalam ring R. R/I terhadap operasi yang diberikan pada Teorema 3 dinamakan ring kuasi dari R oleh I.

Teorema 5. (Subiono (2016))

Misalkan I adalah suatu ideal dalam ring komutatif R dengan elemen satuan 1_R maka R/I adalah suatu ring komutatif dengan elemen satuan $1_R + I$

Definisi 6. (Subiono (2016))

Dalam suatu ring R dengan elemen satuan 1, suatu elemen $a \in R$ dinamakan unit bila a mempunyai invers terhadap perkalian.

Definisi 7. (Raisinghania & Aggarwal (1980))

Suatu ideal I dalam ring R yang dibangun oleh satu elemen R disebut ideal utama.

Definisi 8. (Adkinds & Weintraub (1992))

Suatu ideal J dalam ring R disebut ideal maksimal jika $J \neq R$ sehingga jika M ideal dengan $J \subseteq M \subseteq R$ maka $J = M$ atau $M = R$

Teorema 9. (Raisinghania & Aggarwal (1980))

Jika a elemen dalam suatu ring komutatif R dengan elemen satuan maka $Ra = \{ra \mid r \in R)$ adalah ideal utama R yang dibangun oleh a.

Teorema 10. (Subiono (2016))

Misalkan R ring komutatif dengan elemen satuan. R field jika dan hanya jika ideal R hanyalah $\{0\}$ dan R sendiri

Teorema 11. (Fraleigh (1999))

Suatu ideal J dalam ring komutatif R dengan elemen satuan maksimal jika dan hanya jika R/J adalah field.

Definisi 12. (Abdurrahman *et al*. (2013), Kandasamy (2002))

Near-ring adalah suatu himpunan tak kosong N dengan dua operasi biner yaitu '$+$' dan '$\bullet$' yang memenuhi:

I. $(N,+)$ grup

II. $(N,\bullet)$ Semigrup

III. $(\forall a,b,c \in N)(a+b)\bullet c = (a\bullet c)+(b\bullet c)$ yaitu berlaku sifat distributif kanan

Definisi 13. (Kandasamy (2002))

Diberikan near-ring N . N dikatakan near-field jika $(N-\{0\},\bullet)$ grup.

Definisi 14. (Kandasamy (2002))

Misalkan N suatu near-ring

i. Jika $(N,+)$ abelian maka N dikatakan near-ring abelian

ii. Jika $(N,\bullet)$ komutatif maka N dikatakan near-ring komutatif

Definisi 15. (Brenner (1974), Kim & Kim (1996), Mariana (2017), Pilz (1983))

Misalkan N near-ring. $I \neq \phi \subseteq N$ dikatakan ideal N jika memenuhi:

i. $(I,+)$ subgrup normal $(N,+)$

ii. $NI \subseteq I$

iii. $(n+i)m - nm \in I, (\forall i \in I, m,n \in N)$

Sifat 16. (Sahputri (2016))

Jika I_1, I_2 ideal-ideal pada near-ring N maka $I_1 + I_2$ ideal pada near-ring N

Berdasarkan Definisi 7 dan Definisi 8 dapat diberikan definisi berikut:

Definisi 17.

Suatu ideal I dalam near-ring N yang dibangun oleh satu elemen N disebut ideal utama.

Definisi 18.

Suatu ideal J dalam near-ring N disebut ideal maksimal jika $J \neq N$ sehingga jika M ideal dengan $J \subseteq M \subseteq N$ maka $J = M$ atau $M = N$

Selanjutnya ditunjukkan bahwa Teorema 9, Teorema 10, dan Teorema 11 juga berlaku pada near-ring.

Sifat 19.

Jika a elemen dalam suatu near-ring komutatif N dengan elemen satuan maka $Na = \{na \mid n \in N\}$ adalah ideal utama N yang dibangun oleh a .

Bukti:

Untuk membuktikan $Na = \{na \mid n \in N\}$ adalah ideal utama N yang dibangun oleh a akan ditunjukkan bahwa:

1. $Na = \{na \mid n \in N\}$ ideal N yaitu:
   i. $(Na,+)$ subgrup normal $(N,+)$
   ii. $NNa \subseteq Na$
   iii. $(n+i)m - nm \in Na, (\forall i \in Na, m,n \in N)$
2. Na ideal terkecil N yang memuat a

   Akan ditunjukkan :

1. $Na = \{na \mid n \in N\}$ ideal N

 i. $(Na,+)$ subgrup normal $(N,+)$ artinya $(\forall x, y \in Na)(\forall n \in N)$ berlaku

 a. $x - y \in Na$

 b. $nxn^{-1} \in Na$

 Ambil sembarang $x, y \in Na$ dan $n \in N$

 a. $x \in Na$ artinya $x = n_1 a$ dengan $n_1 \in N$

 $y \in Na$ artinya $y = n_2 a$ dengan $n_2 \in N$

 $x - y = n_1 a - n_2 a = (n_1 - n_2)a$. Karena $n_1, n_2 \in N$ dan N near-ring maka $n_1 - n_2 \in N$.

