

# Peran Skema Penulisan Definisi, Teorema Dan Bukti Dalam Kemandirian Belajar Membuktian Aljabar Abstrak Dengan Pendekatan Top-Down

Junarti<sup>a,\*</sup>, YL Sukestiyarno<sup>b</sup>, Stevanus Budi Waluya<sup>b</sup>, Kartono<sup>b</sup>

<sup>a</sup>FPMIPA, IKIP PGRI Bojonegoro, Jl. Panglima Polim No. 46, Bojonegoro, Indonesia

<sup>b</sup>FPMIPA, PPS UNNES, Semarang, Indonesia

\* Alamat Surel: [junarti@ikipgribojonegoro.ac.id](mailto:junarti@ikipgribojonegoro.ac.id).

Abstrak. Peran skema penulisan definisi, teorema dan bukti dengan pendekatan top-down untuk mempelajari struktur pembuktian aljabar abstrak (termasuk praktik validasi bukti) yang bertujuan untuk menyediakan semua aspek dari proses pembuktian dalam membangun kemandirian belajar mahasiswa melalui pendekatan Top-Down. Dengan memeriksa skema penulisan bukti dalam proses pembuktian sebagai studi kasus berbasis penelitian, melalui tugas menuliskan skema definisi dan teorema kemudian dua kali tugas menuliskan bukti dari 4 soal Grup yang sama dan wawancara yang dilakukan pada mahasiswa pendidikan matematika dengan analisis deskriptif. Hasil tugas menunjukkan 3 pola skema menuliskan isi definisi dan teorema: pola 1 sebanyak 32 %, pola 2 sebanyak 10%, dan pola 3 sebanyak 23%, selebihnya 65 % mahasiswa menuliskan dengan skema yang tidak terpola dikarenakan belum memahami ide kunci yang terkandung dalam definisi dan teorema. Hasil tugas pembuktian pertama dari soal yang dikerjakan menunjukkan kecenderungan menuliskan komponen bukti tanpa makna, dengan skema yang belum logis. Kecenderungan hasil wawancara pada 4 mahasiswa secara acak mahasiswa mampu menuliskan isi definisi dan teorema dikarenakan ditulis dalam pernyataan pendek dan dalam pernyataan implikasi. Sedangkan kecenderungan pembuktian yang harus ditulis tidak hanya sekedar pernyataan yang diketahui dan ditanyakan akan tetapi perlu menuliskan penjabaran yang diketahui dengan menyambungkan definisi dan teorema yang mendukung agar diperoleh kesimpulan. Profil kemandirian belajar dalam pemecahan masalah pembuktian mahasiswa masih mengandalkan contoh bukti teorema, contoh pembuktian pada buku, mahasiswa masih terkurung dari contoh dan konsep awal yang dimiliki sebelumnya, serta lemahnya pemahaman tentang isi himpunan yang berperan sebagai property suatu proses pembuktian.

Kata kunci:

Kata kunci: Skema penulisan definisi dan teorema, skema bukti, kemandirian belajar, dan pendekatan Top-Down

© 2019 Dipublikasikan oleh Jurusan Matematika, Universitas Negeri Semarang

## 1. Pendahuluan

Pembelajaran Aljabar Abstrak adalah proses yang kompleks, maka strategi pedagogis harus mempertimbangkan hasil penelitian dalam mencoba untuk mengatasi kesulitan yang teridentifikasi (Oktaç, 2016). Kesulitan siswa dengan struktur aljabar (aljabar abstrak) sebagian karena kurangnya pemahaman tentang gagasan struktural dalam aritmatika (Novotná & Hoch, 2008). Berbagai studi untuk mengatasi kesulitan tentang bukti yang berfokus pada membaca, memahami dan memvalidasi bukti (Inglis, 2012; Ko, 2013; Selden, 2003; Weber, 2010), dan bagaimana mereka membangun bukti (Harel, 1998; Weber, 2005), serta kerangka kerja untuk mengidentifikasi dan mengklasifikasikan kesalahan bukti (Strickland, 2016) telah dilakukan. Dan telah ada studi lain tentang peran pembuktian di kelas dan bagaimana seharusnya diajarkan (Hanna, 2000; Martinez, 2011)

