Jurnal MIPA 36 (1): 87-97 (2013)

**Jurnal MIPA**

http://journal.unnes.ac.id/nju/index.php/JM

# KARAKTERISTIK FAKTOR KREDIBILITAS PADA MODEL BUHLMANN UNTUK MENENTUKAN PREMI

**N Satyahadewi** ✉ **MN Mara**

FMIPA, Universitas Tanjungpura, Pontianak, Indonesia

**Info Artikel**

*Sejarah Artikel:*
Diterima 21 Februari 2013
Disetujui 29 Maret 2013
Dipublikasikan April 2013

*Keywords:*
*Buhlmann; claim severity; characteristics*

## Abstrak

Salah satu tugas aktuaris dalam perusahaan asuransi adalah menentukan tarif premi yang layak. Teori kredibilitas dapat digunakan untuk menentukan tarif premi. Teori kredibilitas adalah suatu teknik untuk memprediksi besarnya tarif premi di masa depan berdasarkan data pengalaman di masa lalu. Faktor kredibilitas dapat ditentukan dengan tiga pendekatan, yaitu pendekatan kredibilitas fluktuasi terbatas, pendekatan Bayesian dan pendekatan keakuratan tertinggi. Dalam artikel ini membahas model Bühlmann yang digunakan sebagai pendekatan kredibilitas keakuratan tertinggi. Faktor kredibilitas diperoleh dengan meminimumkan kuadrat sesatan antar nilai harapan dan variansi yang diduga. Karakteristik faktor kredibilitas $(z)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai dari T tahun observasi, variansi dari deviasi *claim severity* (a) dan variansi dari deviasi *claim severity* untuk tahun ke-$t$ $(s^2)$, yaitu jika $T \rightarrow \infty$ maka $z \rightarrow 1$. Semakin banyak terdapat pengalaman maka semakin percaya terhadap *claim severity* yang diharapkan setiap perusahaannya. Jika $a \rightarrow \infty$ maka $z \rightarrow 1$. Berarti *claim severity* yang diharapkan dari perusahaan lain tidak dapat menyediakan informasi tentang risiko perusahaan. Jika $s^2 \rightarrow \infty$ maka $z \rightarrow 0$. Jika untuk parameter risiko tertentu, pengalaman setiap perusahaan tidak digunakan untuk mengestimasi *claim severity* yang sesungguhnya.

## *Abstract*

*One of the tasks of actuaries in insurance companies is determining the appropriate premium rates. Credibility theory can be used to determine premium rates. Credibility theory is a technique to predict the magnitude of future the premium rates based on data from past experience. Credibility factor can be determined by three approaches, namely limited fluctuation credibility, Bayesian approach and the approach of the highest accuracy. Buhlmann model is used as tue credibility approach with the highest accuracy. Credibility factor is obtained by minimizing the square of the aberration between the expected value and variance are suspected. The characteristics of credibility factor (z) can be determined based on the value of T years observation, the variance of the deviation claim severity (a) and the variance of the deviation claim severity for the year t* $(s^2)$*, i.e if* $T \rightarrow \infty$ *then* $z \rightarrow 1$*. The more the experience, yhe client is more confidence to the expected claim severity each company. If* $a \rightarrow \infty$ *then* $z \rightarrow 1$*. It means the expected claim severity can not provide information from other companies about the risks of the company. If* $s^2 \rightarrow \infty$ *then* $z \rightarrow 0$*. For certain risk parameters, the experience of each company is not used to estimate the actual claim severity.*



✉ Alamat korespondensi:
Jl. Ahmad Yani, Kompleks FMIPA Untan, Pontianak
E-mail: neva.satya@gmail.com

ISSN 0215-9945

## Pendahuluan

Kehidupan manusia dalam kesehariannya sangat memungkinkan sekali untuk mengalami berbagai macam resiko. Sebagai contohnya adalah resiko kehilangan aset maupu harta benda, menderita sakit, mengalami cacat total bahkan sampai dengan resiko kehilangan jiwa atau meninggal. Dalam hal ini,tentu saja manusia tidak pernah tahu kapan risiko itu akan menimpa dirinya. Namun, manusia masih bisa melakukan suatu usaha untuk mengatasi resiko tersebut. Tujuannya adalah agar kerugian yang ditimbulkan oleh resiko dapat dihilangkan ataudiminimumkan. Salah satu upaya yang dapat dilakukan untuk mengatasi resiko dapat melalui pembiayaan, misalnya dengan mengasuransikan suatu resiko kepada pihak asuransi.

Asuransi dapat didefinisikan sebagai transaksi pertanggungan yang melibatkan dua pihak yaitu tertanggung (*insured*) dan penanggung (*insurer*). Dalam hal ini, penanggung menjamin pihak tertanggung dengan ketentuan bahwa ia akan mendapatkan penggantian terhadap suatu kerugian yang mungkin akan dideritanya. Kerugian timbul sebagai akibat dari suatu peristiwa yang semula belum tentu akan terjadi atau yang semula belum dapat ditentukan waktu terjadinya. Sebagai timbal baliknya pihak tertanggung diwajibkan untuk membayar sejumlah uang kepada penanggung yang besarnya ditentukan sekian persen dari dari nilai pertanggungan. Besarnya kewajiban yang harus dibayar oleh tertanggung ke pihak penanggung biasa disebut dengan premi. Dalam perusahaan asuransi terdapat sebuah divisi yang bertugas untuk menghitung premi yaitu divisi aktuaria.

