

## MODEL MATEMATIKA UNTUK PENYAKIT DIABETES TANPA FAKTOR GENETIK

N. Ardiansah<sup>✉</sup>, M. Kharis

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Semarang, Indonesia

### Info Artikel

*Sejarah Artikel:*  
Diterima 16 Februari 2012  
Disetujui 29 Maret 2012  
Dipublikasikan April 2012

*Keywords:*  
Diabetes  
Mathematic Model  
SEI

### Abstrak

Diabetes mellitus merupakan salah satu penyakit yang banyak diderita penduduk dunia termasuk Indonesia dan sampai saat ini belum ditemukan pengobatan yang efektif untuk menyembuhkan penyakit tersebut. Penyakit ini merupakan suatu penyakit metabolisme yang mempunyai karakteristik *hyperglycemia* akibat dari cacat pada sekresi insulin, kerja insulin atau keduanya. Insulin memainkan peranan penting dalam menyebarkan glukosa ke sel-sel, merangsang system enzim untuk merubah glukosa menjadi glikogen, memperlambat proses glukoneogenesis, mengatur proses lipogenesis, dan mendorong sintesa protein dan pertumbuhan tubuh. Dalam tulisan ini akan dikaji model matematika untuk penyakit tidak menular diabetes tanpa adanya faktor genetik. Model matematika yang mengkaji perkembangan penyakit diabetes sudah banyak diteliti oleh beberapa ahli. Dalam artikel ini model yang digunakan berupa model matematika berbentuk SEI yang merupakan pendekatan untuk kasus ini. Analisa yang dilakukan meliputi penentuan titik ekuilibrium model dan analisisnya terkait kestabilan titik ekuilibrium tersebut. Simulasi diberikan sebagai bentuk pendekatan model terhadap nilai-nilai parameter yang diberikan sebagai bentuk pengecekan terhadap hasil analisis yang dilakukan. Diharapkan hasil kajian ini dapat bermanfaat dalam penanggulangan peningkatan jumlah penderita diabetes yang bersumber pada orang-orang yang memiliki kebiasaan buruk dan berat badan berlebihan.

### Abstract

*Many People in the world, including Indonesian, suffer from diabetes mellitus. So far, there has been no effective medication to treat it. Diabetes is a metabolism problem that has hyperglycemia characteristic due to insulin secretion or insulin work disability or both. Insulin hold an important roles such as to transfer the glucose in cells, stimulate enzyme system to change glucose to glycogen, slow up gluconeogenesis, control lipogenesis process, and encourage protein synthesis and body growth. This research analyzed the SEI mathematic model for non communicable disease such as diabetes mellitus which occur without any genetic factor. The analysis involved determining the model and analysis of equilibrium point related to the stability of its equilibrium point. The simulation was done to check the analysis based on the parameter value of the model approach. From this research it is expected that this research result can be useful to reduce the number of diabetes mellitus patient especially due to the effect of bad habit and overweight.*

© 2012 Universitas Negeri Semarang

<sup>✉</sup> Alamat korespondensi:  
Gedung D7 Lantai 1 FMIPA Unnes  
Kampus Sekaran, Gunungpati, Semarang, Indonesia 50229  
E-mail: [nurul.ardiasah89@gmail.com](mailto:nurul.ardiasah89@gmail.com)

## Pendahuluan

Era globalisasi membawa pengaruh yang sangat besar tidak hanya dalam bidang ekonomi tetapi juga dalam bidang lainnya salah satunya kesehatan. Info-info terkait kesehatan dapat diperoleh dari berbagai sumber *online* yang beberapa merupakan sumber yang dapat dipercaya. Masyarakat semakin sadar akan pentingnya perilaku kehidupan yang sehat. Masyarakat semakin meningkat perhatiannya terhadap penyakit yang tidak menular. Hal ini dikarenakan semakin meningkatnya frekuensi kejadian penyakit tersebut di masyarakat. Dari sepuluh penyebab utama kematian salah satunya adalah penyakit diabetes mellitus (DM) yang merupakan jenis penyakit tidak menular, keadaan ini terjadi baik di negara maju maupun negara berkembang maupun negara dengan ekonomi rendah. Hal ini disebabkan adanya perkembangan sosioekonomi dan kultural bangsa sehingga dunia dituntut untuk memberikan perhatian yang lebih kepada penyakit tidak menular, yang sudah mulai meningkat sesuai dengan perkembangan masyarakat. Oleh karena ini masyarakat perlu diberikan pengetahuan tentang penyakit tidak menular dengan melihat kecenderungan semakin meningkatnya prevalensi penyakit tidak menular dalam masyarakat, termasuk kalangan masyarakat Indonesia. Bangsa Indonesia yang sedang mengembangkan dirinya dari suatu negara agraris menuju masyarakat industri membawa kecenderungan baru dalam pola penyakit dalam masyarakat. Perubahan pola struktur masyarakat agraris ke masyarakat industri banyak memberi andil terhadap perubahan pola fertilitas, gaya hidup dan sosial ekonomi, yang pada gilirannya dapat memicu peningkatan penyakit tidak menular seperti diabetes mellitus.

Diabetes mellitus merupakan salah satu penyakit yang banyak diderita penduduk dunia termasuk Indonesia dan sampai saat ini belum ditemukan pengobatan yang efektif untuk menyembuhkan penyakit tersebut. Diabetes mellitus merupakan suatu penyakit metabolisme yang mempunyai karakteristik *hyperglycemia* akibat dari cacat pada sekresi insulin, kerja insulin atau keduanya. *Hyperglycemia* pada diabetes yang berkepanjangan akan mengakibatkan disfungsi dan kegagalan kerja dari berbagai macam organ terutama mata, ginjal, saraf dan jaringan darah. Diabetes merupakan kondisi di mana tubuh tidak dapat dengan tepat menggunakan energi dari makan

yang dimakan (Adewale *et al.* 2007). Makanan merupakan tahapan awal masuknya glukosa ke dalam plasma darah. Zat dari bahan makanan, yaitu karbohidrat, protein, vitamin, lemak, dan mineral ditambahkan ke darah melalui sistem hepatik berpori (*hepatic porous system*). Dalam proses metabolisme bahan karbohidrat, protein dan lemak akan diubah menjadi glukosa dan selanjutnya dikonversi menjadi energi (Goel & Statry dalam Rao *et al.* 2011).