To cite this article:

Junarti, Sukestiyarno, Y.L., Waluya, S.B. & Kartono. (2019). Peran Skema Penulisan Definisi, Teorema dan Bukti dalam Kemandirian Belajar Membuktikan Aljabar Abstrak dengan Pendekatan Top-Down. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 2*, 637-645

serta tanggung jawab dalam membuktikan dan mendefinisikan pada aljabar abstrak (Fukawa-conelly, 2015), serta masih banyak studi yang berfokus pada bukti dan pembuktian.

Bukti dan membuktikan sama-sama mempunyai peran penting dalam matematika, karena membuktikan merupakan proses yang memiliki peran penting dalam hal belajar dan mengajar di hampir semua bidang matematika (Selden & Selden, 2009). Bukti adalah urutan pernyataan logis, yang satu menyiratkan yang lain, yang memberikan penjelasan mengapa pernyataan yang diberikan itu benar (Stefanowicz, 2014). Sedangkan membuktikan adalah jalan yang diikuti dalam proses generalisasi yang dihasilkan (Erşen, 2016).

Bukti matematis adalah mutlak, yang berarti bahwa sekali teorema terbukti, itu terbukti untuk selamanya (Stefanowicz, 2014). Bagi mahasiswa menulis bukti menjadi suatu kesulitan yang sering dialami mahasiswa dalam aljabar abstrak. Kesulitan lain dikarenakan kesalahan penalaran pada calon guru matematika selama mengkonstruksi bukti (Demir, a Öztürk, & Güven, 2018).

Sedangkan bukti yang baik harus mencakup kata-kata, sama pentingnya dengan simbol dan angka saat menulis matematika, karena penting untuk menyajikan bukti dengan jelas, serta ada baiknya untuk menambahkan penjelasan tentang apa yang terjadi di setiap langkah dengan menggunakan kalimat penuh, sebaliknya jika seluruh halaman hanya dengan angka dan simbol, tanpa satu kata pun, hampir selalu menjadi contoh dari bukti buruk (Stefanowicz,, 2014). menulis bukti harus jelas dan tidak ada celah dalam pemahaman (Stefanowicz,, 2014), Menulis bukti jauh lebih efisien jika Anda terbiasa dengan simbol sederhana yang menyelamatkan kita menulis kalimat panjang (sangat berguna selama kuliah serba cepat!) (Stefanowicz,, 2014),

Menulis bukti dalam mata kuliah matematika universitas murni berbeda dari apa yang telah dilakukan selama sekolah, sehingga akan membutuhkan waktu untuk terbiasa melakukan hal ini dengan benar. ” (Stefanowicz,, 2014). Hal lain yang menjadi peran penting bahwa bukti yang membenarkan penggunaan definisi atau struktur aksiomatik biasanya digunakan setelah struktur aksiomatik baru disajikan kepada siswa dan bukti yang mengilustrasikan teknik. (Oktaç, 2016).

Skema adalah 'bagan', 'rangka-rangka', atau 'rancangan'. jadi skema definisi adalah bagan yang menjabarkan isi dari suatu definisi yang ditulis dalam bentuk bagian-bagian yang berupa objek matematika yang makna. Sedangkan skema teorema adalah bagan atau rangka yang menjabarkan isi dari komponen-komponen teorema, dengan masing-masing komponen penjabarannya mengandung makna (arti) yang berupa objek matematika, bisa sebagai fakta, konsep atau prinsip.