Salah satu profesi yang berhubungan dengan dunia asuransi adalah aktuaris. Aktuaris merupakan sebutan untuk seorang tenaga profesional yang menerapkan ilmu matematika dalam bidang asuransi. Dengan mempelajari faktor-faktor yang terjadi di masa lalu, masa sekarang serta masa yang akan datang, seorang aktuaris berkaitan dengan masalah-masalah bisnis yang kompleks serta masalah-masalah sosial. Salah satu tugas aktuaris dalam perusahaan asuransi adalah menentukan tarif premi yang layak. Teori kredibilitas dapat digunakan untuk menentukan tarif premi.

Teori kredibilitas adalah suatu teknik untuk memprediksi besarnya tarif premi di masa depan berdasarkan data pengalaman di masa lalu.Faktor kredibilitas dapat ditentukan dengan tiga pendekatan, yaitu pendekatan kredibilitas fluktuasi terbatas, pendekatan Bayesian dan pendekatan keakuratan terbesar. Pada kredibilitas fluktuasi terbatas, suatu estimasi pendekatan mempunyai faktor kredibilitas sama dengan 1 jika pengamatan yang dilakukan cukup besar. Pendekatan Bayesian merupakan pendekatan yang menggabungkan pengamatan-pengamatan yang ditentukan dengan informasi awal untuk mendapatkan pengamatan terbaik. Pada pendekatan kredibilitas keakuratan tertinggi, faktor kredibilitas diperoleh dengan meminimumkan kuadrat sesatan antar nilai harapan dan variansi yang diduga. Pendekatan kredibilitas keakuratan tertinggi terdiri dari dua model, yaitu model Bühlmann dan model Buhlmann Straub. Dalam artikel ini membahas tentang teori kredibilitas pada model Bühlmann untuk menentukan premi.

## White Noise

Proses *white noise* merupakan barisan variabel random $X_t$ yang tidak berkorelasi dengan mean 0 dan variansi $\sigma^2 < \infty$ untuk semua $t$. Notasi yang sering digunakan untuk melambangkan proses *white noise* adalah $X_t \sim WN(0, \sigma^2)$.

**Definisi 1:** (*Wide Sense Stasioner*)

Proses runtun waktu $\{X_t, t \in T\}$ dengan $T = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ disebut proses *Wide Sense Stasioner*jika

(i) $E(X_t) =$ konstanta, independen dengan $t, \forall\ t \in Z$
(ii) $E(|X_t|^2) < \infty \forall\ t \in Z$
(iii) $Cov(X_t, X_s) = Cov(X_{t+h}, X_{s+h}), \forall t, s, h \in Z$

Dari Definisi 1 di atas dapat ditunjukkan bahwa proses *white noise* bersifat stasioner, yakni

(i) $E(X_t) = 0$, merupakan suatu konstanta
(ii) $E(|X_t|^2) \leq E(X_t^2) = \sigma^2 < \infty \forall\ t \in Z$
(iii) Dari definisi proses *white noise* diketahui $Cov(X_t, X_s) = \sigma^2$ jika dan hanya jika $t = s$ danbernilai 0 jika $t \neq s$ atau dapat dituliskan

$$Cov(X_{t+h}, X_t) = \begin{cases} \sigma^2, & h = 0 \\ 0, & h \neq 0 \end{cases}$$

dengan kata lain $Cov(X_{t+h}, X_{s+h})$ tidak bergantung pada $t$.

**Metode**

Ketika akan diuji beda rata-rata lebih dari dua populasi secara bersamaan, penggunaan uji $t$ tidak lagi efektif. Oleh karena itu diperlukanlah Analisis Variansi (ANOVA) dengan distribusi teoritis yang digunakan adalah Distribusi F.

Pada ANOVA $H0$ dan $H1$ ditetapkan sebagai berikut:

$H0$ : Semua perlakuan (kolom, baris, interaksi) memiliki rata-rata yang bernilai sama

$H1$ : Ada perlakuan (kolom, baris, interaksi) yang memiliki rata-rata yang bernilai tidak sama (berbeda).

Adapun asumsi yang digunakan dalam ANOVA adalah:

1. populasi yang akan diuji berdistribusi normal
2. varians/ragam dan populasi yang diuji sama
3. sampel tidak berhubungan satu dengan yang lain.

**Hasil dan Pembahasan**

Untuk mempelajari teori kredibilitas model Buhlmann, diperlukan pengetahuan dasar tentang statistikyang meliputi konseppeluang, nilaiharapandanvariansi, proses *white noise*, definisi dari premi dan beberapa fungsi aktuaria. Teori kredibilitas pertama kali dikembangkan oleh Mowbray pada tahun 1914 yaitu pendekatan fluktuasi terbatas. Artinya, pendekatan tentang mekanisme untuk memberikan kredibilitas penuh maupun parsial kepada para pemegang polis. Pada awalnya, penentuan nilai polis didasarkan pada banyaknya nilai klaim-klaim sebelumnya. Selanjutnya, penentuan nilai polis berkembang dengan memperhatikan rata-rata terbobot dari nilai klaim di masa lalu dan rata-rata seluruh klaim masa lalu dan sekarang. Meskipun teori kredibilitas pendekatan fluktuasi terbatas ini memberikan penyelesaian yang sederhana terhadap setiap masalah yang ada, tetapi pada kenyataannya terdapat kelemahan yaitu ketiadaan kebenaran secara teori. Kemudian Perrymen pada tahun 1932 mengembangkan pendekatan fluktuasi terbatas ke dalam masalah teori kredibilitas parsial. Teori kredibilitas fluktuasi terbatas dikembangkan lagi secara lebih modern oleh Longley–Cook pada tahun 1962 dan Hossack, Pollard dan Zehnwirt pada tahun 1983 ke dalam masalah kredibilitas penuh maupun kredibilitas parsial.