Dalam Rao *et al.* (2011) dinyatakan bahwa insulin memainkan peranan penting dalam menyebarkan glukosa ke sel-sel, merangsang sistem enzim untuk merubah glukosa menjadi glikogen, memperlambat proses glukoneogenesis, mengatur proses lipogenesis, dan mendorong sintesa protein dan pertumbuhan tubuh. Dalam Stahl & Johansson (2009) disebutkan bahwa diabetes mellitus adalah penyakit yang dicirikan dengan ketidakmampuan pankreas menghasilkan insulin yang cukup. Diabetes mellitus disebabkan karena hormon insulin yang tidak mencukupi/tidak efektif sehingga tidak dapat bekerja secara normal. Insulin mempunyai peran utama mengatur kadar glukosa di dalam darah 60-120 mg/dl waktu puasa, dan <140 mg/dl pada 2 jam sesudah makan. Sekali menderita diabetes mellitus seumur hidup akan menderita penyakit tersebut, berarti jumlah penderita diabetes mellitus tidak akan berkurang kecuali dengan kematian (WHO dalam Kaban 2007).

Penyakit diabetes mellitus merupakan penyakit keturunan, meskipun demikian tidak berarti penyakit ini pasti menurun pada anak. Walaupun kedua orang tuanya menderita diabetes mellitus, kadang-kadang anaknya tidak ada yang menderita diabetes mellitus. Namun, apabila dibandingkan dengan kedua orang tua yang tidak menderita diabetes mellitus, jelas penderita diabetes mellitus lebih cenderung mempunyai anak yang menderita penyakit diabetes mellitus. Selain itu penyakit diabetes mellitus juga mudah menyerang pada individu yang berbadan besar (kegemukan) dengan gaya hidup tinggi (Misnadiarly 2006).

Menurut Mc.Carthy & Zimmet (1997) dalam Kaban (2007), bahwa estimasi jumlah penderita diabetes mellitus di dunia dari tahun 1994 ke tahun 2010 akan melonjak dua kali lipat yaitu dari 111,4 juta menjadi 239,3 juta. Di Indonesia diperkirakan tahun 2000 penderita diabetes mellitus mencapai 5,6 juta dengan asumsi prevalensi 4,6% dan perkiraan penduduk di atas usia 20 tahun sebanyak 125 juta orang dan tahun 2020 diperkirakan 8,2 juta dari 178 juta penduduk di atas 20 tahun menderita diabetes

mellitus.

Laporan terbaru yang dirilis oleh Organisasi Kesehatan Dunia dan Federasi Diabetes Internasional sungguh mengkhawatirkan. Pada 2003, diperkirakan bahwa 194 juta orang menderita diabetes, mewakili prevalensi global melebihi 3% (5,1% untuk mereka yang berusia 20 ke 79) dari total populasi dunia. Trennya meningkat dan jumlah ini diperkirakan akan mencapai 333 juta (6,3%) pada tahun 2025. Selain itu, diperkirakan 314 juta (8,2%) merupakan orang-orang yang berada di tahap pra diabetes yang setidaknya sepertiga akan berkembang ke tahap diabetes setelah 10 tahun (Boutayeb *et al.* 2004). Penelitian epidemiologi di Indonesia di dapat angka prevalensi sebesar 1,5-2,3% pada penduduk usia lebih dari 15 tahun. Di Manado angka prevalensi diabetes mellitus sebesar 6,1%. Di Jakarta tahun 1993 menunjukkan prevalensi 5,7%. Menurut penelitian Arifin (1995) dalam Kaban (2007) di Kecamatan Singaparna Jawa Barat didapat prevalensi diabetes mellitus sebesar 1,1%.

Model matematika yang mengkaji perkembangan penyakit diabetes sudah banyak diteliti oleh beberapa ahli. Beberapa artikel mengkaji perkembangan penyakit dalam kajian mikro yaitu dalam tubuh individu terutama dalam darah. Adewale *et al.* (2007) dan De Gaetano *et al.* (2008) mengkaji model keterkaitan antara glukosa dan insulin dalam darah pada suatu individu. Boutayeb *et al.* (2004) mengkaji model penyebaran diabetes pada populasi manusia dengan membagi populasi menjadi dua kelas yaitu kelas individu yang diabetes dengan komplikasi dan kelas individu yang tanpa komplikasi. Rao *et al.* (2011) mengkaji model stokastik level glukosa dalam darah.

Dalam tulisan ini akan dikaji model matematika perkembangan penyakit diabetes mellitus dalam suatu populasi manusia. Dalam model ini populasi manusia dibagi dalam 3 kelas yaitu *Susceptible*, *Exposed*, dan *ILL*. Individu normal (belum terkena diabetes) dimasukkan dalam kelas *Susceptible* (populasi rentan), individu yang memiliki kebiasaan buruk, penurunan hormon insulin dan peningkatan glukosa darah dimasukkan dalam kelas *Exposed* (populasi laten) dan penderita penyakit diabetes mellitus dimasukkan dalam kelas *ILL* (populasi sakit). Model matematika yang dibentuk adalah SEI hal ini dikarenakan penyakit diabetes tidak dapat disembuhkan maka tidak ada individu yang sembuh dari penyakit.

## Hasil dan Pembahasan

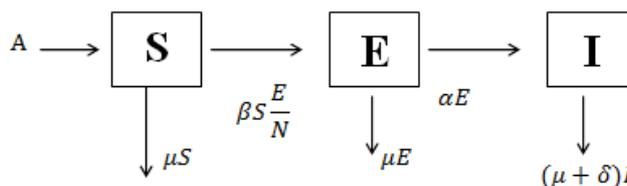
Diabetes muncul lantaran hormon insulin yang dikeluarkan oleh sel-sel beta dari pulau langerhans (struktur dalam pankreas yang bertugas mengatur kadar gula dalam darah) tidak lagi bekerja normal. Akibatnya, kadar gula dalam darah meninggi. Bila keadaan ini berlanjut dan melewati ambang batas ginjal, zat gula akan dikeluarkan melalui air seni.