Skema definisi dan teorema yang disusun dengan pendekatan top-down diharapkan dapat membantu pemahaman mahasiswa akan definisi dan teorema. Begitu juga dengan skema bukti dengan pendekatan top-down diharapkan dapat membantu pemahaman apa yang akan dibuktikan dan membantu bagaimana menjabarkan apa yang diketahui serta membantu mengkonstruksi atau mengkaitkan syarat cukup dan syarat perlu yang harus dipenuhi agar mendapatkan bukti (konklusi) dengan benar.

Metode atau pendekatan dalam proses pembuktian menjadi bagian yang tidak kalah penting dalam membantu kelancaran proses pembuktian, salah satu pendekatan yang dicobakan dalam studi ini adalah pendekatan Top-down. Sebagai pendekatan alternatif untuk mengajar pembuktian, pendekatan ini merupakan perluasan pendekatan Schoenfeld (1985) karena pendekatan ini juga melibatkan pemecahan heuristik umum ke heuristik khusus (Siew et. al., 2005). Pengajaran yang dimulai dari bagian atas hierarki kemudian perlahan-lahan bekerja di bawah hierarki begitu seterusnya hingga mendapatkan bagian yang lebih spesifik atau dimulai dari mengajarkan konsep dan ide dari "representasi", kemudian menuju ke heuristik "menuliskan diagram/skema", dan kemudian bergerak lebih ke bawah untuk "menuliskan yang lebih spesifik" yakni dinamakan dengan pendekatan Top-Down (Siew et. al., 2005).

Pendekatan ini akan diterapkan dalam membangun kemandirian belajar terutama dalam hal menuliskan skema definisi, teorema dan bukti untuk mempelajari struktur pembuktian aljabar abstrak (termasuk praktik validasi bukti) yang bertujuan untuk menyediakan semua aspek dari proses pembuktian dalam membangun kemandirian belajar mahasiswa melalui pendekatan Top-Down.

Pertanyaan yang diajukan dalam studi kasus ini sebagai berikut:

- Bagaimana profil skema penulisan definisi, teorema, dan bukti dalam Grup?
- Bagaimana profil kemandirian belajar dalam pembuktian dengan pendekatan top-down?
- Bagaimana peran skema penulisan definisi, teorema, dan bukti dalam membangun kemandirian belajar pembuktian?

## 2. Metode

Metode yang digunakan untuk memeriksa skema penulisan definisi, teorema dan bukti dari tugas yang diberikan dengan studi kasus berbasis penelitian. Dengan teknik pengambilan data melalui tugas dalam bentuk kuis secara mandiri dan wawancara. Analisis data dengan uji deskriptif dan kualitatif sederhana dengan responden mahasiswa semester lima yang mengambil matakuliah aljabar abstrak.

Dalam menuliskan skema penulisan definisi dan teorema yang diberikan dalam bentuk tugas individu dalam kelas dilakukan satu kali tugas yang terdiri dari dua definisi dan empat teorema yang berkaitan dengan Grup. Dua tugas berikutnya dengan soal yang sama tentang bukti yang berkaitan dengan konsep Grup.

Indikator yang digunakan untuk mengukur kemandirian belajar dalam membuktikan dilihat dari cakupan representasi dari skema bukti yang dituliskan bermakna benar dan logis, mampu mengungkapkan bukti dengan pemikiran sendiri, dengan kreatifitas sendiri, tanpa melihat contoh pada buku, tanpa melihat pekerjaan teman lain.

Tugas pertama tentang menuliskan kembali definisi dan teorema dengan melalui skema atau kerangka atau bagan dari dua definisi grup dan empat teorema grup.

Tugas kedua tentang pembuktian terdiri soal yang berkaitan dengan konsep Grup sebagai berikut:

$G = \{x \mid x = a\sqrt{b}, a \text{ bilangan bulat dan } b \text{ bilangan asli}\}$  dengan operasi penjumlahan. Buktikan  $G$  merupakan grup.