Buhlmann pada tahun 1960 mengembangkan teori kredibilitas pendekatan Buhlman yaitu menekankan bahwa masalah optimasi adalah sederhana secara aljabar dan bahwa estimator yang optimal dan MSE bergantung hanya pada momen pertama dan momen keduanya sehingga biasanya mudah untuk mengestimasi dari data statistik. Buhlmann dan Straub pada tahun 1972 mengembangkan teori kredibilitas pendekatan Buhlmann dan Straub di mana mean dari variabel random adalah sama untuk risiko yang terpilih, tetapi variansi prosesnya mempunyai proporsi yang berkebalikan dengan banyaknya *exposure* dari risiko selama periode observasi.

Seorang aktuaris dalam prakteknya sering kali dihadapkan pada berbagai permasalahan. Dalam kondisi ini, mereka harus mampu membuat prediksi premi dari sebuah kontrak grup asuransi yang telah tersedia data *claim experience* dari grup tersebut. Besarnya nilai premi secara ekstrim dapat ditentukan dengan dua cara, yaitu:

a. Besarnya biaya premi yang sama untuk setiap orang, diestimasi dengan $\bar{X}$ mean keseluruhan data. Pilihan ini biasa diterapkan jika portofolio adalah homogen, yang berarti bahwa semua sel risiko memiliki klaim mean yang sama.
b. Besarnya nilai premi untuk grup ke $j$ adalah sama dengan $\bar{X}_j$ rata-rata klaim grup tersebut. Nilai premi tersebut dibenarkan jika portofolio adalah heterogen, tapi hanya dapat diterapkan jika *claim experience* untuk masing-masing grup cukup besar.

Sebagai jalan tengahnya, terdapat cara penentuan besarnya nilai premi dengan menggunakan rata-rata tertimbang dari kedua pilihan di atas yaitu dengan rumus:

Premi Kredibilitas = $z_j\bar{X}_j + (1 - z_j)\bar{X}$

Dalamhalini, $z_j$ adalah faktor kredibilitas yang menyatakan seberapa kredibel data *individual experience* dari sel ke $j$. Penentuan nilai premi berdasarkan kolektif *experience* maupun*individual* *experience* dibenarkan karena secara umum tidak ada portofolio yang lengkap secara heterogen maupun lengkap secara homogen.

Berikut ini akan dibahas beberapa mekanisme kredibilitas yang meliputi proses *white noise*, ekspektasi dan variansi bersyarat, serta estimasi parameternya.

**Mekanisme Proses *White Noise* pada Model Bühlmann**

Diberikan variabel random $X_{jt}$ yang menggambarkan *claim severity* untuk perusahaan ke-$j$, $j = 1, 2, \ldots, J$ pada tahun ke-$t$, $t = 1, 2, \ldots, T$. Diasumsikan bahwa pada setiap sel hanya terdapat kontrak tunggal dan setiap sel dapat diobservasi sampai pada periode observasi ke-$T$. Dalam hal ini, diasumsikan juga bahwa statistic *claim severity* adalah jumlahan dari mean $m_j$ dan '*white noise*', di mana semua $X_{jt}$ adalah independen berdistribusi $N\,(m_j, s^2)$, dengan ketidaksamaan mean $m_j$ untuk setiap sel, tetapi denganVariansi yang sama $(s^2 > 0)$. Untuk memenuhi asumsi tersebut, dapat digunakan suatu teknik statistika yaitu analisis variansi (ANAVA). Apabila hipotesis nol yang menyatakan semua $m_j$ bernilai sama ditolak, maka terdapat Variasi di antara rata-rata sel $\overline{X}_j$ di sekitar rata-rata keseluruhan $\overline{X}$ . Jika hipotesis nol diterima, maka secara statistik jelas dibuktikan bahwa *claim severity* bersifat homogen sehingga diasumsikan $m_j$ dapat diperoleh dengan mekanisme peluang yaitu *white noise* yang mengakomodasi deviasi dari mean setiap sel. Jadi $X_{jt}$ dapat didekomposisi oleh bentuk sebagai berikut :

$$X_{jt} = m + \Xi_j + \Xi_{jt}; \quad j = 1, 2, \ldots, J \text{ dan } t = 1, 2, \ldots, T \qquad (1)$$

Di mana:

$\Xi_j$ dan $\Xi_{jt}$ merupakan variabel random yang saling independen

$E(\Xi_j) = 0$

$Var(\Xi_j) = a$

$E(\Xi_{jt}) = 0$

$Var(\Xi_{jt}) = s^2$.

Sama dengan nilai kredibilitas

$z\overline{X}_j + (1-z)\overline{X}$ ,

Karena Variansi dari $X_{jt}$ pada (1) sama dengan jumlahan variansi dari komponennya maka persamaan (1) dapat dikatakan sebagai model komponen variansi (*variance components models*). Model tersebut merupakan bentuk sederhana dari model klasik Bühlmann. Karena diasumsikan antara komponennya saling independen, maka pada model Bühlmann korelasinya sama dengan nol (Dean 2005). Ketika model Bühlmann memiliki variansi yang sama untuk semua observasi dan banyaknya polis pada setiap sel sama maka disebut dengan model Bühlmann seimbang (*balanced Bühlmann model*).