Sejauh ini dikenal dua kelompok penderita diabetes yakni mereka yang terkena sejak kecil, remaja dan mereka yang terkena ketika sudah dewasa (kebanyakan usia 40 tahun ke atas). Munculnya penyakit ini disebabkan oleh beberapa faktor yang memicu meningkatnya kadar gula dalam darah seperti faktor keturunan, kegemukan (obesitas) yang biasanya terjadi pada usia 40 tahun, tekanan darah tinggi, angka *triglycerid* (salah satu jenis molekul lemak) yang tinggi, level kolesterol yang tinggi, gaya hidup modern atau gaya hidup kurang sehat yang cenderung mengkonsumsi makanan instan, merokok dan stress, terlalu banyak mengkonsumsi karbohidrat, dan kerusakan pada sel pankreas. Menurut Amstrong (dalam Nugraheni 2003) faktor-faktor yang mempengaruhi gaya hidup individu ada 2 faktor yaitu faktor internal dan faktor eksternal, salah satu faktor eksternal yaitu individu yang ada di sekitar atau lingkungan sosial.

Diabetes memang penyakit yang tidak bisa disembuhkan, namun dengan perawatan yang baik setiap penderita dapat menjalani kehidupannya secara normal. Selain itu penyakit diabetes juga tidak dapat ditularkan kepada individu lain karena penyakit ini merupakan jenis penyakit degenerative.

Dari fakta yang diperoleh selanjutnya diberikan asumsi-asumsi dalam pembentukan model. Asumsi-asumsi digunakan untuk membatasi dan memperjelas model yang akan dibentuk. Berikut asumsi-asumsi yang dibuat dalam pembentukan modelnya. (1) *Rekrutmen* masuk kelas S dengan laju konstan. (2) Laju kematian alami setiap kompartemen sama. (3) Terjadi kematian karena penyakit. (4) Tidak ada proses penambahan hormon insulin. (5) Individu yang telah sakit tidak dapat disembuhkan. (6) Faktor keturunan diabaikan. (7) Individu yang mempunyai kebiasaan buruk, obesitas dan penurunan hormon insulin masuk kelas E.

Model yang mendekati fakta-fakta yang ada dan asumsi yang diberikan adalah Model SEI.



**Gambar 1.** Diagram transfer model matematika pada penyakit DM

Diagram transfernya diberikan pada Gambar 1.

Nilai-nilai  $S(t)$ ,  $E(t)$  dan  $I(t)$  masing-masing menyatakan jumlah individu yang rentan, laten dan sakit saat  $t$ . Dengan parameter-parameter yang digunakan sebagai berikut. Parameter  $A$  menyatakan laju *rekrutmen* pada populasi.  $\beta$  laju kontak infeksi individu yang rentan dengan individu yang laten.  $\mu$  menyatakan laju kematian alami pada tiap kompartemen.  $\alpha$  menyatakan laju perpindahan yang laten menjadi sakit.  $\delta$  menyatakan laju kematian karena penyakit. Semua parameter tersebut bernilai positif.

Model matematika dari diagram transfer di atas merupakan sistem persamaan differensial biasa dengan 4 variabel yaitu  $S, E, I$  dan  $N$ .  $N(t)$  menyatakan jumlah populasi pada saat  $t$ . Sistem persamaan diferensial dari gambar diagram transfer tersebut adalah:

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= A - \left(\mu + \beta \frac{E}{N}\right)S \\ \frac{dE(t)}{dt} &= \beta S \frac{E}{N} - (\mu + \alpha)E(1) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \alpha E - (\mu + \delta)I \\ N(t) &= S(t) + E(t) + I(t) \end{aligned}$$

**Analisa Model**

Dari sistem (1) diperoleh

$$\frac{dN}{dt} = A - \mu N - \delta I$$

Karena  $N=S+E+I$  maka

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d(S+E+I)}{dt} \Leftrightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{dN}{dt} - \frac{dE}{dt} - \frac{dI}{dt}$$

Jadi Sistem (1) ekuivalen dengan Sistem (2) yang lebih sederhana karena variabel berkurang satu dan analisa model dapat menggunakan Sistem (2).

Sistem (2) diberikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \beta(N - E - I) \frac{E}{N} - (\mu + \alpha)E \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \alpha E - (\mu + \delta)I \\ \frac{dN(t)}{dt} &= A - \mu N - \delta I \end{aligned} \tag{2}$$

Titik ekuilibrium diperoleh dengan menjadikan

sistem persamaan pada sistem (2) sama dengan nol. Diperoleh 2 titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan tidak bebas penyakit. Dari persamaan ketiga sistem (2) diperoleh  $A - \mu N - \delta I = 0 \Leftrightarrow N = \frac{A - \delta I}{\mu}$ . Saat  $I = 0$  diperoleh titik ekuilibrium untuk populasi bebas penyakit  $N = \frac{A}{\mu}$  dan untuk  $I > 0$  nilai  $N < \frac{A}{\mu}$  karena untuk  $t \rightarrow \infty$  berlaku  $N(t) \rightarrow N_{eq} \leq \frac{A}{\mu}$ . Jadi diperoleh pembatasan domain sistem pada domain himpunan tertutup,

$$\Gamma = \left\{ (N, E, I) \in \mathbb{R}_+^3 \mid 0 \leq E, I \leq N \leq \frac{A}{\mu} \right\}$$

dengan  $\mathbb{R}_+^3$  menyatakan daerah non negatif di  $\mathbb{R}^3$ . Berikut teorema tentang eksistensi titik ekuilibrium model pada penyakit diabetes mellitus.