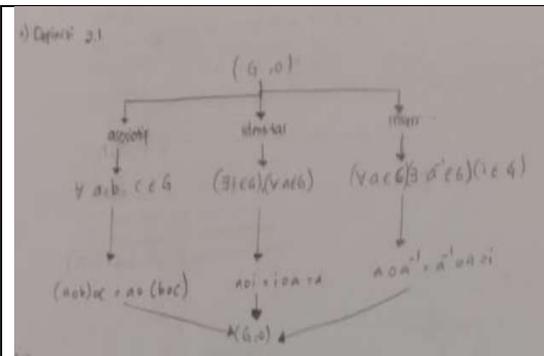
Tugas kedua diberikan satu soal: “ $G = \{x \mid x = a\sqrt{b}, a \text{ bilangan bulat dan } b \text{ bilangan asli}\}$  dengan operasi penjumlahan. Buktikan  $G$  merupakan grup” dengan skema yang sudah disiapkan. Sedangkan tugas ketiga diberikan soal yang sama dengan perintah menuliskan bukti sesuai skemanya sendiri.

### 3. Pembahasan

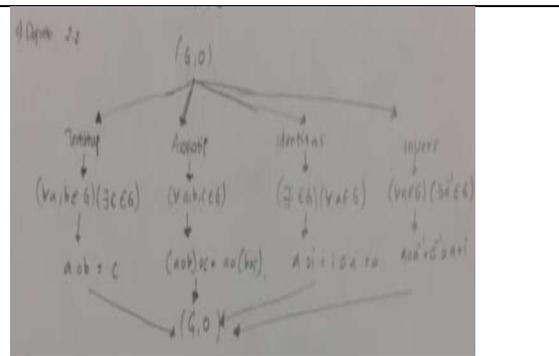
#### 3.1. Hasil Tugas Menuliskan Skema Definisi dan Teorema

Hasil tugas dalam menuliskan kembali definisi dan teorema melalui skema atau bagan dari mahasiswa dapat diidentifikasi menjadi 3 pola skema sebagai berikut:

Pola 1:

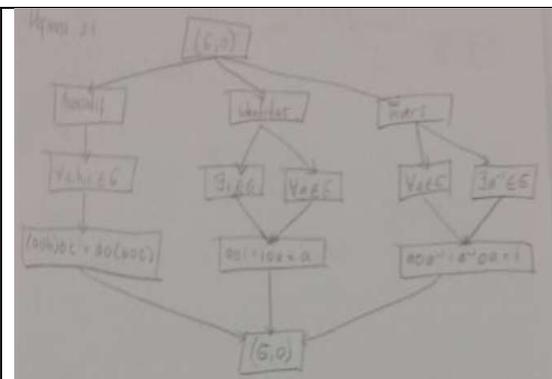


Gambar 1. Skema Definisi 1

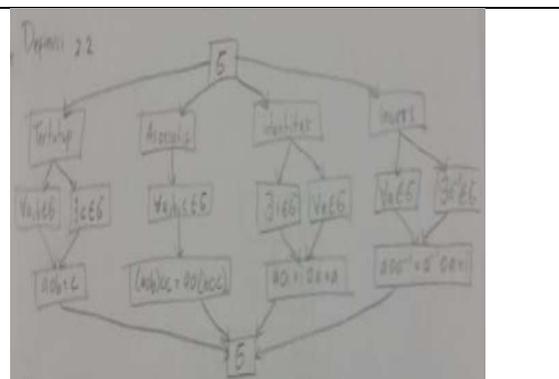


Gambar 2. Skema Definisi 2

Pola 2:

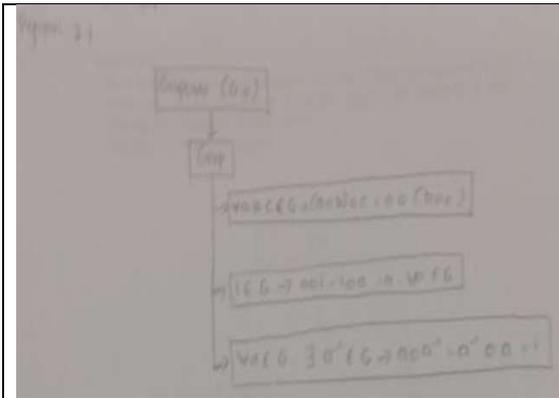


Gambar 3. Skema Definisi 1

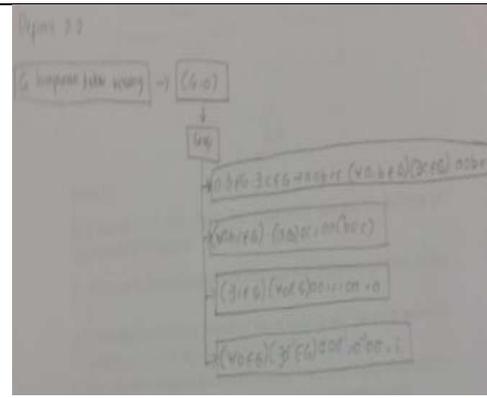


Gambar 4. Skema Definisi 2

Pola 3:



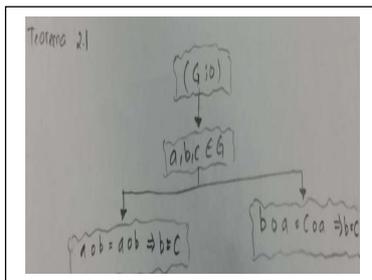
Gambar 5. Skema Definisi 1



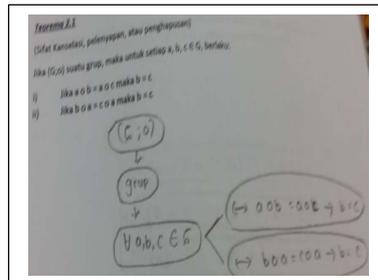
Gambar 6. Skema Definisi 2

Dari ketiga pola pada gambar di atas tampak berbeda, analisis skema yang ditampilkan bahwa untuk pola-1 mahasiswa menuliskan perbagian syarat grup melalui semua simbol yang ada dari definisi, sedangkan pola-2 menuliskan perbagian syarat grup menjadi komponen yang lebih kecil-kecil lagi melalui rangkaian simbol tanpa makna, dan untuk pola-3 menuliskan syarat-syarat grup menjadi bagian yang terstruktur ke-bawah dan bertahap dengan masing-masing bagan yang ditulis mempunyai makna.

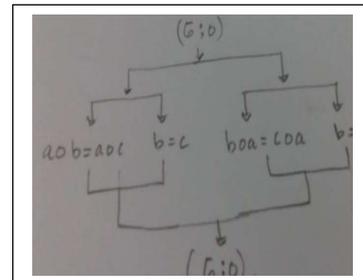
Skema penulisan teorema disajikan pada gambar 7, 8, dan 9 didiskripsikan bahwa pola-1 menunjukkan komponen teorema dengan skema arah yang tidak sesuai dengan makna dari teorema, sedangkan untuk pola-2 mahasiswa menuliskan simbol dalam setiap bagan tanpa makna dan symbol yang ditulis merupakan bagian dari teorema, dan pola-3 mahasiswa sudah mengetahui makna dari teorema dengan arah panah yang sesuai alur logika dengan isi bagan yang ditulis pernyataan secara simbolik dengan makna dan beberapa bagan tanpa makna.