Berikut ini adalah interpretasi komponen model Bühlmann:

a. Komponen $m$ adalah mean keseluruhan; menginterpretasikan *claim severity* yang diharapkan untuk seluruh perusahaan.
b. Komponen $\Xi_j$ dinotasikan sebagai deviasi acak dari *claim severity* yang diharapkan pada perusahaan ke-$j$. Distribusi dari $\Xi_j$ menggambarkan struktur risiko dari *claim severity*, sehingga diketahui sebagai distribusi struktur (*structure distribution*). Parameter *m, a* dan $s^2$ yang mengkarakterisasi struktur risiko disebut dengan parameter struktural (*structural parameter*).
c. Komponen $\Xi_{jt}$ dinotasikan sebagai deviasi *claim severity*untuk tahun ke-$t$ dari claim severity yang diharapkan yang menggambarkan variasi diantara *claim severity* yaitu variasi dari *experienceclaim severity* dalam suatu waktu melewati baik dan buruknya keberuntungan dari suatu perusahaan.

**Teorema 2: Model Bühlmann seimbang; estimator homogen**

Diasumsikan jumlah klaim $X_{jt}$ untukperusahaan ke-$j$ pada tahun ke-$t$ dapat dimodelkan seperti pada model (1). Maka kombinasi linier homogen $g_{JT}X_{JT} + \ldots + g_{JT}X_{JT}$ adalah prediktor tak bias terbaik untuk $X_{JT+1}$ dalam meminimalkan mean error kuadrat (MSE),

$$E\left[\left\{X_{JT+1} - g_{jt}X_{jt} - \ldots g_{JT}X_{JT}\right\}^2\right]$$

dengan:

$$z = \frac{aT}{aT + s^2}$$

$$\overline{X} = \frac{1}{JT}\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T} X_{jt}$$

$$\overline{X}_j = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_{jt}$$

(Buhhlmann 2005)

**Bukti:**

Mean error kuadrat (MSE) di atas dapat ditulis:

$$E\left[\left\{X_{JT+1} - (1-z)\overline{X} - z\overline{X}_j\right\}^2\right]$$

$$= E\left[\left(X_{jT+1} - \overline{X}\right)^2\right] - 2zE\left[\left(X_{j,T+1} - \overline{X}\right)\left(\overline{X}_j - \overline{X}\right)\right] + z^2E\left[\left(\overline{X}_j - \overline{X}\right)^2\right]$$

Oleh karena,

$E\left[X_{j,T+1} - \overline{X}\right] = 0$ dan $E\left[\overline{X}_j - \overline{X}\right] = 0$, maka

$$E\left[\left\{X_{JT+1} - (1-z)\overline{X} - z\overline{X}_j\right\}^2\right]$$

$$= Var\left(X_{j,T+1} - \overline{X}\right) - 2z\operatorname{cov}\left[X_{j,T+1} - \overline{X}, \overline{X}_j - \overline{X}\right] + z^2 Var\left(\overline{X}_j - \overline{X}\right)$$

Bentuk kuadratik dalam z di atas dapat minimal untuk z yaitu:

$$z = \frac{\operatorname{cov}\left[X_{j,T+1} - \overline{X}, \overline{X}_j - \overline{X}\right]}{Var\left(\overline{X}_j - \overline{X}\right)}$$

Selanjutnya, untuk mendapatkan nilai z maka nilai dari cov $\left(\Xi_j + \Xi_{jt}, \Xi_j + \Xi_{ju}\right)$ dapat ditentukan yaitu :

$$E\left(\Xi_i\Xi_j + \Xi_j\Xi_{ju} + \Xi_j\Xi_{ju} + \Xi_{1t}\Xi_{ju}\right) - \left[E(\Xi_i) + E(\Xi_{it})\right]\left[E(\Xi_j) + E(\Xi_{ju})\right]$$

Perhatikan bahwa:

a. Untuk $i \neq j$, maka cov $\left(\Xi_j + \Xi_{jt}, \Xi_j + \Xi_{ju}\right) = 0$

b. Untuk $i = j$ dan $t \neq u$ maka

$$\operatorname{cov}\left(\Xi_j + \Xi_{jt}, \Xi_j + \Xi_{ju}\right)$$

$$= E\left(\Xi_i^2 + \Xi_j\Xi_{ju} + \Xi_j\Xi_{ju} + \Xi_{1t}\Xi_{ju}\right) - \left[E(\Xi_i) + E(\Xi_{it})\right]\left[E(\Xi_j) + E(\Xi_{ju})\right]$$

Oleh karena,

$E\left(\Xi_i^2\right) = Var\left(\Xi_i\right) = a$ maka cov$\left(\Xi_j + \Xi_{jt}, \Xi_j + \Xi_{ju}\right) = a$

c. Untuk $i = j$ dan $t = u$ maka

cov $\left(\Xi_j + \Xi_{jt}, \Xi_j + \Xi_{ju}\right) = E\left(\Xi_i^2 + 2\Xi_i\Xi_{it} + \Xi_{it}^2\right) - \left[E(\Xi_i) + \right]\left[E(\Xi_{it})\right]$

Oleh karena $E\left(\Xi_{it}^2\right) Var\left(\Xi_{it}\right) = s^2$ maka cov$\left(\Xi_i + \Xi_{it}, \Xi_j + \Xi_{ju}\right) = a + s^2$

Jadi,

$$z = \frac{\operatorname{cov}\left[X_{jT+1}, \overline{X}_j\right]}{Var\left(\overline{X}_j\right)}$$

$$= \frac{T^2 \operatorname{cov}\left(\Xi_j + \Xi_{jT+1}, \Xi_j + \frac{1}{T}\sum_{t+1}^{T}\Xi_{jt}\right)}{\operatorname{cov}\left(T\Xi_j + \sum_{t=1}^{T}\Xi_{jt}, T\Xi_j + \sum_{t=1}^{T}\Xi_{jt}\right)}$$

$$= \frac{aT}{aT + s^2}$$

Nilai kredibilitas $z\overline{X}_j + (1-z)\overline{X}$ hanya merupakan suatu statistik jika parameter $s^2$ dan $a$ telah diketahui. Jadi di dalam mencari faktor kredibilitas dengan estimator homogen diperlukan asumsi bahwa $s^2$ dan $a$ diketahui.