**Teorema 1.**

Diberikan  $R_0 = \frac{\beta}{\mu + \alpha}$

Dari sistem persamaan (2) diatas. Berdasarkan nilai tersebut diperoleh

1. Jika  $R_0 \leq 1$  maka sistem (2) hanya mempunyai 1 titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit  $P_0 = (E, I, N) = \left(0, 0, \frac{A}{\mu}\right)$
2. Jika  $R_0 > 1$  maka sistem (2) mempunyai 2 titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit  $P_0 = (E, I, N) = \left(0, 0, \frac{A}{\mu}\right)$  dan titik ekuilibrium tidak bebas penyakit  $P_1 = (E^*, I^*, N^*)$  dengan

$$\begin{aligned} E^* &= \frac{A(\mu + \delta)(\beta - \mu - \alpha)}{\beta\alpha\mu + \beta\mu^2 + \beta\mu\delta + \beta\alpha\delta - \mu\alpha\delta - \alpha^2\delta} & I^* &= \frac{\alpha A(\beta - \mu - \alpha)}{\beta\alpha\mu + \beta\mu^2 + \beta\mu\delta + \beta\alpha\delta - \mu\alpha\delta - \alpha^2\delta} \\ N^* &= \frac{\alpha A(\beta - \mu - \alpha)}{\beta\alpha\mu + \beta\mu^2 + \beta\mu\delta + \beta\alpha\delta - \mu\alpha\delta - \alpha^2\delta} \end{aligned}$$

Bukti :

Titik ekuilibrium dicari dengan membuat

nol  $\frac{dE(t)}{dt}$ ,  $\frac{dI(t)}{dt}$ , dan  $\frac{dN(t)}{dt}$  diperoleh sistem (3) sebagai berikut.

$$\begin{cases} \beta(N - E - I) \frac{E}{N} - (\mu + \alpha)E = 0 \\ \alpha E - (\mu + \delta)I = 0 \\ A - \mu N - \delta I = 0 \end{cases} \tag{3}$$

[B1] Penentuan eksistensi titik ekuilibrium bebas penyakit tidak tergantung dari syarat  $R_0$  sehingga dapat langsung ditentukan dari sistem (3) yaitu dengan membuat  $I=0$  yang disubstitusikan pada persamaan kedua dan ketiga Sistem (3), diperoleh

$$\alpha \cdot E - (\mu + \delta)0 = 0 \Leftrightarrow E = 0$$

$$A - \mu N - \delta \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow N = \frac{A}{\mu}$$

Jadi saat  $I=0$  diperoleh titik ekuilibrium bebas

$$P_0 = (E, I, N) = \left(0, 0, \frac{A}{\mu}\right)$$

Karena penentuan titik ekuilibrium bebas penyakit tidak tergantung dari syarat  $R_0$ , maka sistem (2) pasti mempunyai titik ekuilibrium bebas penyakit untuk segala kondisi  $R_0$ .

[B2] Karena penyakit diabetes bukan merupakan penyakit menular maka akan ditentukan titik ekuilibrium tidak bebas penyakit dengan mencari nilai  $E \neq 0$  dan mensyaratkan  $E > 0$ . Pencarian titik ekuilibrium tidak bebas penyakit menggunakan nilai  $E$  dikarenakan dalam model terdapat perkalian antara  $S$  dengan  $E$ . Dalam pemodelan biologi, perkalian menyatakan interaksi antar individu dalam populasi atau antar populasi. Di fakta juga disebutkan adanya faktor eksternal yang mempengaruhi gaya hidup buruk salah satunya dari teman atau lingkungan sosial yang dalam hal ini bisa dikatakan masyarakat.

Dari persamaan pertama, kedua dan ketiga sistem (3) akan dicari nilai  $E$ . Karena semua persamaan memiliki variabel  $I$  maka semua persamaan menempatkan nilai  $I$  di sebelah kanan, diperoleh nilai  $E$  dan  $N$  berikut ini.

$$E = \frac{(\mu + \delta)I}{\alpha} \text{ dan } N = \frac{A - \delta I}{\mu} \quad (4)$$

Substitusikan ke persamaan ketiga sistem (3) diperoleh nilai  $I=0$  atau

$$I = \frac{\alpha A(\mu - \alpha)(R_0 - 1)}{\beta\mu(\alpha + \mu + \delta) + (\mu - \alpha)(R_0 - 1)\alpha\delta}$$

Untuk  $E \neq 0$ , substitusikan nilai yang diperoleh pada Persamaan (4) maka diperoleh nilai  $E$  dan  $N$  sebagai berikut.

$$E = \frac{A(\mu + \delta)(\mu - \alpha)(R_0 - 1)}{\beta\mu(\alpha + \mu + \delta) + (\mu - \alpha)(R_0 - 1)\alpha\delta}$$

$$N = \frac{A\beta(\alpha + \mu + \delta)}{\beta\mu(\alpha + \mu + \delta) + (\mu - \alpha)(R_0 - 1)\alpha\delta}$$

Jelas  $R_0 > 1 \Leftrightarrow \frac{\beta}{\mu + \alpha} > 1 \Leftrightarrow \beta > \mu + \alpha \Leftrightarrow \beta - \mu - \alpha > 0$ .

Jadi  $E$  dan  $N$  positif apabila  $R_0 > 1$ .

