UJM 2 (1) (2013)
UNNES Journal of Mathematics
http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujm

APLIKASI INTEGRAL LIPAT DUA DALAM PERHITUNGAN VOLUME BANGUN RUANG DI R^3 DENGAN MENGGUNAKAN PROGRAM *MAPLE*

Reni Panca Andri Astatik ✉ , Wuryanto, Masrukan

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 lantai 1 Kampus Sekaran, Gunungpati, Semarang, 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Januari 2013
Disetujui Februari 2013
Dipublikasikan Mei 2013

Keywords:
Double integral
The Volume-up Space
Maple

Abstrak

Integral lipat dua dalam proses perhitungan volume bangun ruang di ruang berdimensi tiga (R^3) membutuhkan sebuah ketelitian, oleh karena itu diperlukan alat atau sarana yang dapat membantu dan mengecek proses kebenarannya, sehingga nantinya dapat diperoleh hasil yang cepat, tepat dan akurat. Dalam menggambarkan bangun ruang di R^3 yang akan dihitung juga diperlukan pula sarana untuk memperlihatkan plot gambarnya. Salah satu cara yaitu dengan membuat program aplikasi dengan komputer. *Maple* merupakan salah satu dari beberapa software yang merupakan aplikasi komputer yang dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai persoalan matematika seperti integral lipat dua. Perhitungan volume bangun ruang di R^3 dengan integral lipat dua dapat menggunakan dua cara, yaitu sistem koordinat kartesius dan sistem koordinat kutub. Bangun ruang yang akan dihitung harus disketsakan dalam R^3 terlebih dahulu, selanjutnya juga harus ditentukan daerah integrasi dan fungsi yang diintegrasikannya.

Abstract

Double integral in the process of calculating the volume-up space in three-dimensional (R^3) requires a precision, and therefore needed a tool or a tool that can help and check the truth in the calculation, so that later results can be obtained quickly and accurately. In describing the wake space is also required to be counted also shows a plot of the means for drawing. One way is to create a computer application program. *Maple* is one of the few software which is a computer application that can be used to solve various mathematical problems such as double integrals. The calculation of the volume-up space in R^3 with the double integral can be used two ways, namely rectangular coordinate system and polar coordinates. Build the room to be counted must described in R^3 first, then the area must also be determined that the integration and function integration.

✉ Alamat korespondensi:
E-mail: pancareni@ymail.com

ISSN 2252-6943

Pendahuluan

Proses perkembangan dan kemajuan dunia modern saat ini tidak bisa dipisahkan dari matematika. Penggunaan matematika dalam bidang teknologi informasi dan komunikasi dewasa ini dilandasi oleh perkembangan matematika yang menitikberatkan pada perbedaan aspek–aspek teori. Dari sudut pandang adanya macam–macam aspek teori tersebut, ilmu matematika memperlebar cakupan pemahamannya pada beberapa cabang, seperti matematika analisis, statistik, dan pemrograman (Parzynski & Zipse, 1982).

Salah satu yang termasuk dalam matematika analisis adalah teori integral. Teori integral masih tetap berkembang seperti ilmu-ilmu lainnya baik dari segi teori maupun pemakainya. Terdapat dua konsep integral, yaitu integral tak tentu dan integral tentu. Integral tentu satu variabel, dapat digunakan untuk mendefinisikan dan menghitung integral lipat dua dari fungsi dua variabel (Prayudi, 2009).

Integral lipat dua dalam proses perhitungan volume bangun ruang di membutuhkan sebuah ketelitian, oleh karena itu diperlukan alat atau sarana yang dapat membantu dan mengecek proses kebenaran dalam perhitungan, sehingga nantinya dapat diperoleh hasil yang cepat, tepat dan akurat. Selain itu diperlukan pula sarana untuk menggambarkan bangun ruang di yang akan dihitung. Salah satu cara yaitu dengan membuat program aplikasi dengan komputer.

Maple merupakan salah satu dari beberapa *software* (perangkat lunak) yang merupakan aplikasi komputer yang dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai persoalan matematika. *Maple* berjalan pada sistem operasi keluarga *Windows* dan cukup mudah untuk digunakan. Dengan menggunakan program ini, berbagai persoalan matematika baik berupa masalah aritmatika, aljabar, trigonometri maupun kalkulus dapat diselesaikan.

Dalam penelitian ini akan membahas makna integral lipat dua atas suatu daerah tetutup D dan aplikasi integral lipat dua dalam menghitung volume bangun ruang di R^3 yang akan diselesaikan dengan cara manual dan *Maple*.