**Teorema 3: Model Bühlmann seimbang; estimator inhomogen**

Diasumsikan jumlah klaim $X_{jt}$ untuk perusahaan ke-j pada tahun ke-t dapat dimodelkan seperti pada model (1). Maka kombinasi linier inhomogen $g_0 + g_{1t}X_{1j} + \ldots + g_{jt}X_{jt}$, adalah prediktor tak bias terbaik untuk $X_{jT+1}$dalam hal meminimalkan mean error kuadrat (MSE).

$$E\left[\left\{X_{JT+1} - g_{jt}X_{jt} - \ldots g_{JT}X_{JT}\right\}^2\right]$$

(Buhhlmann 2005)

**Bukti:**

Mean error kuadrat (MSE) di atas dapat ditulis:

$$E\left[\{X_{jT+1} - g_0 - g_1\overline{X} - g_2\overline{X}\}^2\right] =$$

$$\operatorname{var}\left[X_{j,T+1} - g_1\overline{X} - g_2\overline{X}_j\right] + \left\{E\left(X_{j,T+1} - g_0 - g_1\overline{X} - g_2\overline{X_j}\right)^2\right\}$$

Jika dipilih $g_0 = m(1 - g_1 - g_2)$ maka

$$\left\{E\left(X_{j,T+1} - g_0 - g_1\overline{X} - g_2\overline{X}_j\right)\right\} = 0$$

Oleh karena,

$$\operatorname{cov}\left(X_{j,T+1} - \left(g_2 - \frac{g_1}{J}\right)\overline{X}_j, g_1\left(\overline{X} - \frac{\overline{X}_j}{J}\right)\right) = 0 \text{ maka}$$

$$E\left[\{X_{jT+1} - g_0 - g_1\overline{X} - g_2\overline{X}\}^2\right] = \operatorname{var}\left[X_{j,T+1} - \left(g_2 - \frac{g_1}{j}\right)\overline{X}_j - g_1\left(\overline{X} - \frac{\overline{X}_j}{J}\right)\right]$$

Jika diambil $g_1 = 0$ maka persamaan di atas menjadi optimal yaitu,

$$Var\left(X_{j,T+1} - g_2\overline{X_1}\right)\operatorname{var}\left(X_{J,T+1}\right) - 2g_2\operatorname{cov}\left(X_{J,T+1}, \overline{X}_1\right) + g_2^1\operatorname{var}\left(\overline{X_j}\right)$$

Maka $g_2$ yang meminimalkan persamaan di atas adalah,

$$g_2 = \frac{\operatorname{cov}\left(X_{j,T+1}, \overline{X}\right)}{\operatorname{var}\left(\overline{X}_j\right)} = \frac{aT}{aT + z^2} = z$$

Jika estimator linier inhomogen dari $g_0 + g_1\overline{X} + g_2\overline{X}_j = (1-z)m + z\overline{X}_j$

Jadi pada di dalam mencari faktor kredibilitas dengan estimator inhomogen selain asumsi $s^2$ dan $a$ diketahui juga parameter $m$ sudah diketahui nilainya.

**Mekanisme ekspektasi dan variansi bersyarat modelBühlmann**

Diberikan $X_{jt}$ dinotasikan sebagai variabel random yang mempresentasikan jumlah klaim di perusahaan ke-$j$ pada tahun ke-$t$, $j = 1, 2, \ldots, J$ dan $t = 1, 2, \ldots, T$ dengan $T \geq 2$ dan $J \geq 2$.

Akan dicari estimasi dari ekspektasi bersyarat *claim severity* untuk perusahaan ke-$j$ jika diberikan realisasi dari variabel random

$$X_{j,1} = x_{j,1}, X_{j,2} = x_{j,2}, \ldots, X_{j,T} = x_{j,T}$$

Dari $T$ tahun prior yaitu:

$$E\left(X_{j,T+1}\middle| X_{j,t}=x_{j,1}, X_{j,2}=x_{j,2}\ldots, X_{j,T}=x_{j,T}\right)$$

Jika $X_j=\left(x_{j,1}, x_{j,2}\ldots, x_{j,T}\right)$ dinotasikan sebagai vektor random dari *claim severity* untuk perusahaan ke-*j* dengan asumsi:

a. Vektor random $X_1, X_2, \ldots, X_j$ diasumsikan saling independen. Dengan kata lain pengalaman dari satu perusahaan tidak akan mempengaruhi perusahaan yang lain.
b. Untuk $j = 1, 2, \ldots, J$. Distribusi dari setiap elemen pada $X_j$ bergantung pada parameter risiko yang tidak diketahui $\theta_j$ dimana $\theta_j$ adalah realisasi dari variabel random $\Theta_j$
c. Variasi random $\Theta_1, \Theta_2 \ldots, \Theta_j$ saling independen dan berdistribusi identik
d. Jika diberikan *j* dan $\Theta_j$ variabel random $X_{j,1}, X_{j,2}\ldots, X_{jT}$ saling independen bersyarat.
e. Setiap kombinasi dari tahun dan perusahaan mempunyai jumlah yang sama dari unit eksposure / tertanggung.