### Teorema 2

Diberikan  $R_0 = \frac{\beta}{\mu + \alpha}$

Dari Sistem (2) di atas. Berdasarkan nilai  $R_0$  tersebut diperoleh

1. Jika  $R_0 < 1$  maka titik ekuilibrium  $P_0$  stabil asimtotik lokal

2. Jika  $R_0 > 1$  maka titik ekuilibrium  $P_0$  tidak stabil dan titik ekuilibrium tidak bebas penyakit  $P_1$  stabil asimtotik lokal

Bukti :

Matriks Jacobian model penyakit diabetes melitus *non factor genetic* adalah

$$J = \begin{pmatrix} c_1 & \frac{-\beta E}{N} & c_2 \\ \alpha & -\mu - \alpha & 0 \\ 0 & -\delta & -\mu \end{pmatrix}$$

dengan

$$c_1 = \frac{\beta N - 2\beta E - \beta I - N(\mu + \alpha)}{N}$$

$$c_2 = \frac{\beta E(E + I)}{N^2} \text{ dan } P = (E, I, N) \in \Gamma.$$

Untuk  $P_0 = (E, I, N) = \left(0, 0, \frac{A}{\mu}\right)$  dan  $P_1 = (E^*, I^*, N^*)$  dengan

$$N^* = \frac{A\beta(\alpha + \mu + \delta)}{\beta\mu(\alpha + \mu + \delta) + (\mu - \alpha)(R_0 - 1)\alpha\delta}, E^* = \frac{A(\mu + \delta)(\mu - \alpha)(R_0 - 1)}{\beta\mu(\alpha + \mu + \delta) + (\mu - \alpha)(R_0 - 1)\alpha\delta}$$

$$N^* = \frac{\alpha A(\mu - \alpha)(R_0 - 1)}{\beta\mu(\alpha + \mu + \delta) + (\mu - \alpha)(R_0 - 1)\alpha\delta}$$

Untuk kasus  $P_0$ , diperoleh semua nilai eigen negatif apabila  $R_0 < 1$  dan ada satu nilai eigen yang positif apabila  $R_0 > 1$ . Dengan kata lain jika  $R_0 < 1$  maka titik ekuilibrium  $P_0$  stabil asimtotik lokal dan jika  $R_0 > 1$  maka titik ekuilibrium  $P_0$  tidak stabil. Saat  $R_0 = 1$ , ada salah satu nilai eigen yang mempunyai bagian real sama dengan nol, artinya titik ekuilibrium  $P_0$  tidak hiperbolik sehingga kesimpulan yang diperoleh saat  $R_0 = 1$  tidak dapat menggambarkan keadaan solusi di sekitar titik  $P_0$  pada Sistem (2).

Untuk kasus  $P_1$ , diperoleh persamaan karakteristiknya  $\lambda^3 + d_1\lambda^2 + d_2\lambda + d_3$  dengan

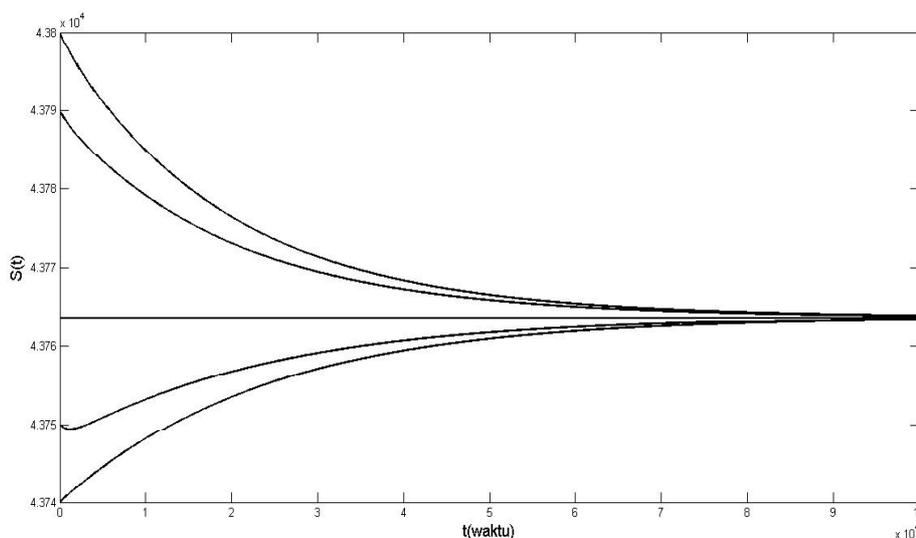
$$d_1 = \frac{\mu(\alpha + \mu)(R_0 + 1) + (2\mu + \beta + \delta)\delta}{\alpha + \mu + \delta}$$

$$d_2 = \frac{1}{\alpha + \mu + \delta}(\mu\delta(\alpha + \mu)(R_0 - 1) + \mu^2(\alpha + \mu)(R_0 - 1) + \mu(1 - \alpha^2) + (\beta - \alpha)(\delta^2 + \mu^2 + 2\mu\delta) - \alpha^2\delta)$$

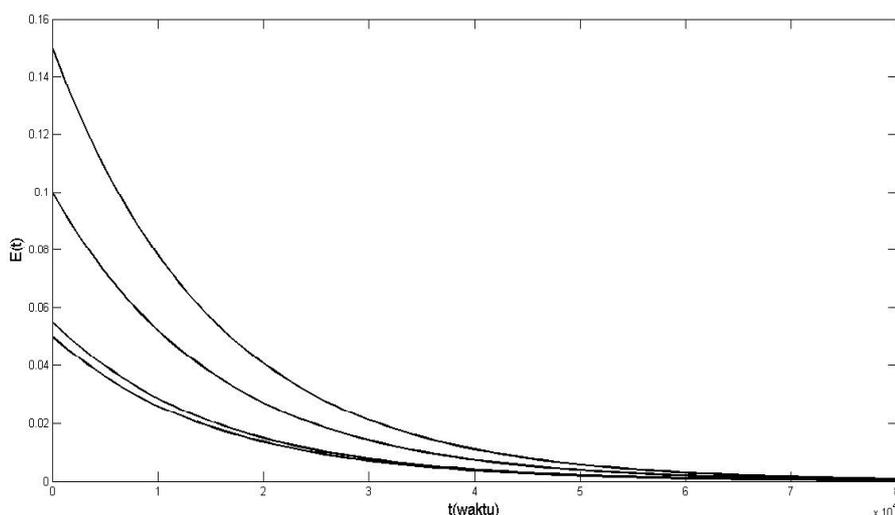
$$d_3 = \frac{(\alpha + \mu)(R_0 - 1)}{(\alpha + \mu + \delta)\beta}(\alpha\mu\delta(\alpha + \mu)(R_0 - 1) + \mu\delta^2(\beta - \alpha) + \beta\mu^2(\alpha + \mu + \delta) + \beta\alpha\delta(\mu + \delta))$$