Berdasarkan latar belakang yang dikemukan di atas, maka yang akan menjadi rumusan permasalahannya adalah (1) Apakah makna dari integral lipat dua atas suatu daerah tertutup *D*, (2) Bagaimanakah aplikasi integral lipat dua dalam perhitungan volume bangun ruang di R^3, (3) Bagaimanakah aplikasi integral lipat dua dalam perhitungan volume bangun ruang di R^3 dengan menggunakan program *Maple*.

Tujuan dari penelitian ini adalah (1) Mengetahui makna dari integral lipat dua atas suatu daerah tertutup *D*, (2) Mengetahui aplikasi integral lipat dua dalam perhitungan volume bangun ruang di R^3, (3) Mengetahui aplikasi integral lipat dua dalam perhitungan volume bangun ruang di R^3 dengan menggunakan program *Maple*.

Metode

Metode penelitian memegang peranan yang sangat penting dalam pencapaian tujuan penelitian yang telah ditetapkan agar penelitian dapat berjalan lancar. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka. Studi pustaka merupakan penelaahan sumber pustaka yang relevan digunakan untuk mengumpulkan data maupun informasi yang diperlukan dalam penelitian. Studi pustaka diawali dengan mengumpulkan sumber pustaka yang berupa buku-buku yang membahas mengenai integral lipat dua, bangun ruang di R^3 dan program *Maple*.

Hasil dan Pembahasan

Integral lipat dua dari fungsi $z = f(x, y)$ pada daerah persegi panjang tertutup D menurut Martono (1990) didefinisikan sebagai limit jumlah Riemann (bila limitnya ada) dan ditulis dengan lambang

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(p_i, q_j)\Delta x_i \Delta y_j$$

Bentuk ini dapat diintepretasikan bahwa integral f merupakan jumlah dari perkalian f nilai dengan daerah persegi panjang kecil berukuran $(\Delta x_i , \Delta y_j)$. Selanjutnya dalam integral lipat dua pada daerah sebarang dilakukan perluasan dari fungsi f yang terdefinisi pada daerah D . Misalkan fungsi F merupakan perluasan dari fungsi semula yang terdefinisi pada daerah persegi panjang tertutup P dengan persamaannya adalah sebagai berikut.

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y), \text{bila } (x,y)\in D \\ 0 \quad\quad , \text{bila } (x,y)\notin D \end{cases}.$$

Kemudian dilakukan pengintegralan fungsi baru tersebut terhadap suatu daerah persegi panjang P yang cukup besar dan memuat daerah D . Maka intepretasinya sebagai berikut. Misalkan $f(x,y)\geq 0$ untuk setiap $(x,y)\in D$. Dengan demikian integral lipat dua dari fungsi f adalah volume benda pejal yang terletak di bawah permukaan $z=f(x,y)$ dan di atas daerah D . Jadi integral lipat dua dari fungsi f atas daerah sebarang D didefinisikan sebagai integral lipat dua dari fungsi f terhadap P .Hal ini merupakan kunci pemodelan masalah fisis ataupun lainnya dalam bentuk integral lipat dua. Salah satu pemakaian integral lipat dua perhitungan volume suatu benda, misalnya volume bangun ruang di R^3 . Berikut ini adalah pemakaian integral lipat dua dalam pembuktian rumus volume bola.

Bila jari-jari bola adalah a , maka volume bola dirumuskan sebagai berikut.

$$V=\frac{4}{3}\pi a^3$$

Bukti:

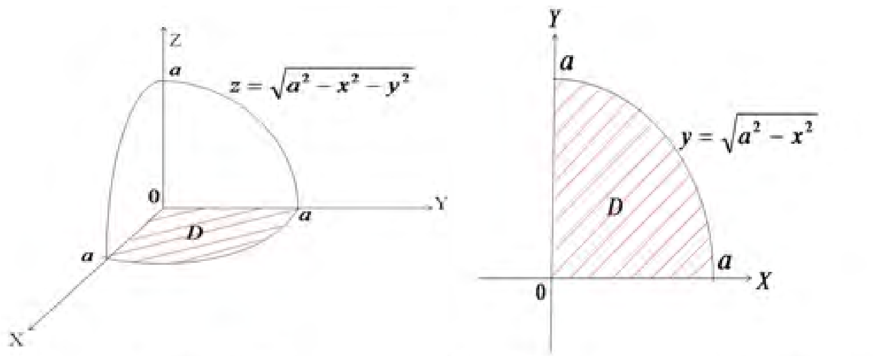
Dalam ruang berdimensi tiga, permukaan bola dengan pusat $(0,0,0)$ dan jari-jari a mempunyai persamaan $x^2+y^2+z^2=a^2$. Permukaan bola yang terletak di atas bidang XOY dapat ditampilkan sebagai fungsi

$$z=f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

Volume bola bila berada di oktan pertama adalah seperdelapan volume bola keseluruhan, sehingga volume bola dapat dinyatakan sebagai

$$V=8\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dA$$

dimana D adalah seperempat cakram lingkaran berjari-jari a . Berikut adalah gambar permukaan beserta daerah pengintegralannya seperti yang terlihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Permukaan $z=f(x,y)$ dan daerah pengintegralannya

