

ANALISIS MODEL *PREDATOR-PREY* ECENG GONDOK DENGAN IKAN *GRASS CARP* DAN PEMANENAN

Dwi Fahmi Ilmiawan[✉], Muhammad Kharis, Supriyono

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7, Kampus Sekaran, Gunungpati, Semarang, 50299

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima 20 Januari 2016
Disetujui 23 Maret 2019
Dipublikasikan 1 April 2019

Keywords:
Water hyacinth,
Grass carp fish,
predator-prey model, harvesting,
the equilibrium point

Abstrak

Eceng gondok merupakan tanaman invasif yang perlu dikontrol. Pengontrolan dapat dilakukan dengan menggunakan ikan *Grass carp* dan pemanenan. Interaksi pada pengontrolan tersebut dinamakan model *predator-prey* dengan pemanenan. Artikel ini membahas tentang sistem dinamik model *predator-prey* pada populasi eceng gondok dengan adanya ikan *Grass carp* dan pemanenan. Model ini menggunakan fungsi respon Holling tipe III, karena sesuai dengan ikan *Grass carp* yang cenderung mencari mangsa lain ketika eceng gondok mulai berkurang. Secara analitik, terdapat tiga titik ekuilibrium yakni E_0 , E_1 , dan E_2 dengan beberapa syarat batas. Kestabilan dari ketiga titik ekuilibrium dalam sembilan kasus yang berbeda merupakan *stable node point*, *stable spiral point*, *center point*, *unstable saddle point*, *unstable node point*, dan *unstable spiral point*. Hasil simulasi numerik menunjukkan sifat yang sama untuk sembilan kasus kestabilan tersebut. Jadi, solusi yang dapat dilakukan untuk mengontrol populasi eceng gondok yakni dengan memusnahkan kedua populasi, memusnahkan populasi ikan *Grass carp*, dan melestarikan kedua populasi.

Abstract

Water hyacinth is an invasive plant that needs to be controlled. Control can be performed using Grass carp fish and harvesting. Interaction in the control process called predator-prey model with harvesting. This article discussed about the system dynamic of predator-prey model on water hyacinth population with Grass carp fish and harvesting. This model uses Holling response function of type III, because according to the Grass carp fish that tend to seek other prey when water hyacinth began to decrease. Analytically, there are three equilibrium points namely E_0 , E_1 , and E_2 with some boundary conditions. The stability of the three equilibrium points in nine different cases are stable node point, stable spiral point, center point, unstable saddle point, unstable node point, and unstable spiral point. Numerical simulation results showed the same properties for the stability of the nine cases. So, the solution that can be done to control the water hyacinth population are the eradicate both populations, eradicate of Grass carp fish population, and conserve both populations.

PENDAHULUAN

Eceng gondok (*Eichhornia crassipes*) merupakan spesies invasif di berbagai wilayah dunia (Penfound & Earle, 1948). Invasi ini terjadi akibat pertumbuhan eceng gondok yang begitu cepat, baik secara genetik maupun vegetatif. Gutiérrez *et al.* (2001) menyebutkan bahwa satu batang eceng gondok mampu menghasilkan tumbuhan baru seluas 1 m² dalam waktu 52 hari.

Keberadaan eceng gondok yang berlebih akan menimbulkan permasalahan bagi lingkungan disekitarnya, seperti pada aspek kesehatan, rekreasi, maupun skema irigasi (Gopal, 1987). Namun demikian, keberadaan eceng gondok juga dapat dimanfaatkan untuk menyerap zat organik, anorganik serta logam berat lain (Hasan *et al.*, 2010). Melihat masalah dan manfaat dari eceng gondok, maka pengontrolan eceng gondok perlu dilakukan.

Pengontrolan eceng gondok dapat dilakukan dengan herbivora dan pemanenan. Herbivora berfungsi sebagai biokontrol sedangkan pemanenan berfungsi untuk mengoptimalkan manfaat eceng gondok. Herbivora yang telah digunakan diantaranya ikan *Grass carp* (Soeprbowati, 2012) serta *Neochetina eichhorniae* dan *N. Bruchi* (Buchanan, 2013).

Adanya pengontrolan akan menyebabkan dinamika populasi eceng gondok yang senantiasa berubah terhadap waktu. Secara matematis, dinamika yang terjadi dapat dimodelkan dengan persamaan differensial. Pemodelan yang digunakan adalah model *predator-prey* dengan pemanenan.

Model *predator-prey* dikenal sebagai model Lotka-Volterra (Boyce & DiPrima, 2000). Contoh model *predator-prey* diberikan oleh Barnes & Fulford (2002) melalui persamaan

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \beta_1 X - c_1 XY, \\ \frac{dY}{dt} &= -\alpha_2 Y + c_2 XY, \end{aligned} \quad (1)$$

dengan X dan Y populasi *prey* dan *predator*, sedangkan $c_1, c_2, \beta_1, \alpha_2$ berturut-turut laju interaksi *predator-prey*, laju pertumbuhan *prey*, dan laju kematian *predator*.