Jelas nilai  $d_1, d_2, d_3$  positif, dengan menggunakan kriteria Ruth Hurwitz akan ditunjukkan titik ekuilibrium tidak bebas penyakit  $P_1 = (S, E, I)$  sebagai berikut,

Jelas  $d_1 \cdot d_2 \cdot d_3$



Gambar 2. Proyeksi potret fase N(t) saat  $R_0 < 1$



Gambar 3. Proyeksi potret fase E(t) saat  $R_0 < 1$

$$\begin{aligned}
 &= \left( \frac{\mu(\alpha + \mu)(R_0 + 1) + (2\mu + \beta + \delta)\delta}{\alpha + \mu + \delta} \right) \left( \frac{\mu(\delta + \mu)(R_0 - 1) + \mu(1 - \alpha^2) + (\beta - \alpha)(\delta^2 + \mu^2 + 2\mu\delta) - \alpha^2\delta}{\alpha + \mu + \delta} \right) \\
 &\quad - (\alpha + \mu)(R_0 - 1) \left( \frac{\alpha\mu\delta(\alpha + \mu)(R_0 - 1) + \mu\delta^2(\beta - \alpha) + \beta\mu^2(\alpha + \mu + \delta) + \beta\alpha\delta(\mu + \delta)}{(\alpha + \mu + \delta)\beta} \right) \\
 &= (\alpha + \mu)(R_0 - 1) \left( \frac{\delta^3\alpha^2 + 4\delta^2\alpha^2\mu + \mu^3\delta\alpha + \alpha^2\delta\mu + \mu^2\beta^2\alpha}{(\alpha + \mu + \delta)\beta} \right) + (\beta - \alpha) \left( \frac{\delta^2\alpha^2\beta\delta^4 + \beta^2\delta^2\alpha}{(\alpha + \mu + \delta)\beta} \right) \\
 &\quad + \frac{4\beta^2\mu^2\delta + \beta^2\delta^2\mu}{(\alpha + \mu + \delta)\beta} + \frac{\alpha^2\delta\mu(\beta - \mu)}{(\alpha + \mu + \delta)\beta} + \frac{\beta\mu(\beta\mu(\delta + \mu) - \alpha^2) + \alpha^2\delta\mu(\alpha + \mu) + \delta^3(3\beta - \alpha)(2\mu + 1)}{(\alpha + \mu + \delta)} \\
 &\quad + \beta\delta \left( \frac{\mu^2(2\delta + 2\mu + \beta) - \alpha^2(\delta + \mu)}{(\alpha + \mu + \delta)} \right) + \frac{\delta^2\alpha(\beta^2 - \alpha^2) + \alpha^2\delta(\beta\delta - \mu)}{(\alpha + \mu + \delta)\beta} + \frac{\delta^3(\beta^2 + \beta^2 - \alpha\mu(\alpha + \mu))}{(\alpha + \mu + \delta)\beta} \\
 &\quad + \mu^2\delta^2(3\beta^2 - \alpha(\alpha + \mu)).
 \end{aligned}$$

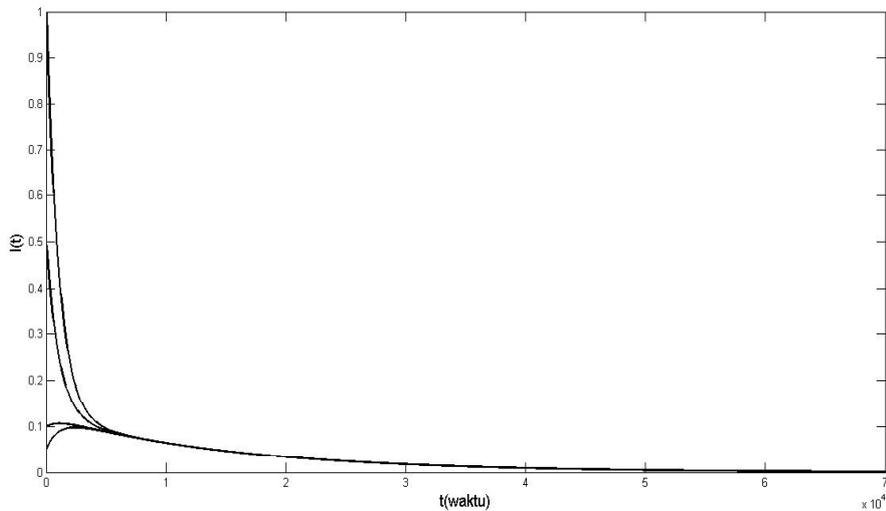
d1.d2-d3>0 jika dan hanya jika

$$\frac{\mu^2(2\delta + 2\mu + \beta)}{\alpha^2(\delta + \mu)} > 0$$

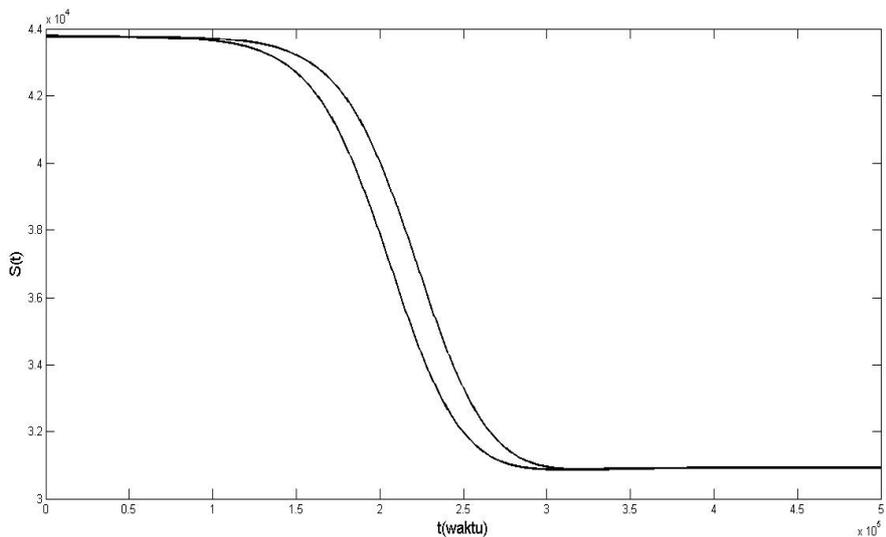
Sehingga titik ekuilibrium tidak bebas penyakit  $P_1$  stabil asimtotis lokal.

