



Bifurkasi Pada Model Interaksi Mangsa Pemangsa Dengan Perilaku Anti Pemangsa

Siti Saadah^{a,*}, Abadi^b, Dian Savitri^c

^a Mahasiswa Matematika, Universitas Negeri Surabaya, Jalan Ketintang, Surabaya 60231, Indonesia

^{b,c} Dosen Matematika, Universitas Negeri Surabaya, Jalan Ketintang, Surabaya 60231, Indonesia

* e-mail: sitisaadah@mhs.unesa.ac.id

Abstrak

Artikel ini membahas model interaksi mangsa pemangsa dengan adanya kemampuan mangsa dalam melawan pemangsa, yang dikenal dengan perilaku anti pemangsa. Dari hasil analisa model diperoleh tiga titik kesetimbangan, di mana jenis kestabilannya ditentukan berdasarkan nilai eigen yang diperoleh dari masing-masing titik kesetimbangan. Adapun jenis kestabilan dari ketiganya yaitu, pada titik kesetimbangan pertama dan kedua bersifat *saddle* dan pada titik kesetimbangan ketiga bersifat *spiral* stabil. Dengan mengkontinuasi parameter perilaku anti pemangsa diperoleh bifurkasi *Hopf* dan transkritikal. Bifurkasi *Hopf* ditandai adanya perubahan kestabilan dari *spiral* stabil menjadi *spiral* tidak stabil dan terdapat *limit cycle*. Sedangkan terjadinya bifurkasi transkritikal ditandai adanya persilangan dari dua cabang kesetimbangan dari *node* stabil menjadi *saddle* dan sebaliknya dari *saddle* menjadi *node* stabil. Hasil analisis menunjukkan bahwa ketika perilaku anti pemangsanya tinggi, maka populasi mangsa meningkat menuju ke ambang batas daya tampung lingkungan dengan populasi pemangsa menurun menuju kepunahan. Sebaliknya, ketika perilaku anti pemangsanya kecil, maka populasi mangsa dan pemangsa dapat hidup berdampingan sampai t menuju tak hingga dengan populasi mangsa selalu lebih besar dari populasi pemangsa.

Kata kunci:

Mangsa pemangsa, anti pemangsa, bifurkasi, *limit cycle*.

© 2020 Dipublikasikan oleh Jurusan Matematika, Universitas Negeri Semarang

1. Pendahuluan

Model interaksi mangsa pemangsa merupakan suatu model matematika yang menggambarkan kehidupan dua populasi makhluk hidup, yaitu populasi mangsa dan populasi pemangsa. Dalam interaksinya, mangsa dianggap menjadi satu-satunya hal yang mempengaruhi keberadaan pemangsa. Padahal sebenarnya keberadaan pemangsa tidak semata-mata dipengaruhi oleh keberadaan mangsa, namun juga didasari oleh keberadaan pemangsa itu sendiri. Dalam keadaan pemangsa melimpah, maka akan terjadi persaingan antar pemangsa untuk mendapatkan mangsa. Persaingan yang terjadi menyebabkan kepadatan pemangsa terganggu, sehingga mempengaruhi keberadaan pemangsa itu sendiri. Hal ini berarti, kepadatan pemangsa tidak hanya dipengaruhi oleh kepadatan mangsa, namun juga dipengaruhi kepadatan pemangsa itu sendiri. Pendapat ini sesuai dengan ungkapan Arditi & Ginzburg (1989) yang menyatakan bahwa fungsi respon dalam interaksi mangsa pemangsa seharusnya tidak bergantung pada kepadatan populasi mangsa saja, namun pula diperhatikan dari segi kepadatan populasi pemangsa. Fungsi respon yang memperhatikan kepadatan mangsa sekaligus kepadatan pemangsa dalam interaksi mangsa pemangsa adalah fungsi respon rasio dependent (Chen, Li, & Xiao, 2011). Salah satu penelitian yang telah menggunakan fungsi respon rasio dependent yaitu penelitian yang dilakukan Banerjee (2010) dengan judul "Self-Replication of spatial patterns in a ratio dependent predator-prey model". Dalam penelitiannya, Banerjee menggabungkan fungsi respon rasio dependent dengan Holling tipe II dengan asumsi bahwa pemangsa tidak mencari mangsa lain ketika mangsa utama punah.

Selanjutnya, mangsa sebagai sumber makanan utama bagi pemangsa sering kali dianggap kalah dan termangsa saat terjadi predasi (Dawes & Souza, 2013). Padahal kenyataan di alam membuktikan bahwa, ada beberapa mangsa yang mampu melawan serta meloloskan diri dari serangan pemangsa saat predasi.