Pada pengembangannya, model *predator-prey* dilengkapi dengan asumsi, seperti fungsi respon Holling sebagai fungsi kepadatan makanan yang dimakan *predator* (Hunsicker *et al.*, 2011). Fungsi ini terbagi dalam tiga tipe, yakni tipe I (*predator* pasif), tipe II (*predator* aktif), dan tipe III (*predator* mencari mangsa lain jika mangsa utama berkurang).

Pengembangan model *predator-prey* menggunakan fungsi respon Holling tipe III dilakukan Zhang *et al.* (2011) dengan pemanenan konstan pada populasi mangsa. Pengembangan lain dilakukan Agarwal & Pathak (2012) dan Jiang (2013) dengan pemanenan konstan pada populasi mangsa-pemangsa. Selanjutnya, Rifa'i & Subchan (2015), melakukan optimalisasi pengendalian model pemanenan *predator-prey*.

Pemodelan eceng gondok dilakukan Wilson *et al.* (2001) dengan *predator Neochetina eichhorniae* dan Gutiérrez *et al.* (2001) dengan pemanenan konstan. Pada penelitian ini dibangun model *predator-prey* pada populasi eceng gondok dengan adanya ikan *Grass carp* sebagai *predator* dan pemanenan pada populasi *predator-prey*.

METODE

Metode penelitian yang digunakan adalah kajian kepustakaan (*library research*) dengan langkah-langkah yang dilakukan yaitu menentukan masalah, merumuskan masalah, studi pustaka, serta melakukan analisis dan pemecahan masalah model *predator-prey*.

Analisis dan pemecahan masalah dilakukan dengan tahapan berikut. (1) Kontruksi model *predator-prey*. (2) Mencari solusi model *predator-prey*, dengan langkah pencariannya yaitu: (a) Menentukan titik ekuilibrium. Titik $x_0 \in R^n$ disebut titik ekuilibrium sistem $\dot{x} = f(x)$ jika $f(x_0) = 0$ (Perko, 1991). (b) Menentukan matriks jacobian. Secara umum, matriks jacobian diberikan oleh Purnamasari *et al.* (2006) melalui persamaan

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

(c) Menentukan nilai eigen. Misalkan A matriks $n \times n$ dan $X \in R^n$, $X \neq 0$. Jika $AX = \lambda X$, untuk suatu $\lambda \in R$, λ disebut nilai eigen dan vektor X disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan λ (Anton, 2006). (d) Menganalisis titik ekuilibrium berdasarkan sifat nilai eigen. Misalkan $\delta = \det A$ dan $\tau = \text{trace } A$. (i) Jika $\delta < 0$ maka sistem $\dot{x} = Ax$ mempunyai *saddle point*. (ii) Jika $\delta > 0$ dan $\tau^2 - 4\delta \geq 0$ maka sistem $\dot{x} = Ax$ mempunyai *node point*. Titik tersebut stabil jika $\tau < 0$ dan tidak stabil jika $\tau > 0$. (iii) Jika $\delta > 0$, $\tau^2 - 4\delta < 0$, dan $\tau \neq 0$ maka sistem $\dot{x} = Ax$ mempunyai *spiral point*. Titik tersebut stabil jika $\tau < 0$ dan tidak stabil

jika $\tau > 0$. (iv) Jika $\delta > 0$ dan $\tau > 0$ maka sistem $\dot{x} = Ax$ mempunyai *center point*. (Perko, 1991). (3) Melakukan simulasi numerik dengan menggunakan program Maple 12.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model Predator-Prey

Fakta-fakta terkait yang digunakan diantaranya adalah ikan *Grass carp* sebagai predator eceng gondok (Soeprbowati, 2012) dapat mengkonsumsi tanaman lain, namun lebih memilih salah satu jenis pakan yang diminatinya saja (Babo et al., 2013). Dan oleh sebab kebermanfaatannya kedua populasi, pada keduanya dilakukan pemanenan (Wibisono, 2014 dan Soeprbowati, 2012).

Berdasarkan fakta-fakta tersebut, berikut diberikan asumsi-asumsi yang berkaitan. (1) Laju pertumbuhan eceng gondok mengikuti pertumbuhan logistik. (2) Interaksi kedua populasi mengikuti fungsi respon Holling tipe III. (3) Laju pemanenan kedua populasi sebanding dengan kepadatannya. Diperoleh model predator-prey nya, yakni:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= rW \left(1 - \frac{W}{K}\right) - hW - \frac{mW^2}{a^2+W^2}P, \\ \frac{dP}{dt} &= P \left(\frac{mW^2}{a^2+W^2} - (\rho + \mu)\right), \end{aligned} \tag{3}$$

dengan

- W : kepadatan eceng gondok ($W \geq 0$)
- P : kepadatan ikan *Grass carp* ($P \geq 0$)
- r : laju pertumbuhan eceng gondok ($r > 0$)
- K : daya dukung lingkungan ($K > 0$)
- h : laju pemanenan eceng gondok ($h \geq 0$)
- m : tingkat konsumsi ikan *Grass carp* ($m > 0$)
- a : tingkat kejenuhan ikan *Grass carp* ($a > 0$)
- μ : laju kematian ikan *Grass carp* ($\mu > 0$)
- ρ : laju pemanenan ikan *Grass carp* ($\rho \geq 0$).