Untuk $j = 1, 2, \ldots, J$ dan $t = 1, 2, \ldots, T$ didefinisikan:

$\mu(\Theta_j)=E\left(X_{jt}\middle|\Theta_j\right)$ dan $v(\Theta_j)=\operatorname{var}\left(X_{jt}\middle|\Theta_j\right)$

Didefinisikan juga nilai ekspektasi dari $\mu(\Theta_j)$ yaitu $m=E\left[\mu(\Theta_j)\right]$,

Variasi dari $\mu(\Theta_j)$ yaitu $a=\operatorname{var}\left[\mu(\Theta_j)\right]$ dan Ekspektasi dari $v(\Theta_j)$ yaitu $s^2=E\left[v(\Theta_j)\right]$

.

Sehingga,

$$E\left(X_{jt}\right)=m, \operatorname{var}\left(X_{jt}\right)=s^2+a \text{ dan } \operatorname{cov}\left(X_{jt}, X_{js}\right)=a \text{ untuk } s\neq 1$$

Pada model Bühlmann, inti masalahnya adalah menentukan estimasi titik dari:

$$E\left(\mu(\Theta_j)\middle| X_{j,t}=x_{j,t}, X_{j,2}=x_{j,2}\ldots, X_{j,T}=x_{j,T}\right)$$

Oleh karena $E\left(X_{j,T+1}\middle|\Theta\right)=\mu(\Theta_j)$ maka nilai ekspektasi tersebut sama dengan $E\left(X_{j,T+1}\middle| X_{j,t}=x_{j,t}, X_{j,2}=x_{j,2}\ldots, X_{j,T}=x_{j,T}\right)$. Sehingga untuk menentukan estimasi tersebut adalah dengan memilih estimator linier dari ekspektasi bersyarat $\mu(\Theta_j)$ dari bentuk

$$g_0+g_{jt}X_{jt}+g_{j2}X_{j2}+\ldots.+g_0+\sum_{t=1}^{T} g_{jt}X_{jt.}$$

Estimator linier dipilih untuk menentukan koefisien dari $g_0, g_{j,T}\ldots, g_{j,T}$ yang meminimumkan

$$Q=E\left[\left(\mu(\Theta_j)-g_0-\sum_{t=1}^{T} g_{jt}X_{jt}\right)^2\right]$$ dengan

cara mendiferensialkan nilai *Q* terhadap koefisien $g_0, g_{j1}\ldots g_{jT}$ yaitu:

a. Menentukan nilai koefisien $g_0$

$$\frac{\partial Q}{\partial g_0}=0 \Rightarrow E\left[2\left(\mu(\Theta_j)-\hat{g}_0-\sum_{T=1}^{T} g_{jt}X_{jt}\right)(-1)\right]=0$$

$$\Rightarrow E\left(X_{j,T+1}\right)=\hat{g}_0+\sum_{t=1}^{T} g_{jt}E\left(X_{jt}\right) \qquad (2)$$

Oleh karena $E\left(X_{j,T+1}\right)=E\left(X_{jt}\right)=m$ maka Persamaan (2) menjadi

$$\sum_{t=1}^{T} g_{jt}=1-\frac{\hat{g}_0}{m} \qquad (3)$$

b. Menentukan nilai parameter $g_{jt}$ dimana $t$ = 1, 2,.......,$T$ :

$$\frac{\partial Q}{\partial g_0} = 0 \Rightarrow E\left[2\left(\mu(\Theta_j) - g_0 - \sum_{T=1}^{T} \hat{g}_{jt} X_{jt}\right)(-X_{jt})\right] = 0, s = 1,2,\ldots\ldots,T$$

$$\Rightarrow E(X_{j,T+1}X) = g_0 E(X_{js}) + \sum_{t=1}^{T} \hat{g}_{jt} E(X_{js} X_{jt}) \qquad (4)$$

Dengan mengurangkan Persamaan (4) dengan $E(X_{jt})$ kali Persamaan(2)

Diperoleh:

$$\text{cov}(X_{j,T+1}, X_{jt}) = \sum_{t=1}^{T} \hat{g}_{jt} \,\text{cov}(X_{js} X_{jt})$$

$$a = \sum_{t=1}^{T} \hat{g}_{jt} a + \hat{g}_{js} s^2$$

Jadi,

$$\hat{g}_{js} = \frac{a}{s^2}\left(1 - \sum_{t=1}^{T} \hat{g}_{jt}\right)$$

Karena $1 - \sum_{t=1}^{T} \hat{g}_{jt} = \frac{g_0}{m}$ maka $\hat{g}_{js} = \frac{a\hat{g}_0}{s^2 m}$.