To cite this article:

Saadah, S., Abadi, Savitri, D. (2020). Bifurkasi Pada Model Interaksi Mangsa Pemangsa Dengan Perilaku Anti Pemangsa. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika* 2, 95-103

Kemampuan mangsa dalam melawan pemangsa merupakan bentuk pertahanan diri dalam menghindari pemangsa, yang dikenal sebagai perilaku anti pemangsa.

Tang & Xiao (2015) telah melakukan penelitian terhadap dua spesies makhluk hidup yaitu spesies mangsa dan pemangsa dengan menambahkan adanya perilaku anti pemangsa. Dalam penelitiannya, fungsi respon yang digunakan yaitu Holling tipe IV, di mana mangsa memiliki sifat bertahan dari pemangsa ketika populasi mangsa meningkat. Selain itu, pemangsa memiliki kecenderungan untuk mencari mangsa lain ketika mangsa utama hampir punah.

Terinspirasi dari kedua penelitian sebelumnya, maka penulis tertarik melakukan penelitian terhadap interaksi mangsa pemangsa menggunakan fungsi respon rasio dependent Holling tipe II dengan menambahkan adanya perilaku anti pemangsa. Dalam penelitian ini diasumsikan bahwa perilaku anti pemangsa menyebabkan populasi pemangsa berkurang akibat perlawanan dari mangsa. Fungsi respon yang digunakan adalah rasio dependent Holling tipe II yang mempertimbangkan bahwa populasi pemangsa tidak hanya dipengaruhi oleh populasi mangsa saja, namun juga populasi pemangsa itu sendiri. Selain itu, diasumsikan pula bahwa pemangsa tidak mencari mangsa lain ketika mangsa utama punah. Tujuan dari penelitian ini untuk mengetahui pengaruh adanya perilaku anti pemangsa terhadap kepadatan populasi mangsa dan pemangsa.

2. Metode Penelitian

Model interaksi mangsa pemangsa dengan fungsi respon rasio dependent Holling tipe II dan perilaku anti pemangsa yang telah didapatkan, selanjutnya ditentukan titik kesetimbangannya. Titik kesetimbangan diperoleh dengan mengenalkan ruas kanan dari masing-masing persamaan dalam sistem interaksi tersebut. Setelah diperoleh titik kesetimbangan, langkah selanjutnya melakukan analisis kestabilan terhadap masing-masing titik. Analisis kestabilan dilakukan terhadap sistem dengan melihat nilai eigen yang dihasilkan. Nilai eigen diperoleh dengan cara mensubstitusikan masing-masing titik kesetimbangan kedalam matriks Jacobian hasil linearisasi. Terakhir, setelah dilakukan analisis maka tahap selanjutnya adalah simulasi menggunakan aplikasi Matcont. Simulasi dilakukan bertujuan untuk melihat kesesuaian perilaku antara hasil simulasi numerik dengan hasil analisis dari masing-masing titik kesetimbangan. Selain itu, untuk melihat perubahan perilaku yang terjadi terhadap sistem ketika parameternya di ubah

3. Model Matematika

Model interaksi mangsa pemangsa dengan fungsi respon rasio dependent Holling tipe II dan perilaku anti pemangsa dinyatakan dalam sistem persamaan berikut :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\beta xy}{y + \gamma x} \\ \dot{y}(t) &= \frac{bxy}{y + \gamma x} - my - \eta xy\end{aligned}\quad (1)$$

Berdasarkan model persamaan (1) secara berturut-turut x, y menyatakan kepadatan populasi mangsa dan pemangsa, dengan $\dot{x}(t)$ menyatakan perubahan kepadatan populasi mangsa, dan $\dot{y}(t)$ menyatakan perubahan kepadatan populasi pemangsa. Parameter pada model persamaan (1) tersebut r menyatakan tingkat pertumbuhan populasi mangsa dengan k sebagai daya tampung lingkungan, β menyatakan laju pemangsaan pemangsa, b menyatakan laju konversi biomassa sebagai bentuk perubahan dari energi yang diperoleh akibat memakan mangsa. Parameter m menyatakan tingkat kematian alami yang dialami pemangsa, γ menyatakan waktu yang dibutuhkan oleh pemangsa dalam menangani mangsa, dan η sebagai perilaku anti pemangsa. Pada model ini, perilaku anti pemangsa diasumsikan mampu mengurangi populasi pemangsa dengan cara melukai hingga membunuhnya. Namun usaha yang dilakukan mangsa dalam melukai hingga membunuh pemangsa merupakan bentuk pertahanan diri saat terjadi predasi dan bukan sebagai bentuk memperoleh makanan.