Persamaan untuk populasi eceng gondok mengikuti model pertumbuhan logistik dengan efek pengurangan akibat pemanenan dan di makan ikan *Grass carp*: $hW + \frac{mW^2P}{a^2+W^2}$. Di sisi lain, populasi ikan *Grass carp*, P , meningkat pada laju maksimal $\frac{mW^2}{a^2+W^2} - (\rho + \mu)$ ketika terdapat banyak eceng gondok, dan menurun pada laju maksimal $\rho + \mu$ ketika terdapat sedikit eceng gondok dan pemanenan ikan *Grass carp* yang signifikan.

Eksistensi Titik Ekuilibrium

Berikut diberikan teorema untuk eksistensi titik ekuilibrium.

Teorema 1

Dari Sistem (3) diperoleh,

1. Titik ekuilibrium $E_0(0,0)$ eksis untuk setiap kondisi,
2. Titik ekuilibrium $E_1(W_1, 0)$ eksis jika $h < r$, serta
3. Titik ekuilibrium $E_2(W^*, P^*)$ eksis jika $m > \rho + \mu > 0$ dan $r > h + \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}$,

dengan $W_1 = K \left(1 - \frac{hh}{r}\right)$, $W^* = a \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}$, dan

$$P^* = \frac{a}{\rho+\mu} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} \left(r - h - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}\right).$$

Bukti:

Sistem (2) mempunyai titik ekuilibrium jika $\frac{dW}{dt} = 0$ dan $\frac{dP}{dt} = 0$, sehingga Sistem (2) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= rW \left(1 - \frac{W}{K}\right) - hW - \frac{mW^2}{a^2+W^2}P = 0, \\ \frac{dP}{dt} &= P \left(\frac{mW^2}{a^2+W^2} - (\rho + \mu)\right) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

Dari persamaan kedua pada Sistem (4) didapatkan

$$P = 0 \text{ atau } W^* = a \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}},$$

dengan asumsi $m > \rho + \mu > 0$.

Kasus $P = 0$

Substitusikan $P = 0$ ke persamaan pertama pada Sistem (3) sehingga didapatkan

$$rW \left(1 - \frac{W}{K}\right) - hW = 0.$$

Diperoleh

$$W = 0 \text{ atau } r \left(1 - \frac{W}{K}\right) - h = 0,$$

dengan asumsi $h < r$, maka

$$W_1 = K \left(1 - \frac{h}{r}\right) > 0.$$

Jadi, didapatkan titik ekuilibrium $E_0(0,0)$ dan $E_1(W_1, 0)$.

Kasus $W^* = a \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}$

Substitusikan $W^* = a \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}$ ke persamaan pertama pada Sistem (3) sehingga didapatkan

$$P^* = \frac{a}{\rho+\mu} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} \left(r - h - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}\right) > 0,$$

dengan asumsi $r > h + \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}}$.

Diperoleh titik ekuilibrium $E_2(W^*, P^*)$.

Berdasarkan teorema eksistensi titik ekuilibrium, titik kesetimbangan yang dapat

dicapai yakni, kepunahan kedua populasi, kepunahan ikan *Grass carp*, dan kelestarian kedua populasi.

Kestabilan Titik Ekuilibrium

Berikut diberikan teorema untuk kestabilan titik ekuilibrium $E_0(0,0)$.

Teorema 2

Misalkan $E_0(0,0)$ titik ekuilibrium dari Sistem (2), maka

1. E_0 *unstable saddle point* jika $h < r$, dan
2. E_0 *stable node point* jika $h > r$.

Bukti:

Matriks Jacobian dari titik E_0 yakni

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} r - h & 0 \\ 0 & -(\rho + \mu) \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristiknya adalah

$$(\lambda - r + h)(\lambda + \rho + \mu) = 0.$$

Diperoleh nilai eigennya

$$\lambda_1 = r - h \text{ dan } \lambda_2 = -(\rho + \mu).$$

Jelas $\rho + \mu \neq 0$ sehingga $\lambda_2 < 0$.

Jika $h < r$, maka $r - h > 0$ sehingga $\lambda_1 > 0$ dan E_0 *unstable saddle point*. Sedangkan jika $h > r$, maka $r - h < 0$ sehingga $\lambda_1 < 0$ dan E_0 *stable node point*.

Teorema 3

Misalkan $E_1(W_1, 0)$ titik ekuilibrium dari Sistem (2), maka

1. E_1 *unstable saddle point* jika $a \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} < K \left(1 - \frac{h}{r}\right)$, dan
2. E_1 *stable node point* jika $a \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} > K \left(1 - \frac{h}{r}\right)$.

Bukti:

Matriks Jacobian dari titik E_1 , yakni

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -r + h & -C \\ 0 & C - (\rho + \mu) \end{bmatrix}$$

dengan $C = \frac{mK^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2}{a^2 + K^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2}$.

Persamaan karakteristiknya adalah

$$(\lambda + r - h)(\lambda_2 - C + \rho + \mu) = 0.$$

Diperoleh nilai eigennya

$$\lambda_1 = -r + h \text{ dan } \lambda_2 = C - (\rho + \mu).$$

Jelas $h < r$ sehingga $\lambda_1 < 0$.