### Simulasi Model

Simulasi dilakukan dengan memberikan nilai-nilai untuk masing-masing parameter sesuai dengan kondisi  $R_0$  dengan teorema yang telah diberikan di atas. Simulasi ini diberikan untuk memberikan gambaran geometris dari teorema eksistensi dan kestabilan dari titik-titik ekuilibrium model ini. Simulasi ini digunakan untuk mengecek keabsahan hasil analisa di atas dengan menggunakan data-data simulasi. Simulasi menggunakan nilai-nilai parameter yang diberikan yang mewakili parameter-parameter seperti tingkat pengaruh perilaku yang tidak sehat yang meningkatkan resiko terkena penyakit, harapan hidup individu



**Gambar 4.** Proyeksi potret fase I(t) saat  $R_0 < 1$



**Gambar 5.** Proyeksi potret fase N(t) saat  $R_0 > 1$

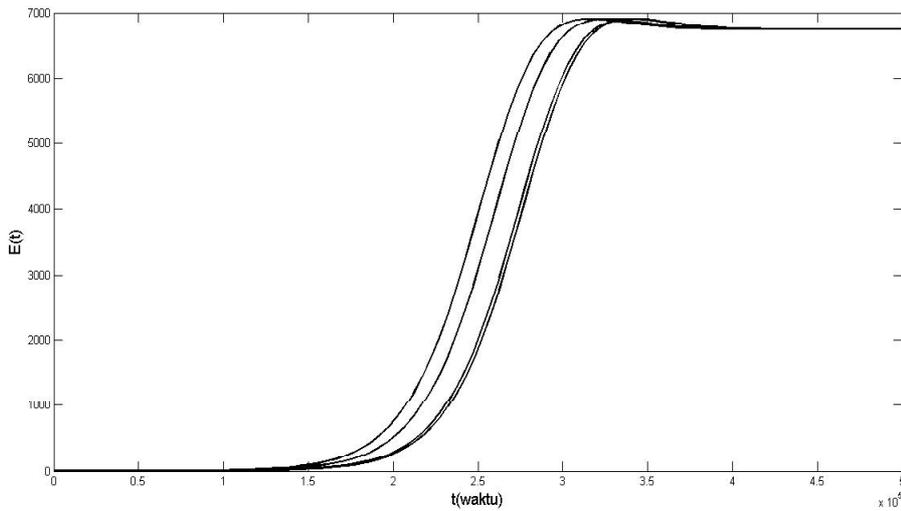
dan masa inkubasi penyakit serta parameter-parameter lainnya yang relevan.

Berikut ini akan diberikan makna nilai-nilai parameter yaitu nilai  $\mu$  menyatakan rata-rata usia hidup individu,  $p$  menyatakan rata-rata proporsi jumlah individu yang tidak mempunyai faktor genetik,  $\delta$  menyatakan rata-rata usia hidup individu yang menderita penyakit diabetes mellitus,  $\alpha$  menyatakan rata-rata masa laten,  $\beta$  menyatakan rata-rata proporsi jumlah kontak yang menyebabkan individu rentan menjadi laten setelah melakukan kontak dengan individu yang laten. Jadi jika diasumsikan rata-rata usia hidup tiap individu adalah 60 tahun,

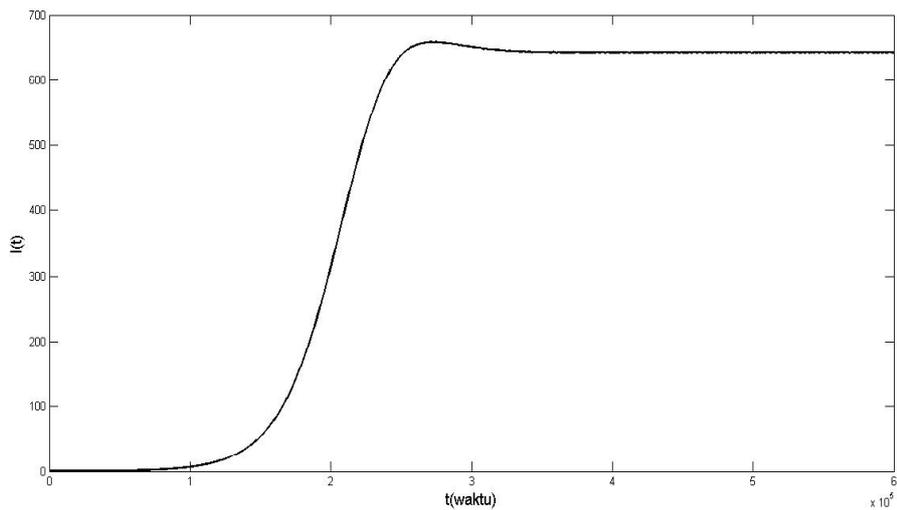
maka  $\mu = \frac{1}{60 \times 365} = 0,0000457$ , nilai  $\beta = 0,00009$  artinya rata-rata ada 9 individu rentan yang menjadi laten apabila ada 10000 individu rentan yang melakukan kontak dengan individu laten. Penentuan nilai-nilai parameter lainnya mengikuti cara yang telah dibahas diatas. Nilai parameter-parameter dalam model dihitung dalam satuan per hari dengan asumsi 1 tahun = 365 hari.

**Simulasi untuk  $R_0 < 1$**

Simulasi untuk  $R_0 < 1$ , diberikan nilai-nilai parameter dalam Tabel 1.