Model interaksi mangsa pemangsa pada sistem persamaan (1) selanjutnya di scalling agar lebih sederhana dan untuk mempermudah proses penghitungan. Bentuk scalling dari sistem persamaan (1) sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\dot{X}(\tau) &= X(1 - X) - \frac{gXY}{Y + X} \\ \dot{Y}(\tau) &= -dY + \frac{pXY}{Y + X} - eXY\end{aligned}\quad (2)$$

dengan $X = \frac{x}{k}$, $Y = \frac{y}{ky}$, $\tau = tr$, $g = \frac{\beta}{r}$, $p = \frac{b}{ry}$, $d = \frac{m}{r}$, $e = \frac{\eta k}{r}$. Semua parameter pada sistem persamaan (2) diberikan syarat kondisi awal > 0 .

4. Pembahasan

4.1. Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan model (2) dapat diperoleh dengan mengenkolkan ruas kanan dari sistem persamaan tersebut, yaitu dengan menjadikan $\dot{X}(\tau) = 0$ dan $\dot{Y}(\tau) = 0$. Dengan menjadikan $\dot{Y}(\tau) = 0$ maka diperoleh dua kemungkinan yaitu $Y = 0$ atau $Y = \frac{pX - eX^2 - dX}{d + eX}$. Ketika $Y = 0$ maka dari persamaan $\dot{X}(\tau) = 0$ diperoleh $X = 0$ dan $X = 1$, sehingga diperoleh titik kesetimbangan pertama $E_0 = (0,0)$ dan titik kesetimbangan kedua yaitu $E_1 = (1,0)$. Kemudian ketika $Y = \frac{pX - eX^2 - dX}{d + eX}$ diperoleh titik kesetimbangan ketiga yaitu $E_2 = (X^*, Y^*)$ dengan $X^* = \frac{(gp - gd - p)}{ge - p}$ dan $Y^* = \frac{-(gp - gd - p)(p - d - e)}{(ge - p)(ge - d - e)}$.

Titik kesetimbangan $E_0 = (0,0)$ menggambarkan keadaan di mana populasi mangsa dan pemangsa mengalami kepunahan. Kondisi ini dapat diartikan pula jika populasi mangsa punah, maka populasi pemangsa pun akan ikut mengalami kepunahan dikarenakan sumber makanan yang tidak ada. Kemudian titik kesetimbangan $E_1 = (1,0)$ menggambarkan keadaan ketika hanya populasi mangsa saja yang bertahan hidup, sedangkan populasi pemangsa mengalami kepunahan. Dalam kondisi ini, populasi mangsa akan tumbuh hingga batas daya tampung lingkungan. Selanjutnya, kondisi pada titik kesetimbangan $E_2 = (X^*, Y^*)$ yaitu menggambarkan keadaan ketika populasi mangsa dan pemangsa hidup secara berdampingan, tanpa ada yang mengalami kepunahan.

4.2. Analisis Kestabilan Lokal

Sifat kestabilan lokal dari ketiga titik kesetimbangan yang di hasilkan dapat ditentukan dengan nilai eigen yang dihasilkan dari proses linearisasi terhadap sistem persamaan (2) di sekitar titik kesetimbangan. Matriks Jacobian yang dihasilkan dari proses linearisasi terhadap sistem persamaan (2) sebagai berikut :

$$J = \begin{bmatrix} 1 - 2X - \frac{gY}{Y + X} + \frac{gXY}{(Y + X)^2} & -\frac{gX}{Y + X} + \frac{gXY}{(Y + X)^2} \\ \frac{pY}{Y + X} - \frac{pXY}{(Y + X)^2} - eY & -d + \frac{pX}{Y + X} - \frac{pXY}{(Y + X)^2} - eX \end{bmatrix}$$

Linearisasi sistem (2) di sekitar titik kesetimbangan $E_0 = (0,0)$ diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut :

$$J_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$$

dan menghasilkan nilai eigen $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = -d$. Karena semua parameter diberikan syarat kondisi awal > 0 , maka $\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_1 > 0$ yang berarti kestabilan titik kesetimbangan $E_0 = (0,0)$ bersifat tidak stabil berupa *saddle*.

Linearisasi sistem (2) di sekitar titik kesetimbangan $E_1 = (1,0)$ diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut :

$$J_1 = \begin{bmatrix} -1 & -g \\ 0 & -d + p - e \end{bmatrix}$$

yang menghasilkan nilai eigen $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = (-d + p - e)$. Nilai eigen λ_1 bernilai negatif karena $-1 < 0$, sedangkan nilai eigen λ_2 bernilai negatif jika $e > p - d$ dan bernilai positif jika $e < p - d$. Ketika λ_2 bernilai negatif, menyebabkan kestabilannya bersifat stabil asimtotik dan jenis titik kesetimbangannya berupa node. Namun jika λ_2 bernilai positif, maka berlawanan tanda dengan λ_1 , menyebabkan kestabilannya bersifat tidak stabil, dan jenis titik kesetimbangannya berupa titik saddle.

Sedangkan jika $e = p - d$, maka nilai $\lambda_2 = 0$, sehingga kestabilannya bersifat stabil dengan jenis titik kesetimbangan berupa node.