Jika $a \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} < K \left(1 - \frac{h}{r}\right)$, maka didapatkan

$$mK^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2 - (\rho + \mu) \left[a^2 + K^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2 \right] < 0,$$

sehingga $\frac{mK^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2}{a^2 + K^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2} - (\rho + \mu) > 0$.

Diperoleh $\lambda_2 = C - (\rho + \mu) > 0$,

sehingga E_1 *unstable saddle point*.

Sedangkan jika $a \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} > K \left(1 - \frac{h}{r}\right)$, maka didapatkan

$$mK^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2 - (\rho + \mu) \left[a^2 + K^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2 \right] > 0,$$

sehingga $\frac{mK^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2}{a^2 + K^2 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2} - (\rho + \mu) < 0$.

Diperoleh $\lambda_2 = C - (\rho + \mu) < 0$,

sehingga E_1 *stable node point*.

Teorema 4

Diberikan $E_2(W^*, P^*)$ titik ekuilibrium dari Sistem (2),

1. Jika $m > 2(\rho + \mu)$ atau $m < 2(\rho + \mu)$ dan $h > r(1 - L)$, maka E_2 *stable spiral point* atau *stable node point*,
2. Jika $m < 2(\rho + \mu)$ dan $h < r(1 - L)$, maka E_2 *unstable spiral point* atau *unstable node point*, serta
3. Jika $m < 2(\rho + \mu)$ dan $h = r(1 - L)$ maka E_2 *center point*,

dengan $L = \frac{2a(\rho + \mu)}{K[2(\rho + \mu) - m]} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} < 1$.

Bukti:

Matriks Jacobian titik E_2 yakni

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} F_1 & -(\rho + \mu) \\ F_2 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan

$$F_1 = -r + h + \frac{2(\rho + \mu)}{m} \left(r - h - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} \right),$$

$$F_2 = 2 \left(1 - \frac{(\rho + \mu)}{m} \right) \left(r - h - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} \right).$$

Persamaan karakteristiknya yakni

$$\lambda^2 - F_1\lambda + F_2(\rho + \mu) = 0.$$

Diperoleh nilai eigennya

$$\lambda_{1,2} = \frac{F_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{D},$$

dengan

$$D = F_1^2 - 4F_2(\rho + \mu).$$

Telah diasumsikan

$$m > \rho + \mu > 0 \text{ dan } r > h + \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}},$$

sehingga didapatkan

$$2(\rho + \mu) > 0,$$

$$1 - \frac{(\rho + \mu)}{m} > 0, \text{ dan}$$

$$r - h - \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} > 0.$$

Akibatnya $F_2(\rho + \mu) > 0$.

Kasus $m > 2(\rho + \mu)$ atau $m < 2(\rho + \mu)$ dan $h > r(1 - L)$

Diperoleh

$$\left(-1 + \frac{2(\rho + \mu)}{m}\right)(r - h) - \frac{2(\rho + \mu)ar}{mK} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} < 0,$$

sehingga $F_1 < 0$.

Jika $D < 0$, maka $\lambda_{1,2} = \frac{F_1}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{|D|}$.

Jelas bagian real dari $\lambda_{1,2}$ yakni $\frac{F_1}{2} < 0$, sehingga titik E_2 *stable spiral point*.

Dan jika $D \geq 0$, maka $\lambda_{1,2} = \frac{F_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{D}$.

Jelas $F_1 < \sqrt{D} < -F_1$ sehingga

$$\frac{F_1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{D} < 0 \text{ dan } \frac{F_1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{D} < 0.$$

Diperoleh $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$.

Akibatnya, titik E_2 *stable node point*.

Kasus $m < 2(\rho + \mu)$ dan $h < r(1 - L)$

Diperoleh

$$\left(-1 + \frac{2(\rho + \mu)}{m}\right)(r - h) - \frac{2(\rho + \mu)ar}{mK} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} > 0,$$

sehingga $F_1 > 0$.

Jika $D < 0$, maka $\lambda_{1,2} = \frac{F_1}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{|D|}$.

Jelas bagian real dari $\lambda_{1,2}$ yakni $\frac{F_1}{2} > 0$, sehingga titik E_2 *unstable spiral point*.

Dan jika $D \geq 0$, maka $\lambda_{1,2} = \frac{F_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{D}$.

Jelas $-F_1 < \sqrt{D} < F_1$ sehingga

$$\frac{F_1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{D} > 0 \text{ dan } \frac{F_1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{D} > 0.$$

Diperoleh $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 > 0$.

Akibatnya, titik E_2 *unstable node point*.

Kasus $m < 2(\rho + \mu)$ dan $h = r(1 - L)$

Diperoleh

$$\left(-1 + \frac{2(\rho + \mu)}{m}\right)(r - h) - \frac{2(\rho + \mu)ar}{mK} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} = 0,$$

sehingga $F = 0$.

