

## PEMODELAN *TOTALLY ASYMMETRIC EXCLUSION PROCESS* DUA DIMENSI UNTUK LALU LINTAS KENDARAAN PADA PERTIGAAN JALAN YANG SEARAH

R Septiana<sup>✉</sup> A Indriawati, WSB Dwandaru

Jurusan Pendidikan Fisika, FMIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, Indonesia

### Info Artikel

*Sejarah Artikel:*

Diterima Agustus 2013  
Disetujui September 2013  
Dipublikasikan Oktober 2013

*Keywords:*

*Two-dimensional TASEP; rate of input (input rate), the rate of output (output rate); density; current density.*

### Abstrak

Penelitian ini mengkaji model dinamik yaitu *Totally Asymmetric Exclusion Process* (TASEP) khususnya dalam dua dimensi (2D). Selain itu akan dibahas pula mengenai syarat batas dan aturan dinamika yang digunakan dalam pemodelan ini. TASEP telah diaplikasikan dalam berbagai bidang, salah satunya ialah pemodelan lalu lintas kendaraan (*traffic flow*). Sistem dua dimensi yang akan dikaji adalah sistem yang diskrit, yakni sistem ke kisi dua dimensi. Sistem ini dimodifikasi menjadi bentuk pertigaan (*junction*) yang searah. Lebih jauh lagi, kendaraan yang melalui pertigaan dimodelkan sebagai partikel yang melompat dari satu kisi ke ke kisi yang lain. Nilai kepadatan dan rapat arus partikel dalam sistem tersebut ditentukan secara numerik. Persamaan kontinuitas untuk menggambarkan dinamika partikel dalam TASEP diselesaikan menggunakan metode Euler. Profil kepadatan dan rapat arus partikel dipengaruhi oleh laju masukan (*input rate*) dan laju keluaran (*output rate*) lompatan partikel.

### Abstract

*The research analyzed a dynamic model of Totally Asymmetric Exclusion Process (TASEP), especially in two dimensions (2D) and also the boundary and rules dynamic conditions used in this modeling. TASEP has been applied in various fields, one of them is the modeling of vehicle traffic. Two-dimensional system that will be studied is the discrete system of two-dimensional lattice system. The system is modified into the form of unidirectional T-junction. Furthermore, the vehicles that pass the junction are modeled as particles that jump from one lattice to another lattice. The value of the density and current density of particles in the system is determined numerically. The continuity equation to describe the dynamics of particles in TASEP is solved by using Euler's method. The profiles of particle density and current density are influenced by the rate of input and output rate of particle jumps.*

© 2013 Universitas Negeri Semarang

<sup>✉</sup> Alamat korespondensi:

Karang Malang, Yogyakarta, 55281  
E-mail: wipsarian@yahoo.com

**Pendahuluan**

Gejala fisis yang ada di alam dapat dipahami dengan dilakukannya eksperimen. Di bidang fisika, eksperimen merupakan sesuatu yang harus dilakukan. Dengan melakukan eksperimen, teori-teori yang ada dapat diuji dan dapat pula tersusun teori-teori baru. Suatu metode alternatif yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan fisis yang tidak dapat dieksperimentasikan secara langsung adalah komputasi numerik.

Dalam penelitian ini, komputasi numerik akan dilakukan pada pemodelan *Totally Asymmetric Exclusion Process* (TASEP) (Dwandaru 2010). TASEP dalam satu dimensi adalah suatu *driven system* dimana partikel yang menempati kekisi satu dimensi akan bergerak ke kekisi di sampingnya yang terdekat jika tidak ada partikel lain yang menempati kekisi di sebelahnya. Lompatan partikel tersebut hanya ke satu arah yaitu kanan atau kiri, tetapi tidak bisa keduanya. TASEP terspesifikasi oleh aturan dinamika dan syarat batas (Parmeggiani *et al.* 2004; Derrida *et al.* 1992).

Syarat batas yang digunakan adalah syarat batas terbuka (*open boundaries*). Setiap batas terbuka pada kekisi ditandai oleh adanya *reservoir* partikel. Dalam TASEP satu dimensi, sebuah *reservoir* berperan sebagai sumber partikel, sedangkan *reservoir* lainnya berlaku sebagai penampung partikel (yang keluar dari kekisi). Sebuah partikel dapat masuk ataupun keluar dari *reservoir* tersebut. Jenis syarat batas terbuka ini menghasilkan fase diagram yang memperlihatkan kepadatan partikel yang tak seragam (Dwandaru 2010).