Selanjutnya proses linearisasi sistem (2) di sekitar titik kesetimbangan $E_2 = (X^*, Y^*)$ diperoleh matriks jacobian sebagai berikut :

$$J_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

dengan

$$a_{11} = 1 - 2X^* - \frac{gY^*}{Y^*+X^*} + \frac{gX^*Y^*}{(Y^*+X^*)^2}$$

$$a_{12} = -\frac{gX^*}{Y^*+X^*} + \frac{gX^*Y^*}{(Y^*+X^*)^2}$$

$$a_{21} = \frac{pY^*}{Y^*+X^*} - \frac{pX^*Y^*}{(Y^*+X^*)^2} - eY^*$$

$$a_{22} = -d + \frac{pX^*}{Y^*+X^*} - \frac{pX^*Y^*}{(Y^*+X^*)^2} - eX^*$$

yang menghasilkan nilai eigen $\lambda_1 = \frac{(a_{11}+a_{22})+\sqrt{(-a_{11}-a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}}{2}$ dan $\lambda_2 = \frac{(a_{11}+a_{22})-\sqrt{(-a_{11}-a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}}{2}$. Sifat kestabilan dari titik kesetimbangan $E_2 = (X^*, Y^*)$ dapat dilihat pada tabel 1 berikut :

Tabel 1. Kestabilan titik kesetimbangan

Titik Kesetimbangan	Syarat	Sifat Kestabilan	
$E_2 = (X^*, Y^*)$	$(-a_{11} - a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) > 0$ $\in \mathbb{R}$	$(a_{11} + a_{22}) > \sqrt{(-a_{11} - a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}$	<i>Node</i> tidak stabil
		$(a_{11} + a_{22}) < \sqrt{(-a_{11} - a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}$	<i>Saddle</i> atau <i>Node</i> stabil
		$(a_{11} + a_{22}) = 0$	<i>Saddle</i>
	$(-a_{11} - a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) < 0$ $\in \mathbb{C}$	$(a_{11} + a_{22}) > 0$	<i>Spiral</i> tidak stabil
		$(a_{11} + a_{22}) < 0$	<i>Spiral</i> stabil
		$(a_{11} + a_{22}) = 0$	<i>Center</i>

4.3. Simulasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan untuk melihat kesesuaian antara hasil analisis dengan numeriknya. Nilai parameter yang digunakan diambil dari artikel Bandyopadhyay & Chattopadhyay, (2005). Nilai parameter yang diambil diantaranya nilai parameter $p, d,$ dan g , sedangkan untuk nilai parameter anti pemangsa diambil secara acak dan selanjutnya akan dilakukan kontinuitas untuk melihat pengaruhnya terhadap kepadatan populasi mangsa dan pemangsa. Berikut nilai parameter dari penyusun sistem yang dapat disajikan dalam tabel 2 berikut :

Tabel 2. Notasi Variabel dan Nilai Parameter

Notasi	Nilai Yang di tentukan
X	Variabel Mangsa
Y	Variabel Pemangsa

p	0,7808
g	2
d	0,5
e	Diskontinuasi

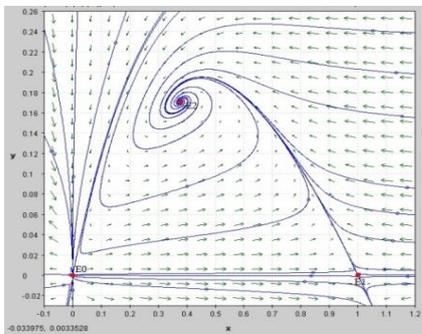
Dengan menggunakan nilai parameter pada tabel 2 yang kemudian disubstitusikan kedalam sistem persamaan (2) dengan bantuan *software* Maple18 diperoleh titik kesetimbangan sistem sebagai berikut:

$$E_0 = (0,0)$$

$$E_1 = (1,0)$$

$$E_2 = (0,3774104683 ; 0,1705895317)$$

Hasil simulasi numerik dengan menggunakan *software* P-Plane menunjukkan bahwa pada titik kesetimbangan E_0 dan E_1 bersifat tidak stabil dengan jenis titik kesetimbangan berupa saddle. Kemudian titik kesetimbangan E_2 bersifat stabil asimtotik dengan jenis titik kesetimbangan berupa spiral. Hasil simulasi dari ketiga titik kesetimbangan diatas dapat disajikan sebagai potret fase di ruang dua dimensi berikut ini :