Jelas nilai eigennya adalah

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm \frac{\sqrt{-4F_2(\rho + \mu)}}{2} \\ &= \pm i \sqrt{F_2(\rho + \mu)}. \end{aligned}$$

Oleh sebab λ_1 dan λ_2 merupakan imajiner murni, maka titik E_2 *center point*.

Berdasarkan teorema kestabilan titik E_0 , E_1 , dan E_2 , maka titik kesetimbangan dapat dicapai pada empat kasus yang stabil, yakni E_0 *stable node point*, E_1 *stable node point*, serta E_2 *stable spiral point* dan *stable node point*. Berikut dijabarkan syarat ketercapaian ketiga titik kesetimbangan.

1. Kepunahan Kedua Populasi

Syarat ketercapaiannya yakni laju pemanenan eceng gondok lebih dari laju pertumbuhan eceng gondok ($h > r$).

2. Kepunahan Ikan *Grass carp*

Syarat ketercapaiannya yakni laju pemanenan eceng gondok kurang dari laju pertumbuhan eceng gondok ($h < r$) dan memenuhi pertidaksamaan $a \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} <$

$K \left(1 - \frac{h}{r}\right)$ dengan laju interaksi lebih dari laju pengurangan ikan *Grass carp* ($m > \rho + \mu$).

3. Kelestarian Kedua Populasi

Syarat ketercapaiannya yakni laju pertumbuhan eceng gondok lebih dari laju pemanenan eceng gondok ditambah dengan $\frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}}$ dan memenuhi salah satu dari dua kondisi berikut, yakni laju interaksi lebih dari dua kali laju pengurangan ikan *Grass carp* ($m > 2\rho + 2\mu$) atau laju interaksi kurang dari dua kali laju pengurangan ikan *grass carp* ($m < 2\rho + 2\mu$) dengan laju pemanenan eceng gondok (h) lebih dari $r(1 - L)$, di mana $L =$

$$\frac{2a(\rho + \mu)}{K[2(\rho + \mu) - m]} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} < 1.$$

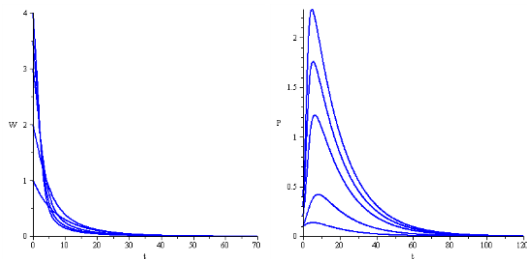
Simulasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan program Maple 12. Parameter yang digunakan tersaji pada Tabel 1.

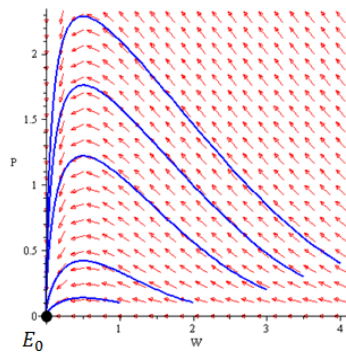
Tabel 1. Parameter simulasi numerik

kasus	r	h	K	a	m	ρ	μ	kestabilan
1	0.1	0.2	10	2	1	0.02	0.04	E_0 stable node
2	0.118	0.117	70	2	0.061	0.02	0.01	E_1 stable node E_0 saddle
3	0.118	0.038	3	2	1	0.02	0.04	E_2 stable spiral E_1 & E_0 saddle
4	0.11	0.103	2	2	1	0.001	0.001	E_2 stable node E_1 & E_0 saddle
5	0.1	0.036	70	2	0.1	0.04	0.02	E_2 unstable spiral E_1 & E_0 saddle
6	0.08	0.055	70	1	0.021	0.01	0.01	E_2 unstable node E_1 & E_0 saddle
7	0.1	0.086	70	1	0.021	0.01	0.01	E_2 center E_1 & E_0 saddle

Kasus 1: $h > r$



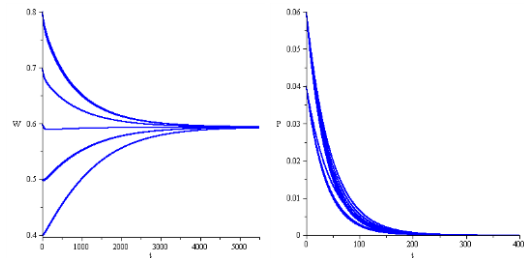
Gambar 1. Bidang Solusi Kasus 1:
 $W \rightarrow t$ (kiri) dan $P \rightarrow t$ (kanan)



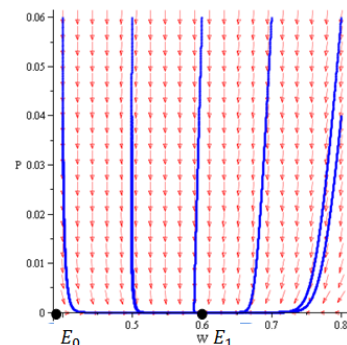
Gambar 2. Trayektori Kasus 1

Gambar 1 menunjukkan populasi eceng gondok menurun menuju kepunahan, sedangkan populasi ikan *Grass carp* pada awalnya meningkat, namun kemudian menurun menuju kepunahan. Pada Gambar 2, terlihat semua trayektori mendekati titik E_0 sehingga E_0 stable node point. Jadi, kedua populasi akan mengalami kepunahan. Model ini memprediksi populasi eceng gondok dan ikan *Grass carp* masing-masing akan mengalami kepunahan dalam waktu sekitar 70 hari dan 120 hari.