 Jadi $x - y \in Na$

 b. $nxn^{-1} = nn_1 an^{-1}$

 $= n_1 nan^{-1}$ (Karena N komutatif)

 $= n_1 ann^{-1} = n_1 a \in Na$

 Jadi $nxn^{-1} \in Na$

 ii. $NNa \subseteq Na$

 Ambil sembarang $x \in NNa$, misalkan $x = nn_1 a$ dengan $n,\ n_1 \in N$

 Karena $n,\ n_1 \in N$ dan N near-ring maka $nn_1 \in N$. Artinya $nn_1 a \in Na$

 Jadi $NNa \subseteq Na$

 iii. $(n+i)m - nm \in Na, (\forall i \in Na, m, n \in N)$

 Ambil sembarang $i \in Na$ dan $n, m \in N$, misalkan $i = n_1 a$ dengan $n_1 \in N$

 Diperoleh $(n + n_1 a)m - nm = n_1 am = (n_1 m)a = n_2 a \in Na$

 Jadi $(n+i)m - nm \in Na, (\forall i \in Na, m, n \in N)$

2. Selanjutnya ditunjukkan Na ideal terkecil N yang memuat a. Karena N near-ring dengan elemen satuan 1 yaitu $1 \in N \Rightarrow 1.a \in Na \Rightarrow a \in Na$
 Artinya untuk menunjukkan Na ideal utama yang dibangun oleh a harus ditunjukkan bahwa Na ideal terkecil N yang memuat a yaitu setiap ideal N yang memuat a juga memuat Na. Misalkan K ideal N yang memuat a dan $na \in Na$, $n \in N$. Karena K ideal N yang memuat a maka $a \in K$ sehingga $na \in K$. Jadi $na \in Na \Rightarrow Na \in K$ yang artinya $Na \subseteq K$
 Jadi Na termuat dalam setiap ideal N yang memuat a atau Na ideal terkecil N yang memuat a. Dengan kata lain Na ideal utama N yang dibangun oleh a.
 Dari (1) dan (2) terbukti bahwa $Na = \{na \mid n \in N\}$ adalah ideal utama N yang dibangun oleh a. ■

Sifat 20.

Misalkan N near-ring komutatif dengan elemen satuan. N near-field jika dan hanya jika ideal N hanyalah $\{0_N\}$ dan N sendiri

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Bila N suatu near-field dan $I \neq \{0_N\}$ adalah suatu ideal N maka ada suatu $a \in I$ dan $a \neq 0_N$. Karena N suatu near-field maka setiap elemen tak nol adalah unit. Karena I ideal N maka $1 = aa^{-1} \in I$. Karena itu $n = n.1 = n.aa^{-1} \in I, n \in N$ akibatnya $I = N$.

$(\Leftarrow)$ Misalkan N adalah near-ring komutatif dengan elemen satuan. Untuk menunjukkan bahwa N suatu near-field cukup dengan menunjukkan bahwa semua elemen tak nol di N adalah unit. Misalkan $0_N \neq a \in N$ dan $I = \langle a \rangle$ adalah ideal utama yang dibangun oleh a. Jelas $I \neq \{0_N\}$ sebab $0_N \neq a \in I$. Bila ideal dari N hanyalah $\{0_N\}$ dan N sendiri maka $I = N$. Karena N adalah near-ring dengan elemen satuan maka $1 \in I = \langle a \rangle$. Pilih $n = a^{-1} \in N$ yang memenuhi $1 = na = a^{-1}a$, artinya a adalah elemen unit. Jadi setiap elemen tak nol di N adalah unit.

Terbukti bahwa misalkan N near-ring komutatif dengan elemen satuan. N near-field jika dan hanya jika ideal N hanyalah $\{0_N\}$ dan N sendiri. ■

Sifat 21.

Suatu ideal J dalam near-ring komutatif N dengan elemen satuan maksimal jika dan hanya jika N/J adalah near-field.

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Jelas N/J near-ring komutatif dengan elemen satuan sebab N near-ring komutatif dengan elemen satuan, $J+0$ merupakan elemen nol N/J dan $J+1$ elemen satuan N/J.

Misalkan J ideal maksimal dalam N.

Akan ditunjukkan N/J near-field, yaitu cukup dengan menunjukkan setiap elemen tak nol dalam N/J mempunyai invers.