Gambar 7



Gambar 8

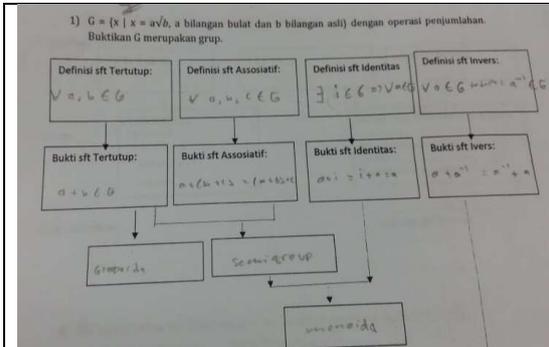


Gambar 9

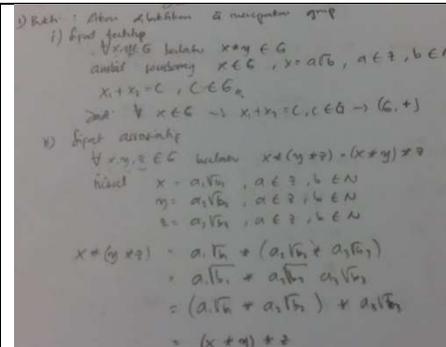
Prosentase jumlah mahasiswa yang menuliskan ke dalam tiga pola di atas yakni untuk pola-1 sebanyak 32 %, pola-2 sebanyak 10%, dan pola-3 sebanyak 23%, selebihnya 35 % mahasiswa menuliskan dengan skema yang tidak terpola dikarenakan belum memahami ide kunci yang terkandung dalam definisi dan teorema.

### 3.2. Hasil Tugas Menuliskan Skema Bukti

Dalam tugas menuliskan bukti disini mahasiswa diberikan tugas pertama sebanyak 1 soal pembuktian tentang Grup dengan panduan skema kosongan yang sudah disediakan dan pada tugas berikutnya diberikan tugas dari soal yang sama tetapi tidak disediakan bagan skema diperoleh jawaban mahasiswa sebagai berikut:



Gambar 7. Jawaban Tugas 1



Gambar 8. Jawaban Tugas 2

Pada tugas pertama, untuk soal-1 mahasiswa menuliskan skema yang disediakan dengan isinya penggalan definisi grup bukan pernyataan untuk membuktikan soal. Mahasiswa tidak memperhatikan himpunan yang diminta yakni  $G = \{x \mid x = a\sqrt{b}, a \text{ bilangan bulat dan } b \text{ bilangan asli}\}$ . Mahasiswa menuliskan prasyarat dari grup yang ditulis dalam bentuk umum sesuai dengan definisi.

Pada tugas kedua pada gambar 11 penuliskan skema bukti, mahasiswa sudah mulai berani mengeksplor pemahaman dengan baik, yakni bisa dilihat dari jawaban yang diberikan dengan sajian skema bukti yang lengkap dan terarah secara logis, sudah memahami isi himpunan dan hasil operasi dari elemen himpunan yang diketahui.

Wawancara pada 4 mahasiswa yang dipilih berdasarkan tingkat kesediaan yang ditawarkan ketika diminta menjadi responden wawancara yakni 3 wanita dan satu pria. Perubahan yang terjadi dari mulai tugas awal diberikan sampai dengan tugas yang terakhir dan kemandirian yang dilakukan selama diberikan tugas digunakan sebagai bahan wawancara. Dari keempat mahasiswa kecenderungan jawabannya yang berkaitan dengan peran skema penulisan definisi, teorema dan bukti dengan pendekatan top-down dalam proses pembuktian dan kemandirian membuktikan.

Hasil wawancara untuk yang berkaitan peran skema penulisan definisi, teorema dan bukti mempunyai kecenderungan mahasiswa menjadi terbantu dalam hal memaknai isi definisi dan teorema. Dengan menuliskan penggalan definisi dan teorema mahasiswa menjadi tahu komponen yang menyusun definisi dan teorema menjadi ide kunci yang bisa ditandai membantu untuk mudah dipahami dan mudah dihafal, namun ada pula mahasiswa lemah dalam hal bahasa yang terkandung dalam definisi dan teorema sulit untuk dipahami dikarenakan masih asing dan belum terbiasa dengan pernyataan yang banyak symbol. Tampak kecenderungan perubahan dari tugas pertama, kedua dan ketiga dari semua tugas yang diberikan yang berkaitan dengan pemahaman isi definisi dan teorema maupun dalam proses membuktikan walaupun tidak seluruhnya mampu, namun sangat membantu proses pembuktian menjadi lebih mudah, logis dan lebih terarah dari