Selanjutnya dengan mensubstitusikan Persamaan (3) dan $\hat{g}_{jt} = \hat{g}_{js}$ diperoleh

$$1 - \frac{\hat{g}_0}{m} = \frac{a\hat{g}_0}{s^2 m} T$$

Jadi,

$$\hat{g}_0 = \frac{m}{\left(1 + \frac{aT}{s^2}\right)} = (1 - z)m$$

Dengan

$$z = \frac{T}{T + s^2/a}$$

Untuk bentuk $\sum_{t=1}^{T} \hat{g}_{jt} X_{jt} = \sum_{t=1}^{T} \frac{a\hat{g}_0}{s^2 m} X_{jt}$

$$= \sum_{t=1}^{T} \frac{a}{s^2 + aT} X_{jt}$$

$$= Z\overline{X}_j$$

Estimator linier dari ekspektasi bersyarat $\mu(\Theta_j)$

oleh bentuk $g_0 = +\sum_{t=1}^{T} g_{jt} X_{jt}$

Memiliki bentuk yang sama seperti $Z\overline{X}_j + (1 - Z)m$

Dengan Z= $\frac{aT}{aT + s^2}$ dan $\overline{X}_j = \frac{\sum_{t=1}^{T} X_{jt}}{T}$

**Estimasi parameter model Bühlmann**

Parameter $m, s^2$ dan $a$ yang terdapat di dalam model Bühlmann, pada kenyataannya tidak diketahui nilainya sehingga dibutuhkan suatu estimasi tak bias untuk mengestimasi parameter $m, s^2$ dan $a$. Berikut ini adalah estimasi untuk parameter tersebut yaitu Gaw (2004).

a. Estimasi untuk $m = E(\mu(\Theta_j))$

Telah diketahui estimasi tak bias untuk $m$ adalah

$$m = \overline{X}_{\ldots} = \frac{1}{JT}\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T} X_{jt}$$

b. Estimasi untuk $s^2 = E(\mu(\Theta_j))$

Telah diketahui estimasi tak bias untuk

$$s^2 : \hat{s}^2 = \frac{1}{J(T-1)}\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}\left(X_{jt} - \overline{X}_{js}\right)^2$$

c. Estimasi untuk $a = \text{var}(\mu(\Theta_j))$

Sebelum mengestimasi parameter $a$, diketahui bahwa nilai dari

$$E(\overline{X}_{j\bullet}|\Theta_j) = \mu(\Theta_j), \text{var}(\overline{X}_{j\bullet}|\Theta_j) = \frac{v(\Theta_j)}{T}$$

Sehingga $a = \text{var}(\overline{X}_{j\bullet}) - \frac{s^2}{T}$

Oleh karena estimasi tak bias dari *Var* $(\overline{X}_{j\bullet}) = \frac{1}{J-1}\sum_{j=1}^{J}\left(\overline{X}_{j\bullet} - \overline{X}_{\bullet\bullet}\right)^2$

Maka $\hat{a} = \frac{1}{J-1} - \sum_{j=1}^{J}\left(\overline{X}_{j\bullet} - \overline{X}_{\bullet\bullet}\right)^2 - \frac{\hat{s}^2}{T}$

**Estimasi Faktor Kredibilitas**

Pada analisis Variansi, pembilang dari $F_{Ratio}$, MSB mempunyai mean $aT + s^2$ sedangkan penyebutnya (MSW) mempunyai mean $s^2$ sehingga

$\frac{1}{F}$ akan dekat dengan $\frac{s^2}{aT+s^2}$. Jadi untuk mengestimasi faktor kredibilitas $z$ dapat digunakan $\hat{z}=1-\frac{1}{F}$ yang merupakan estimator tak bias (Dervit 2007).

$$MSW=\frac{1}{J(T-1)}\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}\left(X_{jt}-\overline{X}_j\right)^2 \text{ dan } MSB=\frac{1}{J-1}\sum_{j=1}^{J}T\left(\overline{X}_j-\overline{X}\right)^2$$

Untuk mengestimasi nilai $z=\frac{aT}{aT+s^2}$ dapat digunakan estimator $\hat{z}=1-\frac{MSW}{MSB}$

Dengan menggunakan definisi $X_{jt}=m+\Xi_j+\Xi_{jt}$ dan mendefinisikan $\overline{\Xi}_j=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\Xi_{jt}$ maka SSW dapat ditulis sebagai

$$SSW=\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}\left(X_{jt}-\overline{X}_j\right)^2=\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}\left(\Xi_{jt}-\overline{\Xi}_j\right)^2$$

Di bawah asumsi bahwa $\Xi_{jt}$ iid $N\left(0,s^2\right)$ maka apabila ruas kanan dibagi dengan $s^2$, MSW akan berdistribusi $\chi^2_{(J(T-1))}$ dan independen dengan $\overline{\Xi}_j$ karena $\overline{X}_j=m+\Xi_j+\overline{\Xi}_j$.

Jadi MSW independen dari $\overline{X}_j$, demikian juga untuk MSB.

Diasumsikan bahwa komponen $\Xi_j iidN(0,a)$, maka

Nilaidari estimator $\hat{s}$ tidak akan bernilai negatif, akan tetapi estimator $\hat{a}$ mungkin dapat bernilai negatif. Untuk kasus ini, tinjaulah MSW dan MSB yaitu

$$\frac{SSB}{a\frac{s^2}{T}}=\frac{J-1}{aT+s^2}MSB$$

berdistribusi $X^2(J-1)$.

Jika persamaan tersebut dikalikan dengan konstanta $\frac{s^2}{aT+s^2}=1-z$, maka rasio Variansi $\frac{MSB}{MSW}$ berdistribusi $F(J-1,J(T-1))$

Sehingga

$$(1-z)\frac{MSB}{MSW}=\frac{1-z}{1-\hat{z}}\approx F(J-1,J(T-1))$$

Selanjutnya, untuk mengestimasi $a=\text{var}(\Xi_j)$ digunakan max $(0,\hat{a})$ sebagai estimator walaupun konsisten tetapi estimator tak bias yang tidak kuat.