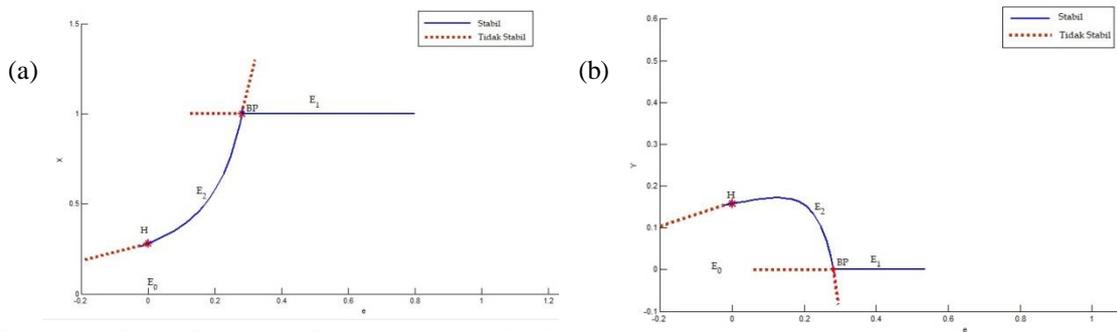


Gambar 1. Potret fase sistem di $e = 0,1$

Selanjutnya, dalam penelitian ini akan dilakukan kontinuitas terhadap nilai parameter perilaku anti pemangsa yang bertujuan untuk melihat perubahan perilaku sistem akibat adanya perilaku anti pemangsa. Proses kontinuitas parameter dilakukan menggunakan Matcont pada *software* Matlab R2012B.

4.3.1. Perubahan kestabilan dengan kontinuitas parameter e

Simulasi model mangsa pemangsa dengan fungsi respon rasio dependent Holling tipe II dan perilaku anti pemangsa pada persamaan (2) dengan menjalankan nilai e , terjadi perubahan perilaku kestabilan dari sistem yang dapat di tunjukkan pada diagram bifurkasi berikut :



Gambar 2. (a) Diagram Bifurkasi X terhadap e dan (b) Diagram Bifurkasi Y terhadap e

Gambar 2, menunjukkan keseluruhan perubahan kestabilan dari sistem akibat adanya perubahan terhadap nilai parameter e . Terlihat bahwa di sekitar titik $E_0 = (0,0)$ dan $E_1 = (1,0)$, bersifat tidak stabil, sedangkan di sekitar titik $E_2 = (0,3774104683 ; 0,1705895317)$ bersifat stabil. Namun sifat

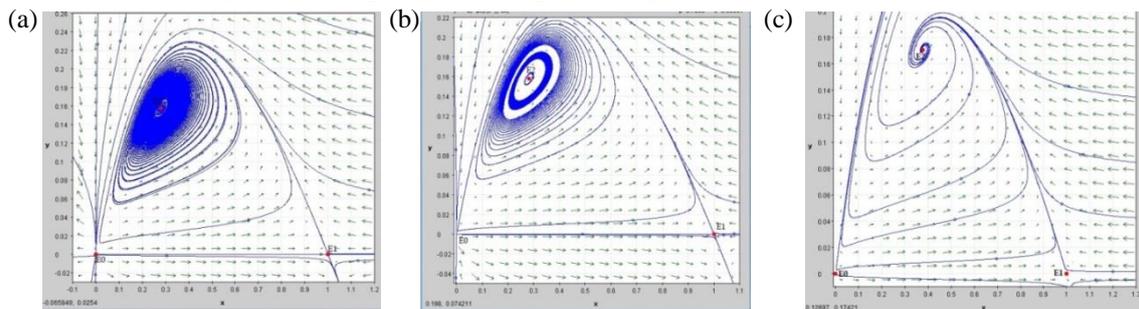
kestabilan sistem ini berubah ketika melewati titik BP (Branch Point) yaitu pada $e = 0,2808$ dan titik H (Hopf) pada $e = 0,000047$.

Perubahan kestabilan yang terjadi pada saat titik BP (*Branch Point*) jenis bifurkasinya termasuk bifurkasi transkritikal, yang ditandai dengan adanya persilangan dari dua cabang kesetimbangan dalam satu diagram bifurkasi, yaitu kesetimbangan E_1 dan E_2 . Pada titik kesetimbangan E_1 dan E_2 , terjadi perubahan kestabilan dari stabil menjadi tidak stabil dan sebaliknya, dari tidak stabil menjadi stabil ketika melewati nilai parameter perilaku anti pemangsa $e = 0,2808$. Namun ketika melewati titik $e = 0,2808$ dan seterusnya, variabel Y pada titik kesetimbangan E_2 bernilai negatif, sehingga tidak memenuhi syarat keberadaan titik kesetimbangan, dan hanya dua titik kesetimbangan yang memenuhi yaitu titik kesetimbangan E_0 dan E_1 .