Kasus 2: $h < r$ dan $a \sqrt{\frac{\rho+\mu}{m-(\rho+\mu)}} < K \left(1 - \frac{h}{r}\right)$



Gambar 3. Bidang Solusi Kasus 2:
 $W \rightarrow t$ (kiri) dan $P \rightarrow t$ (kanan)

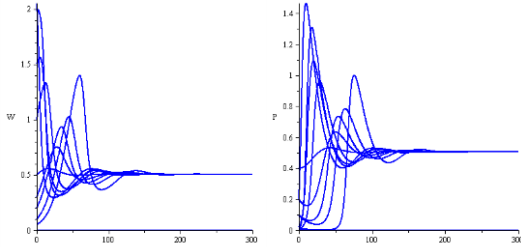


Gambar 4. Trayektori Kasus 2

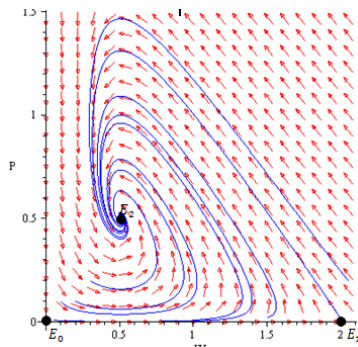
Gambar 3 menunjukkan populasi eceng gondok meningkat dan menurun menuju kondisi stabil yang konstan, sedangkan populasi ikan *Grass carp* menurun menuju kepunahan. Pada Gambar 4, terlihat semua trayektori mendekati titik E_1 sehingga E_1 stable node point. Selain itu, trayektori mendekati dan menjauhi titik E_0 sehingga E_0 unstable saddle point. Jadi, populasi ikan *Grass carp* akan punah sedangkan

populasi eceng gondok tetap lestari. Model ini memprediksi populasi eceng gondok dan ikan *Grass carp* masing-masing akan mencapai titik kesetimbangan dalam waktu sekitar 5.500 hari dan 400 hari.

Kasus 3: $m > 2(\rho + \mu)$, $r > h + \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}}$, dan $D < 0$



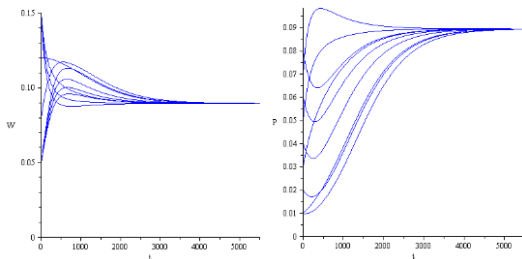
Gambar 5. Bidang Solusi Kasus 3: $W \rightarrow t$ (kiri) dan $P \rightarrow t$ (kanan)



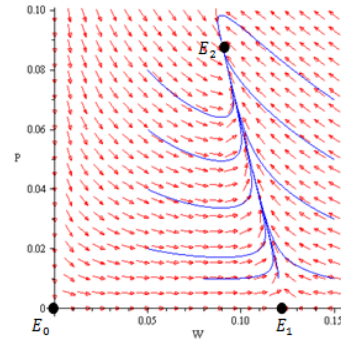
Gambar 6. Trayektori Kasus 3

Gambar 5 menunjukkan populasi eceng gondok dan ikan *Grass carp* meningkat dan menurun hingga mencapai kondisi stabil dan konstan. Pada Gambar 6, semua trayektori mendekati titik E_2 secara spiral sehingga E_2 *stable spiral point*. Selain itu, trayektori mendekati dan menjauhi titik E_0 dan E_1 , sehingga E_0 dan E_1 *unstable saddle point*. Dengan demikian, kedua populasi akan hidup berdampingan. Model ini memprediksi kedua populasi akan mencapai titik kesetimbangan dalam waktu sekitar 300 hari.

Kasus 4: $m > 2(\rho + \mu)$, $r > h + \frac{ar}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}}$, dan $D \geq 0$



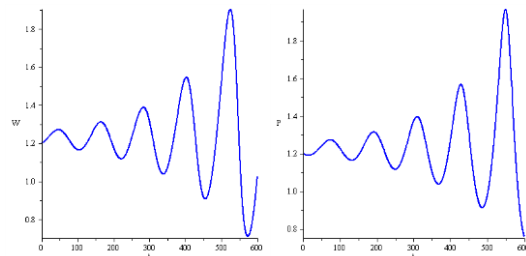
Gambar 7. Bidang Solusi Kasus 4: $W \rightarrow t$ (kiri) dan $P \rightarrow t$ (kanan)