Ambil sembarang $J+a \in N/J$ dengan $J+a \neq J+0$, artinya $a \notin J$ (sebab $J+a = J+0 \Leftrightarrow a \in J$). Misalkan M ideal utama N yang dibangun oleh a, maka $M = \{na \mid n \in N\}$. Karena J dan M ideal maka $J+M$ ideal dalam N dan jelas $J \subseteq J+M$. Karena $a \notin J$ dan $a = 0 + 1.a \in J+M$ maka $J+M \subseteq J$. Karena J ideal maksimal dalam N maka $J+M = N$. Karena $1 \in N$ maka $1 = x + na$ dengan $x \in J, n \in N$ (sebab $N = J+M$). Jadi $1 - na = x \in J$. Akibatnya $J+1 = J+(na) = (J+n)(J+a)$ dengan $a \in N$ yang artinya $(J+a)^{-1} = (J+n) \in N/J$.

Jadi setiap elemen tak nol dalam N/J mempunyai invers, artinya N/J adalah near-field.

$(\Leftarrow)$ Misalkan J ideal dalam near-ring komutatif N sehingga N/J adalah near-field.

Akan ditunjukkan J ideal maksimal dalam N yaitu jika $J \neq N$ sehingga jika M ideal dengan $J \subseteq M \subseteq N$ maka $J = M$ atau $M = N$.

Misalkan M ideal N dengan $J \subseteq M$, maka $(\forall n \in N)$ dan $n \in J$ mengakibatkan $n \in M$. Selanjutnya untuk menunjukkan $N = M$ cukup dengan menunjukkan bahwa $(\forall n \in N, n \notin J)$ maka $n \in M$.

Ambil sembarang $n \in N, n \notin J$. $n \in N, n \notin J \Rightarrow J + n \neq J + 0$, artinya $J + n$ bukan elemen nol N / J. Karena $J \subseteq M$ maka $\exists m \in M, m \notin J$ sehingga $J + m$ bukan elemen nol N / J.

$$
\begin{aligned}
N / J \text{ near-field, } (J+n) \in N / J, (J+m) \in N / J &\Rightarrow (J+n)\,(J+m)^{-1} \in N / J \\
&\Rightarrow (J+n)\,(J+m^{-1}) \in N / J \\
&\Rightarrow J + (nm^{-1}) \in N / J \\
&\Rightarrow nm^{-1} \in N
\end{aligned}
$$

M ideal N, $nm^{-1} \in N, m \in M \Rightarrow (nm^{-1} + m)nm^{-1} - nm^{-1}nm^{-1} = mnm^{-1} = mm^{-1}n = n \in M$, artinya setiap elemen N yang tidak termuat dalam J termuat dalam M yaitu $N \subseteq M$. Karena $M \subseteq N$ dan $N \subseteq M$ maka $M = N$. Jadi J ideal maksimal dalam near-ring N.

Terbukti bahwa suatu ideal J dalam near-ring komutatif N dengan elemen satuan maksimal jika dan hanya jika N / J adalah near-field. ■

SIMPULAN

Dari hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa beberapa sifat ideal utama dan ideal maksimal dalam ring juga berlaku dalam near-ring.

DAFTAR PUSTAKA

Abdurrahman, S., Hijriati, N., & Thresye. 2013. Ideal prima fuzzy near-ring. *Jurnal Matematika Murni dan Terapan "epsilon"*. 07(01), 21-32.

Adkinds, W.A & Weintraub, S.H. 1992. *Algebra: An Approach via Module Theory*. New York: Springer –Verlag.

Brenner, J.L. 1974. Maximal ideals in the near-ring of polynomials. *Pacific Journal of Mathematics*. 52(2), 595-600.

Fraleigh, J.B. 1999. *A First Course in Abstract Algebra.* New York: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Kandasamy, W.B.V. 2002. *Smarandache Near-Rings.* New York: American Research Press and W.B. Vasantha Kandasamy Rehoboth.

Kim, S.D. & Kim.H.S. 1996. On fuzzy ideals of near-rings. *Bull. Korean Math Soc.* 33(4), 593-601.

Mariana, A. 2017. *Sifat-Sifat Ideal Pada Near-Ring* (Skripsi). Universitas Bengkulu. Bengkulu.

Pilz, G. 1983. *Near-rings.* New York: North-Holland.

Raisinghania, M.D., & Aggarwal, R.S. 1980. *Modern Algebra.* New Delhi: S.Chand & Company Ltd.

Sahputri, J.A. 2016. *Sifat-Sifat Ideal dan Homomorphisma pada Ring yang Berlaku pada Near-Ring* (Skripsi). Universitas Bengkulu. Bengkulu.

Subiono. 2016. *Aljabar: Sebagai suatu Pondasi Matematika.* Surabaya: © 2016 the author Subiono.