Perubahan kestabilan yang terjadi pada saat titik H (Hopf) jenis bifurkasinya termasuk bifurkasi Hopf, yang ditandai dengan berubahnya jenis titik kesetimbangan dari spiral stabil menjadi center di titik $e = 0,000047$. Setelah melewati titik bifurkasi Hopf, kestabilan sistem di titik $E_0 = (0,0)$ dan $E_1 = (1,0)$, bersifat tidak stabil berupa saddle dan di titik E_2 bersifat tidak stabil berupa spiral source tetapi terdapat solusi periodik.

Selanjutnya, untuk memperjelas perilaku kestabilan sistem interaksi mangsa pemangsa dengan fungsi respon rasio dependent Holling tipe II dan perilaku anti pemangsa di masing-masing titik kesetimbangan, ketika $e < 0,000047$, $e = 0,000047$, dan $0,000047 < e < 0,28$ akan digambarkan potret fase sebagai berikut :

4.3.1.1. Analisis perubahan perilaku dengan mengkontinuasi nilai e di $0 < e \leq 0,1$

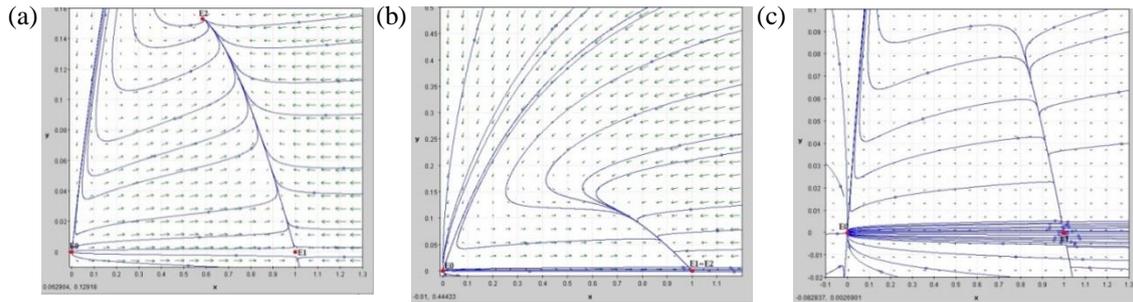


Gambar 3. Potret fase sistem di (a) $e = 0,00001$, (b) tepat bifurkasi Hopf $e = 0,000047$, (c) $e = 0,1$

Gambar 3, menjelaskan bahwa ketika $e = 0,00001$ terdapat tiga solusi titik kesetimbangan yaitu di $E_0 = (0,0)$ dengan jenis titik kesetimbangan saddle point dan bersifat tidak stabil, di $E_1 = (1,0)$ jenis titik kesetimbangan saddle point dan bersifat tidak stabil. Sedangkan di $E_2 = (0,2807448961 ; 0,1576638720)$ jenis titik kesetimbangan berupa spiral source bersifat tidak stabil, dan ada limit cycle di titik kesetimbangan E_2 .

Ketika nilai parameter $e = 0,000047$ yaitu tepat di titik terjadinya bifurkasi Hopf, terjadi perubahan kestabilan di titik $E_2 = (0,2807715068 ; 0,1576697067)$, dari tidak stabil menjadi stabil dengan jenis titik kesetimbangan berupa center. Sedangkan di titik $E_0 = (0,0)$ jenis titik kesetimbangannya berupa saddle point bersifat tidak stabil, dan di $E_1 = (1,0)$ jenis titik kesetimbangannya saddle point bersifat tidak stabil. Selanjutnya, ketika nilai parameter $e = 0,1$, terdapat tiga titik kesetimbangan yaitu E_0, E_1 , dan E_2 . Di titik $E_0 = (0,0)$ jenis titik kesetimbangannya berupa saddle point bersifat tidak stabil, di $E_1 = (1,0)$ jenis titik kesetimbangannya saddle point bersifat tidak stabil, dan di $E_2 = (0,3774104683 ; 0,1705895317)$ jenis titik kesetimbangannya berupa spiral sink dengan kestabilannya bersifat stabil.

4.3.1.2. Analisis perubahan perilaku dengan mengkontinuasi nilai e di $0,1 < e \leq 0,2809$

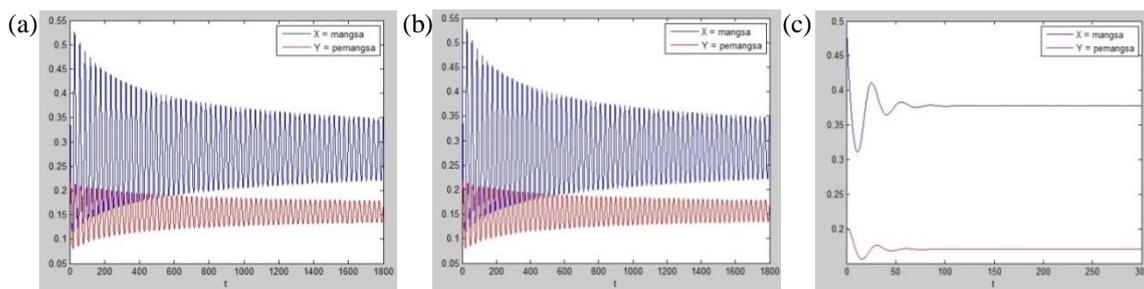


Gambar 4. Potret fase sistem di (a) $e = 0,203$, (b) tepat bifurkasi Transkritikal $e = 0,2808$, (c) $e = 0,28089$