tugas sebelumnya. Dari kemandirian selama proses membuktikan mahasiswa ada kecenderungan perubahan kemandirian pada saat membuktikan dari tugas kedua dan ketiga ada perbedaan yang awalnya pada tugas kedua belum begitu mampu menuliskan bukti secara baik dan tidak bermakna apa yang dituliskan sampai bisa menuliskan bukti mendekati benar, logis dan bermakna.

### 3.3. *Diskusi*

Peran skema penulisan definisi dan teorema melatih mahasiswa untuk paham akan isi dari definisi dan teorema, sehingga dimungkinkan untuk membantu proses pemahaman menjadi lebih mudah diserap dengan mengenal bagian-bagian kecil yang menyusun definisi dan teorema. Tidak lain bagian-bagian definisi dan teorema merupakan objek matematika secara langsung yang bisa tersusun dari konsep-konsep atau fakta-konsep atau konsep-fakta yang merupakan suatu prinsip dalam matematika. Melalui pendekatan top-down membantu untuk membuat skema dari bagian yang umum menjadi bagian yang lebih kecil dan khusus.

Mahasiswa sering tidak menyadari bahwa konsep yang sudah dimiliki di pendidikan sebelumnya menjadikan prasyarat atau menjadikan jembatan yang tidak harus ditinggalkan. Tingkat kemandirian belajar membuktikan belum mencapai optimal, dikarenakan mahasiswa belum paham akan beraneka ragam himpunan yang berkaitan dengan isi himpunan yang nantinya elemennya akan dioperasikan untuk menunjukkan syarat-syarat grup, mahasiswa kurang berani mengambil langkah awal dalam memulai bukti artinya masih ada keraguan pemahaman dalam mengkonstruksi bukti.

Dari hasil kasus studi ini tentang skema bukti yang disampaikan mahasiswa belum sampai dikaji dengan menggunakan tiga skema bukti yang dikembangkan oleh Harel dan Sowder (1998) adalah: keyakinan eksternal, siswa melakukan proses pembuktian melalui ide-ide dalam pikiran mereka melalui memeriksa skema bukti yang ditunjukkan oleh siswa dengan mengidentifikasi bukti yang mana dari tiga skema bukti utama (eksternal, empiris, dan analitis) dengan menggunakan kerangka kerja Harel & Sowder (1998) yang digunakan pula oleh Stylianou et. al. (2006) dan Sen & Guler (2015).

---

## 4. Kesimpulan

Profil skema penulisan definisi, teorema, dan bukti dalam Grup dapat diidentifikasi menjadi tiga pola untuk pola-1 kecenderungan yang dituliskan mulai dari perbagian syarat grup disajikan dalam simbol-simbol yang ada pada definisi, sedangkan pola-2 kecenderungan menuliskan perbagian syarat grup menjadi komponen yang lebih kecil-kecil lagi melalui rangkaian simbol tetapi tanpa makna, dan untuk pola-3 menuliskan syarat-syarat grup menjadi bagian yang terstruktur ke-bawah dan bertahap dengan masing-masing bagian yang ditulis mempunyai makna.

Sedangkan profil kemandirian belajar dalam pembuktian dengan pendekatan top-down ditunjukkan dengan adanya kecenderungan perubahan jawaban di tugas kedua menjadi lebih benar dari masing-masing komponen bukti yang tersusun secara hirarkis dan logis. Profil kemandirian belajar dalam pemecahan masalah pembuktian mahasiswa masih mengandalkan contoh bukti teorema, contoh pembuktian pada buku, mahasiswa

masih terkurung dari contoh dan konsep awal yang dimiliki sebelumnya, serta lemahnya pemahaman tentang isi himpunan yang berperan sebagai sifat suatu proses pembuktian.