**Gambar 6.** Proyeksi potret fase  $E(t)$  saat  $R_0 > 1$



**Gambar 7.** Proyeksi potret fase  $I(t)$  saat  $R_0 > 1$

**Tabel 1.** Nilai-nilai parameter untuk  $R_0 < 1$

Par	Nilai	Par	Nilai
A	2	$\alpha$	0,0001096
$\mu$	0,0000457	$\delta$	0,0009132
$\beta$	0,00009		

Dari Tabel 1 diperoleh nilai  $R_0 = 0,5795 < 1$ . Pada teorema 1 disebutkan bahwa saat  $R_0 < 1$  dipunyai 1 titik ekuilibrium  $P_0$ , pada teorema 2 disebutkan bahwa  $P_0$  stabil asimtotik lokal, berikut disajikan grafik-grafik dari nilai  $S(t), E(t), I(t)$ .

Gambar 2 akan memberikan ilustrasi dari jumlah individu pada model matematika pada penyakit diabetes mellitus tanpa adanya faktor genetik.

Dari Gambar 2 diperoleh bahwa  $N(t) \rightarrow \frac{A}{\mu}$  artinya dari jumlah individu yang ada pada populasi rentan akan menuju titik ekuilibrium dari nilai  $N(t)$  sesuai dengan bertambahnya waktu.

Pada Gambar 3 diperoleh bahwa  $E(t) \rightarrow 0$  semakin bertambahnya waktu, individu yang berada pada kelas laten akan semakin hilang.

Pada Gambar 4 diperoleh bahwa  $I(t) \rightarrow 0$  berarti individu yang yang menderita sakit diabetes mellitus semakin lama hilang, ini dapat

terjadi ketika tidak ada individu yang berada pada kelas laten maka semakin lama individu yang menderita sakit berkurang dan hilang karena meninggal.

**Simulasi untuk  $R_0 > 1$**

Simulasi untuk  $R_0 > 1$ , diberikan nilai-nilai parameter dalam Tabel 2.

**Tabel 2.** Nilai-nilai parameter untuk  $R_0 > 1$

Par	Nilai	Par	Nilai
A	2	$\alpha$	0,0000913
$\mu$	0,0000457	$\delta$	0,0009132
$\beta$	0,00018		

Dari Tabel 2 diperoleh nilai  $R_0 = 1,314 > 1$ . Pada teorema 1 disebutkan bahwa saat  $R_0 > 1$  dipunyai 2 titik ekuilibrium yaitu titik bebas penyakit  $P_0$  dan titik tidak bebas penyakit  $P_1$ , pada teorema 2 disebutkan

Pada Gambar 5 Diperoleh bahwa semakin berkurang dan

$$N(t) \rightarrow \frac{A\beta(\alpha + \mu + \delta)}{\beta\mu(\alpha + \mu + \delta) + (\mu - \alpha)(R_0 - 1)\alpha\delta}$$

semakin bertambahnya waktu individu yang berada pada kelas rentan menuju ke kelas laten sehingga jumlah individu pada kelas rentan semakin berkurang.

Pada Gambar 6 terlihat bahwa jumlah individu yang berada pada kelas laten semakin bertambah, karena pada kurun waktu tersebut telah terjad kontak antara individu rentan dengan individu pada kelas laten yang menyebabkan individu pada kelas rentan terpengaruhi dengan pola hidup tidak sehat yang menyebabkan banyak individu dari kelas rentan menjadi individu kelas laten.

Pada Gambar 7 terlihat bahwa pada kelas sakit terjadi peningkatan jumlah individu itu semua terjadi karena semakin banyaknya individu yang berada pada kelas laten, karena banyaknya individu pada kelas sakit sangat dipengaruhi oleh banyaknya jumlah individu pada kelas laten.

**Penutup**

Dari pembahasan di atas diperoleh kesimpulan bahwa saat wabah pengaruh kebiasaan buruk yang dapat menyebabkan penyakit diabetes mellitus akan hilang dengan jumlah orang memiliki kebiasaan buruk pada awalnya tidak dibatasi dan saat dengan kondisi tertentu penderita diabetes tidak akan hilang. Hal ini dikarenakan penyakit diabetes tidak bisa disembuhkan. Orang yang memiliki kebiasaan buruk tidak akan hilang saran yang dapat diberikan adalah adanya penelitian lanjutan tentang pendeteksian dini kandungan darah yang dapat menyebabkan timbulnya penyakit diabetes mellitus.

**Daftar Pustaka**

Adewale SO, Ayeni RO, Ajala OA, & Adeniran T. 2007. A New Generalized Mathematical Model for Study of Diabetes Mellitus. *Research Journal of Applied Sciences* 2 (5): 629-632

Boutayeb A, Twizell EH, Achouayb K, & Chetouani A. 2004. A Mathematical model for the burden of diabetes and its complications. *BioMedical Engineering* 3:20

De Gaetano A, Hardy T, Beck B, Abu-Raddad E, Palumbo P, Bue-Valleskey J & Porksen N. 2008. Mathematical models of diabetes progression. *Am J Physiol Endocrinol Metab* 295: E1462-E1479

Kaban S. 2007. Pengembangan Model Pengendalian Kejadian Penyakit Diabetes Mellitus Tipe 2 di Kota Sibolga. *Majalah Kedokteran Nusantara* 40(2): 119-128

Misnadiarly. 2006. *Diabetes Mellitus: Gangren, Ulcer, Infeksi, Mengenal Gejala, Menanggulangi dan Mencegah Komplikasi*. Jakarta: Pustaka Popular Obor

Nugraheni PNA. 2003. *Perbedaan Kecenderungan Gaya Hidup Hedonis Pada Remaja Ditinjau dari Lokasi Tempat Tinggal*. Skripsi (tidak diterbitkan). Surakarta: Fakultas Psikologi UMS

Rao PT, Rao KS, & Usha CL. 2011. Stochastic Modeling of Blood Glucose Level in Type-2 Diabetes Mellitus. *Asian Journal of Mathematics and Statistics* 4(1): 56-65.

Stahl F & Johansson R. 2009. Diabetes mellitus modeling and short-term prediction based on blood glucose measurements. *Mathematical Biosciences* 217: 101-117