Gambar 4, menjelaskan bahwa ketika $e = 0,203$ terdapat tiga solusi titik kesetimbangan yaitu di $E_0 = (0,0)$ dengan jenis titik kesetimbangan saddle point dan bersifat tidak stabil, di $E_1 = (1,0)$ jenis titik kesetimbangan saddle point dan bersifat tidak stabil. Sedangkan di $E_2 = (0,5848452508 ; 0,1532018872)$ jenis titik kesetimbangannya berupa nodal sink bersifat stabil. Kemudian ketika nilai parameter $e = 0,2808$ yaitu tepat di titik terjadinya bifurkasi transkritikal, titik kesetimbangan E_2 telah menyatu dengan titik kesetimbangan E_1 . Sehingga hanya terdapat dua titik kesetimbangan yaitu di $E_0 = (0,0)$ dengan jenis titik kesetimbangan saddle point dan bersifat tidak stabil, dan di $E_1 = (1,0)$ jenis titik kesetimbangan berupa nodal sink bersifat stabil. Terakhir, ketika nilai parameter $e = 0,2809$, yaitu titik setelah terjadinya bifurkasi transkritikal, hanya memiliki dua titik kesetimbangan yaitu di $E_0 = (0,0)$ dengan jenis titik kesetimbangan saddle point dan bersifat tidak stabil, dan di $E_1 = (1,0)$ jenis titik kesetimbangan berupa nodal sink bersifat stabil. Di titik $e = 0,2809$, tidak memiliki titik kesetimbangan E_2 dikarenakan nilai variabel Y bernilai negatif sehingga tidak memenuhi syarat keberadaan titik kesetimbangan dan hanya dua titik kesetimbangan yang memenuhi syarat yaitu titik E_0 dan E_1 .

4.3.2. Interpretasi secara biologi hubungan perilaku anti pemangsa terhadap populasi mangsa dan pemangsa

4.3.2.1. Perubahan populasi mangsa dan pemangsa ketika $0 < e \leq 0,1$



Gambar 5. Grafik mangsa pemangsa terhadap waktu di (a) $e = 0,00001$, (b) tepat bifurkasi Hopf di $e = 0,000047$, (c) $e = 0,1$

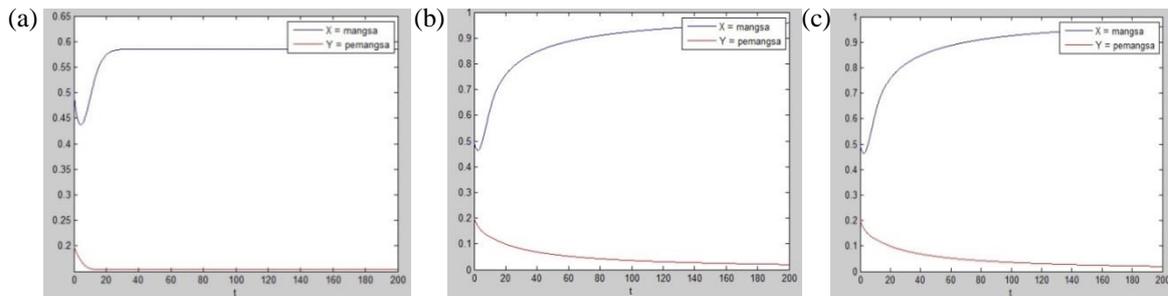
Gambar 5 menjelaskan bahwa populasi mangsa dan populasi pemangsa hidup berdampingan dan tidak mengalami kepunahan sampai t menuju tak hingga, dengan populasi mangsa selalu lebih tinggi dari populasi pemangsa. Di saat $e = 0,00001$ grafik menunjukkan keadaan naik turun yang terjadi secara terus menerus dan tidak pernah menuju kearah stabil, hal ini dikarenakan di saat $e = 0,00001$ terdapat limit cycle yang ditunjukkan pada gambar 3(a) sehingga keadaan ini akan terus menerus terjadi sampai t tak hingga.

Kondisi ketika nilai $e = 0,000047$, grafik menunjukkan keadaan naik turun yang terjadi secara terus menerus menuju kearah stabil ke titik $(0,2807715068 ; 0,1576697067)$ tapi dalam waktu yang sangat

lama. Hal ini sesuai dengan gambar 3(b) di mana gambar menunjukkan bahwa sistem menuju ke satu titik stabil yaitu titik $(0,2807715068 ; 0,1576697067)$.