Dan melalui skema penulisan definisi, teorema, dan bukti mempunyai kecenderungan peran yang sangat membantu proses pembuktian sehingga secara tidak langsung mahasiswa dapat membangun kemandirian belajar pembuktian melalui skema yang pernah disusunnya, sehingga secara tidak langsung dari pengalamannya tersebut mahasiswa tidak lagi menggantungkan contoh pada buku atau melihat jawaban teman.

Kecenderungan hasil wawancara pada 4 mahasiswa secara acak mahasiswa mampu menuliskan isi, definisi dan teorema dikarenakan ditulis dalam pernyataan pendek dan dalam pernyataan implikasi. Sedangkan kecenderungan pembuktian yang harus ditulis tidak hanya sekedar pernyataan yang diketahui dan ditanyakan akan tetapi perlu menuliskan penjabaran yang diketahui dengan menyambungkan definisi dan teorema yang mendukung agar diperoleh kesimpulan.

---

## 5. Daftar Pustaka

- Demir E., a Öztürk T., and Güven B. (2018). Examining preservice mathematics teachers' reasoning errors, deficiencies and gaps in the proof process. *European Journal of Science and Mathematics Education*, Vol. 6, No. 2, 2018 , 44-61
- Erşen Z. B. (2016). Preservice Mathematics Teachers' Metaphorical Perceptions towards Proof and Proving. *International Education Studies*. ISSN 1913-9020 E-ISSN 1913-9039. doi:10.5539/ies.v9n7p88. 9(7): 88-97.
- Fukawa-Connelly, T. (2015). Responsibility for proving and defining in abstract algebra class. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-17. DOI: 10.1080/0020739X.2015.1114159.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-3), 5-23.
- Harel, G. and Sowder, L., (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 7, 234-283.
- Ko, Y. and Knuth, E.J., (2013). Validating proofs and counterexamples across content domains: Practices of importance for mathematics majors. *Journal of Mathematical Behavior*, 32(1), 20-35.
- Oktaç A. (2016). Abstract Algebra Learning: Mental Structures, Definitions, Examples, Proofs And Structure Sense. *Annales De Didactique Et De Sciences Cognitives*, 21:297 -316
- Martinez M.V. (2014). Algebra and Proof in High School: The Case of Algebraic Proof as Discovery. *REDIMAT Journal of Research in Mathematics Education* 3(1): 30-53, doi: 10.4471/redimat.2014.39.
- Novotná, J. & Hoch, M.. (2008). How Structure Sense for Algebraic Expressions or Equations is Related to Structure Sense for Abstract Algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2):93-104.

- Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduate students tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4-36.
- Selden, A., & Selden, J. (2009). Teaching proving by coordinating aspects of proofs with students' abilities. In: *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 339–354). Reston, VA: NCTM, <https://pdfs.semanticscholar.org/14e5/ad3a547cf7128bbbe4256ed9fb735e1978d9.pdf>
- Siew J. T. Y. 2005. *Top-Down Approach to Teaching Problem Solving Heuristics in Mathematics*. Centre for Research in Pedagogy and Practice, National Institute of Education, Nanyang Technological University, Singapore.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: FL Academic Press.
- Stefanowicz A., (2014), *Proofs and Mathematical Reasoning*, University of Birmingham Mathematics Support Centre, <https://www.birmingham.ac.uk/Documents/college-eps/college/stem/Student-Summer-Education-Internships/Proof-and-Reasoning.pdf>
- Strickland S. & Rand B. (2016). A Framework for Identifying and Classifying Undergraduate Student Proof Errors. *PRIMUS*, 00(00):1-17. ISSN: 1051-1970 print / 1935-4053 online. DOI: 10.1080/10511970.2016.1199615
- Weber, K., (2005). Problem solving, proving and learning: The relationship between problem solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *Journal of Mathematical Behavior*, 24(3-4), 351-360.
- Weber, K. & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 209-234.