**Aplikasi Numerik**

Diberikandata premi dan data *claim severity* asuransi kebakaran dari 10 group tahun 2011 dan 2013 pada Tabel 1.

**Tabel 1.** data premi dan data *claim severity* asuransi kebakaran dari 10 group tahun 2011 dan tahun 2013

| Group | PremiTahunke | | Claim Saveritytahunke | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 1 | 2 |
| | 2011 | 2012 | 2011 | 2012 |
| 1 | 4381.52 | 4256.19 | 0.0000 | 0.00 |
| 2 | 148.91 | 86.24 | 0.00 | 0.00 |
| 3 | 581.88 | 243.22 | 0.00 | 0.00 |
| 4 | 247.66 | 434.83 | 0.00 | 0.00 |
| 5 | 594.16 | 777.45 | 0.00 | 0.00 |
| 6 | 665.16 | 641.54 | 0.00 | 60.2000 |
| 7 | 848.38 | 775.28 | 0.00 | 9.7200 |
| 8 | 1095.83 | 987.69 | 0.00 | 0.00 |
| 9 | 1240.98 | 1030.38 | 0.00 | 45.1400 |
| 10 | 861.77 | 624.12 | 0.00 | 650.0000 |

Berikut akan disajikan contoh perhitungan nilai estimasi parameter model Bühlmann Straub. Dari data yang ada terlebih dahulu ditentukan nilai $w_{j\Sigma}$ yakni total premi group ke j untuk tahun ke1 dan ke 2. Untuk group ke 1 diperoleh $w_{j\Sigma} = \sum_{t=1}^{2} w_{jt} = 8637.7100$, di mana $w_{jt}$ adalah premi group ke $j$ pada tahun ke $t$. Secara similar dapat dihitung $w_{j\Sigma}$ untuk seluruh group sehingga diperoleh jumlah dari keseluruhan $w_{j\Sigma}$ yakni $w_{\Sigma\Sigma} = \sum_{j=1}^{J} w_{j\Sigma} = 20523.1900$.

Nilai dari $X_{jt}$ adalah *claim severity* yang terjadi pada group ke *j* dan tahun ke *t*. Selanjutnya hitung nilai total *claim saverity* grup ke j pada tahun ke 1 dan ke 2 yang dinotasikan dengan $X_{jw}$.

Untuk group ke1 Nilai dari $X_{jw} = \sum_{t=1}^{T} \frac{w_{jt}}{w_{j\Sigma}} X_{jt} = 0$. Secara similar dapat dihitung $X_{jw}$ untukseluruh group sehingga diperoleh jumlah dari keseluruhan $X_{jw}$ yakni $X_{ww} = \sum_{j=1}^{J} \frac{w_{j\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} X_{jw} = 24.2821$. Nilai i $X_{ww}$ sama dengan nilai $m$. Dari data selanjutnya dihitung $S^2 = \frac{1}{J(T-1)} \sum_{j,t} w_{jt} \left(X_{jt} - X_{jw}\right)^2 =$ 2588354.5164. Dengan menggunakan hasil perhitungan yang telah dilakukan maka diperoleh estimasi parameter Bühlmann Straub $\hat{a} = \frac{\sum_j w_{j\Sigma}\left(X_{jw} - X_{ww}\right)^2 - (J-1)S^2}{w_{\Sigma\Sigma} - \sum_j w_{j\Sigma}^2 / w_{\Sigma\Sigma}}$. Langkah selanjutnya adalah menentukan nilai faktor kredibilitas, $z_j = \frac{a w_{jz}}{s^2 + a w_{jz}}$. Nilai faktor kredibilitas untuk tiap group diberikan dalam Tabel 2.

**Tabel 2.** Nilai faktor kredibilitas tiap group

| Group | FaktorKredibilitas $(z_j)$ |
|---|---|
| 1 | 0.9152 |
| 2 | 0.2271 |
| 3 | 0.5076 |
| 4 | 0.4603 |
| 5 | 0.6315 |
| 6 | 0.6202 |
| 7 | 0.6699 |
| 8 | 0.7225 |
| 9 | 0.7395 |
| 10 | 0.6500 |

## Penutup

Berdasarkan pembahasan dapat diperoleh kesimpulan bahwa karakteristik faktor kredibilitas (z) dapat ditentukan berdasarkan nilai dari T tahun observasi, variansi dari deviasi *claim severity* (a) dan variansi dari deviasi *claim severity* untuk tahun ke-*t* ($s^2$),yaitu:

1. Jika $T \to \infty$ maka $z \to 1$.
   Semakin banyak terdapat pengalaman maka semakin percaya terhadap *claim severity* yang diharapkan setiap perusahaannya.
2. Jika $a \to \infty$ maka $z \to 1$.
   Berarti *claim severity* yang diharapkan dari perusahaan lain tidak dapat menyediakan informasii tentang risiko perusahaan.
   .
3. Jika $s^2 \to \infty$ maka $z \to 0$. Jika untuk parameter risiko tertentu, pengalaman setiap perusahaan tidak digunakan untuk mengestimasi *claim severity* yang sesungguhnya.

## Daftar Pustaka

Bühlmann H. 2005. *A Course is Credibility Theory and its Applications.* Springer.

Dean CG. 2005. *Topies in Credibility Theory*. Casualty Actuarial Society.

Dervit M. 2007. *Actuarial Modeling of Claim Court: Risk Classifications*, Credibility and Bonus Molus System. John Willey.

Gaw WC. 2004. *Interval Estimation of The Credibility Factor*, Casualty Actuarial Society.