Sedangkan ketika nilai $e = 0,1$ populasi mangsa dan pemangsa lebih cepat menuju ke arah stabil di titik $(0,3774104683 ; 0,1705895317)$, dengan populasi mangsa lebih besar dari populasi pemangsa. Kondisi ini menjelaskan keadaan sistem pada gambar 3(c). Dalam keadaan ini, ketika populasi mangsa meningkat maka pemangsa juga ikut meningkat, karena sumber makanannya melimpah. Namun ketika populasi mangsa menurun, pemangsa juga ikut menurun diakibatkan sumber makanan yang berkurang.

4.3.2.2. Perubahan populasi mangsa dan pemangsa ketika $0,1 < e \leq 0,2809$



Gambar 6. Grafik mangsa pemangsa terhadap waktu di (a) $e = 0,203$, (b) tepat bifurkasi Traskritikal di $e = 0,2808$, (c) $e = 0,2809$

Gambar 6(a) merupakan bentuk interpretasi dari sistem pada gambar 4(a) ketika nilai parameter perilaku anti pemangsa $e = 0,203$ ($e < 0,2808$). Dari gambar terlihat bahwa populasi mangsa dan pemangsa lebih cepat menuju ke arah stabil ke titik $(0,5848452508 ; 0,1532018872)$, dengan populasi mangsa lebih tinggi dibandingkan populasi pemangsa. Selain itu dapat dilihat pula bahwa populasi mangsa dan pemangsa dapat hidup secara berdampingan sampai waktu t menuju tak hingga.

Ketika nilai $e = 0,2808$, pada gambar 6(b) bentuk interpretasi dari sistem pada gambar 4(b) dapat dilihat bahwa populasi pemangsa menurun menuju kepunahan seiring bertambahnya t , sedangkan populasi mangsa meningkat menuju ke ambang batas daya tampung lingkungan. Selanjutnya ketika nilai $e > 0,2808$, bentuk interpretasi dari sistem pada gambar 4(c) dapat dilihat bahwa populasi pemangsa terus mengalami penurunan ke arah negatif, di mana secara biologi tidak memiliki makna, dikarenakan suatu populasi tidak mungkin bernilai negatif.

5. Simpulan

Dari model interaksi mangsa pemangsa dengan fungsi respon rasio dependent Holling tipe II dan perilaku anti pemangsa yang telah dibahas diatas, diperoleh tiga titik kesetimbangan yaitu $E_0 = (0,0)$, $E_1 = (1,0)$ dan $E_2 = \left(\frac{(gp-gd-p)}{ge-p}, \frac{-(gp-gd-p)(p-d-e)}{(ge-p)(ge-d-e)} \right)$. Selanjutnya dengan mengkontinuasi nilai parameter perilaku anti pemangsa, diperoleh bahwa terdapat bifurkasi transkritikal dan bifurkasi Hopf pada sistem. Selain itu diketahui bahwa semakin tinggi nilai e , menunjukkan perilaku anti pemangsanya juga tinggi, menyebabkan populasi pemangsa semakin cepat menuju kepunahan, sedangkan populasi mangsa akan tetap ada dan tumbuh sampai ambang batas daya tampung lingkungan. Namun sebaliknya, ketika perilaku anti pemangsanya kecil, maka populasi mangsa dan pemangsa dapat hidup berdampingan sampai t menuju tak hingga dengan populasi mangsa selalu lebih besar dari populasi pemangsa.

Daftar Pustaka

- Arditi, R., & Ginzburg, L. R. (1989). Coupling in Predator-Prey Dynamics: Ratio-Dependence. *Journal of Theoretical Biology*, 139, 311–326.
- Bandyopadhyay, M., & Chattopadhyay, J. (2005). Ratio-Dependent Predator-Prey Model: Effect of Environmental Fluctuation and Stability. *Nonlinearity*, 18(2), 913–936.

- Banerjee, M. (2010). Self-Replication of Spatial Patterns in a Ratio-Dependent Predator-Prey Model. *Mathematical and Computer Modelling*, 51(1–2), 44–52.
- Chen, L., Li, Y., & Xiao, D. (2011). Bifurcations in a Ratio Dependent Predator-Prey Model with Prey Harvesting. *Mathematics Quarterly*, 19(4), 293–318.
- Dawes, J. H. P., & Souza, M. O. (2013). A Derivation of Holling's Type I, II and III Functional Responses in Predator-Prey Systems. *Journal of Theoretical Biology*, 327, 11–22.
- Tang, B., & Xiao, Y. (2015). Bifurcation Analysis of a Predator-Prey Model with Anti-Predator Behaviour. *Chaos, Solitons and Fractals*, 70(1), 58–68.