Dalam perhitungan volume bola digunakan dua cara yaitu dengan sistem koordinat kartesius dan sistem koordinat kutub.

Cara pertama: Menggunakan sistem koordinat kartesius**.**

Jelas $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leq x\leq a, 0\leq y\leq\sqrt{a^2-x^2}\right\}$.

Jadi volume bolanya adalah

$$V=8\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy\,dx$$

Bila disubstitusikan $y=\sqrt{a^2-x^2}$ diperoleh $\frac{dy}{d\theta}=\sqrt{a^2-x^2}\cos\theta$ sehingga $dy=\sqrt{a^2-x^2}\cos\theta\,d\theta$.

Untuk $y=0$ diperoleh $\theta=0$ dan untuk $y=\sqrt{a^2-x^2}\sin\theta$ diperoleh $\theta=\frac{\pi}{2}$.

Dengan hasil yang diperoleh di atas, maka volume bola yang dicari adalah sebagai berikut.

$$V = 8\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\; dy\, dx$$

$$= 8\int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a^2-x^2)-\left(\sqrt{a^2-x^2}\sin\theta\right)^2}\; \sqrt{a^2-x^2}\cos\theta\, d\theta\, dx$$

$$= 8\int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a^2-x^2)-(a^2-x^2)\sin^2\theta}\; \sqrt{a^2-x^2}\cos\theta\, d\theta\, dx$$

$$= 8\int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a^2-x^2)(1-\sin^2\theta)}\; \sqrt{a^2-x^2}\cos\theta\, d\theta\, dx$$

$$= 8\int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a^2-x^2)\cos^2\theta}\; \sqrt{a^2-x^2}\cos\theta\, d\theta\, dx$$

$$= 8\int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-x^2}\cos\theta\; \sqrt{a^2-x^2}\cos\theta\, d\theta\, dx$$

$$= 8\int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 \cos^2\theta\, d\theta\, dx$$

$$= 8\int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2-x^2)\cos^2\theta\, d\theta\, dx$$

$$= 8\int_0^a (a^2-x^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta\, dx$$

$$= 8\int_0^a (a^2-x^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)d\theta\, dx$$

$$= 8\int_0^a \frac{1}{2}(a^2-x^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)\, d\theta\, dx$$

$$= 8\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^a (a^2-x^2)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta\, d\theta\right] dx$$

$$= 4\int_0^a (a^2-x^2)\left[\,[\,\theta\,]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta\, d(2\theta)\right] dx$$

$$= 4\int_0^a (a^2-x^2)\left[\left(\frac{\pi}{2}-0\right) + \frac{1}{2}[\,\sin\, 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}\right] dx$$

$$= 4\int_0^a (a^2-x^2)\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\sin\,\pi - \sin\, 0)\right] dx$$

$$= 4\int_0^a (a^2-x^2)\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(0-0)\right] dx$$

$$= 4\int_0^a (a^2-x^2)\left[\frac{\pi}{2} + 0\right] dx$$

$$= 4\int_0^a (a^2-x^2)\frac{\pi}{2} dx$$

$$= 4\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_0^a (a^2-x^2)\, dx$$

$$= 2\pi\left[\, a^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a$$

$$= 2\pi\left[\left(a^2a - \frac{1}{3}a^3\right) - \left(a^2 0 - \frac{1}{3}0^3\right)\right]$$

$$= 2\pi\left[\left(a^3 - \frac{1}{3}a^3\right) - 0\right]$$

$$= 2\pi\left(a^3 - \frac{1}{3}a^3\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{2}{3}a^3\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Dengan menggunakan sistem koordinat kartesius di atas, maka diperoleh volume bolanya adalah $\frac{4}{3}\pi a^3$.

Cara kedua: Menggunakan sistem koordinat kutub.