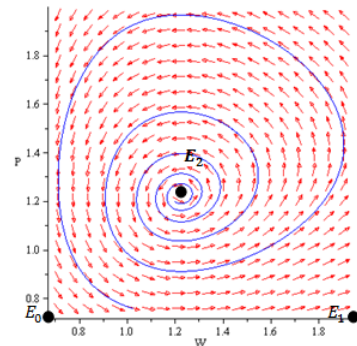
Gambar 8. Trayektori Kasus 4

Gambar 7 menunjukkan kedua populasi meningkat dan menurun hingga mencapai kondisi stabil dan konstan. Pada Gambar 8, terlihat semua trayektori mendekati titik E_2 dari berbagai arah maka E_2 *stable node point*. Selain itu, trayektori mendekati dan menjauhi titik E_0 dan E_1 , sehingga E_0 dan E_1 *unstable saddle point*. Dengan demikian, kedua populasi akan hidup berdampingan. Model ini memprediksi kedua populasi akan mencapai titik kesetimbangan dalam waktu sekitar 5.500 hari.

Kasus 5: $m < 2(\rho + \mu)$, $h < r(1 - L) < r \left(1 - \frac{a}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}}\right)$, dan $D < 0$



Gambar 9. Bidang Solusi Kasus 5: $W \rightarrow t$ (kiri) dan $P \rightarrow t$ (kanan)



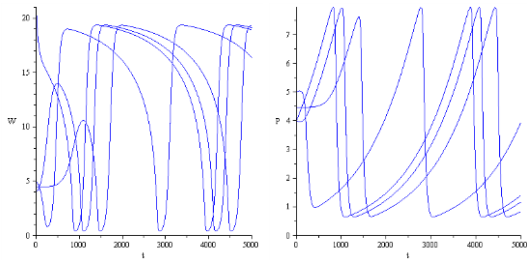
Gambar 10. Trayektori Kasus 5

Gambar 9 menunjukkan kedua populasi terus mengalami perubahan yang semakin besar seiring bertambahnya waktu. Pada Gambar 10,

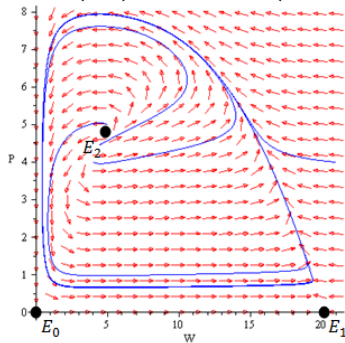
terlihat semua trayektori menjauhi titik E_2 secara spiral sehingga E_2 *unstable spiral point*. Selain itu, trayektori mendekati dan menjauhi titik E_0 dan E_1 , sehingga E_0 dan E_1 *unstable saddle point*. Jadi, kesetimbangan populasi tidak tercapai.

Kasus 6: $m < 2(\rho + \mu)$,

$$h < r(1 - L) < r \left(1 - \frac{a}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} \right), \text{ dan } D \geq 0$$



Gambar 11. Bidang Solusi Kasus 6: $W \rightarrow t$ (kiri) dan $P \rightarrow t$ (kanan)

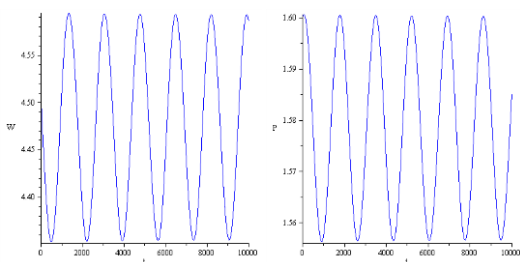


Gambar 12. Trayektori Kasus 6

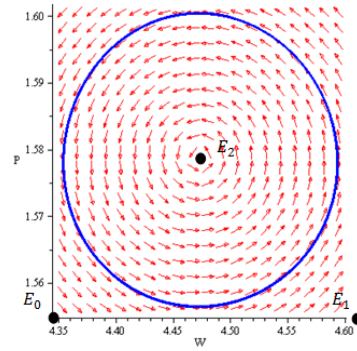
Gambar 11 menunjukkan populasi eceng gondok dan ikan *Grass carp* terus mengalami perubahan hingga membentuk perubahan yang cenderung stabil periodik. Pada Gambar 12, terlihat semua trayektori menjauhi titik E_2 ke berbagai arah maka E_2 *unstable node point*. Selain itu, trayektori mendekati dan menjauhi titik E_0 dan E_1 , sehingga E_0 dan E_1 *unstable saddle point*. Jadi, kesetimbangan populasi tidak tercapai.

Kasus 7: $m < 2(\rho + \mu)$ dan

$$h = r(1 - L) < r \left(1 - \frac{a}{K} \sqrt{\frac{\rho + \mu}{m - (\rho + \mu)}} \right)$$



Gambar 13. Bidang Solusi Kasus 7: $W \rightarrow t$ (kiri) dan $P \rightarrow t$ (kanan)



Gambar 14. Trayektori Kasus 7

Gambar 13 menunjukkan populasi eceng gondok dan ikan *Grass carp* mengalami perubahan secara periodik. Pada Gambar 14, terlihat trayektori mengelilingi titik E_2 sehingga E_2 *center point*. Selain itu, trayektori mendekati dan menjauhi titik E_0 dan E_1 , sehingga E_0 dan E_1 *unstable saddle point*. Jadi, kesetimbangan kedua populasi terjadi secara periodik di sekitar titik ekuilibrium.

Dari ketiga titik kesetimbangan yang dapat dicapai, kesetimbangan kelestarian kedua populasi merupakan solusi yang paling efektif dalam menanggulangi populasi eceng gondok yang setiap saat dapat kembali melakukan invasi. Di mana keberadaan ikan *Grass carp* akan selalu membatasi populasi eceng gondok sehingga pertumbuhan eceng gondok yang terlampau besar dapat dihindari.

SIMPULAN

Model *predator-prey* pada populasi eceng gondok dengan adanya ikan *Grass carp* dan pemanenan diberikan oleh

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= rW \left(1 - \frac{W}{K} \right) - hW - \frac{mW^2}{a^2 + W^2} P, \\ \frac{dP}{dt} &= P \left(\frac{mW^2}{a^2 + W^2} - (\rho + \mu) \right), \end{aligned}$$

dengan $W(0) \geq 0, P(0) \geq 0$. Model tersebut mempunyai 3 titik ekuilibrium yakni E_0, E_1 dan E_2 dengan beberapa syarat batas. Dalam beberapa kasus, ketiga titik ekuilibrium bersifat *unstable saddle point, stable/unstable spiral point, stable/unstable node point*, dan *center point*. Hasil simulasi numerik sesuai dengan perhitungan analitik. Jadi, solusi pengontrolan dapat dilakukan pada titik kesetimbangan kepunahan kedua populasi, kepunahan ikan *Grass carp*, atau kelestarian kedua populasi.

DAFTAR PUSTAKA

- Agarwal, M. & Pathak, R. 2012. Persistence and Optimal Harvesting of Prey-Predator Model with Holling Type III Functional Response. *International Journal of Engineering, Science and Technology*, 4(3): 78-96.
- Anton, H. 1987. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.
- Babo, D., Sampekalo, J., & Pangkey, H. 2013. Pengaruh Beberapa Jenis Pakan Hijauan terhadap Pertumbuhan Ikan *Grass carp Stenopharyngodon Idella*. *Budidaya Perairan*, 1(3): 1-6.
- Barnes, B. & Fulford, G.R. 2002. *Mathematical Modelling with Case Studies (a Differential Equation Approach using Maple)*. London: Taylor & Francis.
- Boyce, W.E. & DiPrima, R.C. 2000. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: Department of Mathematical Sciences Rensselaer Polytechnic Institute.
- Buchanan, A.L. 2013. Damage by Neochetina Weevils (*Coleoptera: Curculionidae*) Induces Resistance in *Eichhornia Crassipes* (*Commelinales: Pontederiaceae*). *Florida Entomologist*, 96(2): 458-462.
- Gopal, B. 1987. Water Hyacinth. *Elsevier*.
- Gutiérrez, E.L., Ruiz, E.F., Uribe, E.G., & Martínez, J.M. 2001. Biomass and Productivity of Water Hyacinth and their Application in Control Programs. *ACIAR Proceeding 102*.
- Hasan, S.H., Ranjan, D., & Talat, M. 2010. Water Hyacinth Biomass (WHB) for the Biosorption of Hexavalent Chromium: Optimization of Process Parameters. *BioResources*, 5(2): 563-575.
- Hunsicker, M.E., Ciannelli, L., Bailey, K.M., Buckel, J.A., White, J.W., Link, J.S., Essington, T.E., Gaichas, S., Anderson, T.W., Brodeur, R.D. & Chan, K.S., 2011. Functional responses and scaling in predator-prey interactions of marine fishes: contemporary issues and emerging concepts. *Ecology Letters*, 14(12), pp.1288-1299.
- Jiang, Q & Wang, J. 2013. Qualitative Analysis of a Harvested Predator-Prey System with Holling Type III Functional Response. *Advances in Difference Equations a Springer Open Journal*: 249-258.
- Penfound, W.T. & Earle, T.T. 1948. Biology of the Water Hyacinth. *Ecological Monographs*. 18: 447-472.
- Perko, L. 1991. *Differential Equation and Dynamical System*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Purnamasari, D., Faisal, & Noor, A. J. 2009. Kestabilan Sistem Predator-Prey Leslie. *Jurnal Matematika Murni dan Terapan*, 3(2): 51-59.
- Rifa'i, M. & Subchan. 2015. Analisa Kestabilan dan Kendali Optimal pada Model Pemanenan Prey Predator dengan Fungsi Repon Tipe III. *Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Matematika*. Surakarta: Universitas Muhammadiyah Surakarta.
- Soeprbowati, T.R. 2012. Mitigasi Danau Eutrofik: Studi Kasus Danau Rawapening. *Prosiding Seminar Nasional Limnologi IV*.
- Wilson, J.R., Rees, M., Holst, N., Thomas, M.B., & Hill, G. 2001. Water Hyacinth Population Dynamics. *ACIAR Proceeding 102*.
- Zhang, X., Xu, R., & Gan, Q. 2011. Periodic Solution in a Delayed Predator-Prey Model with Holling Type III Functional Response and Harvesting Term. *World Journal of Modelling and Simulation*, 7(1): 70-80.