Transformasi permukaan bola yang terletak di atas bidang XOY ke koordinat kutub dengan dimisalkan $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$.
Dalam sistem ini, daerah D dapat ditulis sebagai

$$D = \left\{ (r,\theta) \,\middle|\, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\, 0 \le r \le a \right\}$$

dan permukaan $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ berubah menjadi $z = \sqrt{a^2 - r^2}$.
Dengan hasil yang diperoleh di atas, maka volume bola yang dicari adalah sebagai berikut.

$$V = 8\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\; dA$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \sqrt{a^2-r^2}\; r\, dr\, d\theta$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a -\frac{1}{2}\sqrt{a^2-r^2}\; d\left(a^2-r^2\right) d\theta$$

$$= 8\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\left(a^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^a d\theta$$

$$= -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}\left[\left(a^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a d\theta$$

$$= -4\left(\frac{2}{3}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(a^2 - r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a d\theta$$

$$= -\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(a^2 - a^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(a^2 - 0^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]d\theta$$

$$= -\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(0)^{\frac{3}{2}} - \left(a^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]d\theta$$

$$= -\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\left(a^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]d\theta$$

$$= -\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} -a^3\, d\theta$$

$$= -\frac{8}{3}\left(-a^3\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, d\theta$$

$$= -\frac{8}{3}\left(-a^3\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, d\theta$$

$$= \frac{8}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, d\theta$$

$$= \frac{8}{3}a^3\,[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{8}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$$

$$= \frac{8}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Dengan menggunakan sistem koordinat kutub di atas, maka diperoleh volume bolanya adalah $\frac{4}{3}\pi a^3$.

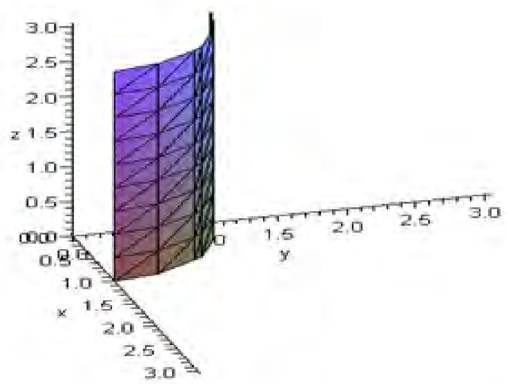
Berdasarkan hasil yang diperoleh dengan menggunakan sistem koordinat kartesius dan sistem koordinat silinder di atas, maka terbukti bahwa volume bola dengan jari-jari a adalah $\frac{4}{3}\pi a^3$.

Dengan pembuktian rumus volume bola yang telah dijelaskan, maka dapat dibuktikan untuk volume bangun ruang yang lain seperti tabung, kerucut dan elipsoida.

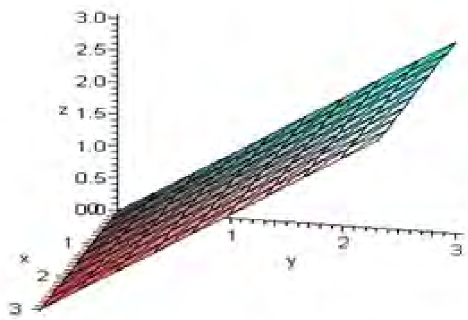
Salah satu aplikasi integral lipat dua adalah untuk menghitung volume suatu benda pejal. Berikut ini akan dibahas mengenai contoh soal aplikasi integral lipat dua yang akan diselesaikan dengan cara manual dan pengaplikasiannya dengan *Maple*.

Akan dicari volume benda pejal yang dibatasi oleh silinder $x^2 + y^2 = 1$ dan bidang-bidang $y = z$, $x = 0$, $z = 0$ di oktan pertama.

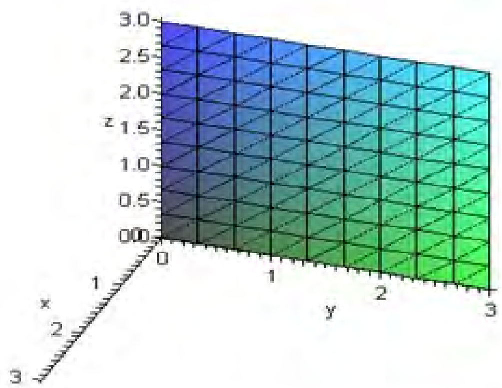
Berikut adalah gambar silinder $x^2 + y^2 = 1$ dan bidang-bidang $y = z$, $x = 0$, $z = 0$ di oktan pertama dengan menggunakan *Maple*.



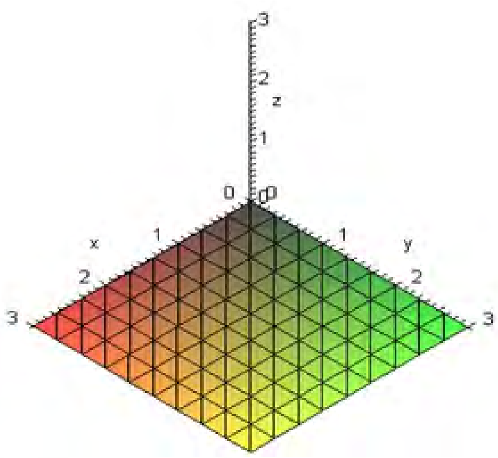
Gambar 2. Permukaan Silinder $x^2 + y^2 = 1$ di Oktan Pertama



Gambar 3. Permukaan Bidang $y = z$ di Oktan Pertama

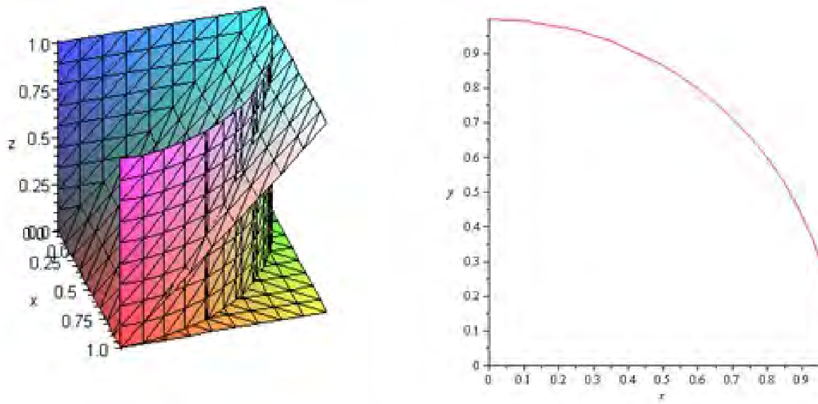


Gambar 4. Permukaan Bidang $x = 0$ di Oktan Pertama



Gambar 5. Permukaan Bidang $z = 0$ di Oktan Pertama

Berikut adalah gambar benda pejal yang dibatasi oleh silinder $x^2+y^2=1$ dan bidang-bidang $y=z$, $x=0$, $z=0$ di oktan pertama dan daerah pengintegralan dengan menggunakan *Maple* (lihat Gambar 6).



Gambar 6. Benda pejal yang dibatasi oleh silinder $x^2+y^2=1$ dan bidang-bidang $y=z$, $x=0$, $z=0$ di oktan pertama dan daerah pengintegralan D

Pada permasalahan ini, integrannya adalah

$$z=f(x,y)=y$$

dan daerah D pengintegralan yang berbentuk cakram seperempat lingkaran berjari-jari 1 satuan di oktan pertama, yang dapat ditulis sebagai

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}$$

Jadi volume benda pejalnya dapat dinyatakan sebagai

$$V=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\,dx$$

Dengan cara manual maka volume benda pejalnya adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
V&=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\,dx\\
&=\int_0^1\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}dx\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1\left[y^2\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}dx\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2-(0)^2\right]dx\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\right]dx\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-x^2\right)dx\\
&=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1\\
&=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}(1)^3\right)-\left(0-\frac{1}{3}(0)^3\right)\right]\\
&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}(1)^3\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{3}-\frac{1}{3}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)\\
&=\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan *Maple* maka diperoleh volume benda pejalnya adalah sebagai berikut.

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\,dx=\frac{1}{3}$$

Berdasarkan cara yang diperoleh dengan cara manual dan menggunakan *Maple*, maka volume benda pejal yang ditanyakan adalah $\frac{1}{3}$ satuan.

simpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dijelaskan, maka disimpulkan bahwa integral lipat dua dapat digunakan untuk membuktikan volume bangun ruang di R^3 seperti bola, tabung, kerucut dan elipsoida. Selanjutnya selain menggunakan cara manual, aplikasi integral lipat dua dalam perhitungan volume bangun ruang di R^3 dapat menggunakan program *Maple*.

Ucapan terimakasih

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah ikut membantu dalam penyelesaian artikel ini, terlebih terutama kepada Drs. Wuryanto, M.Si. dan Dr. Masrukan, M.Si.

Daftar Pustaka

Martono, K. 1990. Kalkulus Integral Lipat Dua (Edisi Kedua). Bandung: Institut Teknologi Bandung

Parzynski & Zipse. 1982. Introduction to Mathematical Analysis. New York: Mc Grow–Hill Book Company.

Prayudi. 2009. Kalkulus Lanjut Fungsi Banyak Variabel & Penerapannya. Yogyakarta: Graha Ilmu