Aturan dinamika yang digunakan dalam kajian ini adalah *sequential updating*. Untuk sistem-sistem kekisi, aturan dinamika ini berkaitan erat dengan lompatan partikel-partikel dari satu kisi ke kisi tetangganya. Proses lompatan ini sendiri dispesifikasi oleh besaran yang disebut rerata lompatan,  $k_{i(i+1)}(t)$ .  $k_{i(i+1)}(t)$  adalah peluang sebuah partikel untuk melompat dari kisi  $i$  ke kisi  $i+1$  per langkah waktu.

Terdapat dua besaran yang akan dibahas dalam kajian ini, yaitu kepadatan  $[\rho_i(t)]$  dan rapat arus  $[J_{i(i+1)}(t)]$ .  $\rho_i(t)$  adalah rerata *ensemble*

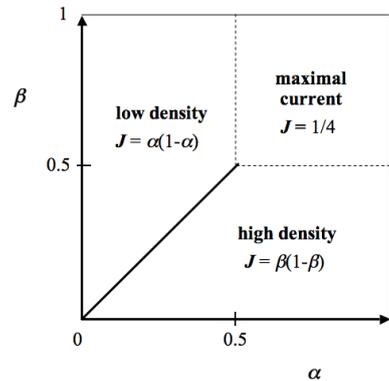
partikel yang menduduki kekisi ke- $i$  pada waktu  $t$ . Sedangkan,  $J_{i(i+1)}(t)$  adalah rerata jumlah lompatan partikel dari kisi ke- $i$  ke kisi- $(i+1)$  pada waktu  $t$ . Untuk model TASEP hubungan antara kepadatan dan rapat arus dapat dinyatakan dalam persamaan kontinuitas:

$$\nabla \cdot J_{i(i+1)}(t) = -\frac{\partial \rho_i(t)}{\partial t} \tag{1}$$

Untuk sistem yang diskrit seperti TASEP, dapat digunakan metode Euler, yaitu:  $\nabla J_i(t) = J_{i(i+1)}(t) - J_{(i-1)i}(t)$  sehingga penyelesaian persamaan kontinuitas dapat dituliskan sebagai:

$$\rho_i(t) = \rho_i(t) - \int_0^t dt' [J_{i(i+1)}(t') - J_{(i-1)i}(t')]. \tag{2}$$

Terdapat empat fase kepadatan partikel untuk TASEP dalam satu dimensi, yaitu: *low density*, *high density*, *coexistence phase*, dan *maximal current*. Keempat fase ini dapat diamati pada Gambar 1.



**Gambar 1.** Diagram fase kepadatan dan rapat arus.

Profil kepadatan *low density* didapatkan dengan syarat  $\alpha < \beta$  dan  $\alpha < 0.5$ . Fase *high density* didapatkan untuk  $\alpha > \beta$  dan  $\beta < 0.5$ . *Coexistence phase* (pada Gambar 1 berupa garis diagonal) antara *high* and *low densities* didapatkan untuk  $\alpha = \beta$  dan  $\alpha, \beta < 0.5$ . Untuk yang terakhir, fase *maximal current* menghasilkan nilai rapat arus maksimum, yaitu:  $J = 0.25$ . Fase ini didapatkan jika  $\alpha, \beta > 0.5$  [1, 3].

Dalam penelitian ini akan dibahas mengenai pemodelan lalu lintas kendaraan pada persimpangan jalan sebagai sistem partikel yang saling berinteraksi dengan mengacu pada mekanika statistik dalam lingkup ketidak seimbangan (Chowdury 2003; Zwanzig 2001 & Bellac 2007). Dalam penelitian ini akan dibahas TASEP 2D untuk memodelkan bentuk pertigaan jalan (*junction*) yang searah. Dalam model kekisi, jalan untuk pergerakan lalu lintas diwakili oleh

kekisi. Sedangkan kendaraan (mobil) diwakili oleh partikel.

Lebih jauh lagi, ada dua kasus yang akan ditinjau, yakni i) pertigaan dengan dua masukan dan satu keluaran, dimana laju masukan partikel adalah  $\alpha_1$  dan  $\alpha_2$ , dan laju adalah  $\beta_2$  (Gambar 2), ii) pertigaan dengan satu masukan dan dua keluaran, dimana laju masukan adalah  $\alpha_1$  dan laju keluaran sebesar  $\beta_1$  dan  $\beta_2$ . Besarnya laju masukan partikel, laju keluaran partikel, serta laju lompatan partikel pada kekisi akan mempengaruhi rapat arus dan kepadatan partikel di dalam kisi pada sistem dua dimensi.

Dalam penelitian ini, skema sequential dinamik 2D pada setiap langkah waktu  $t \rightarrow t+1$  (waktu diskrit) dapat dideskripsikan sebagai berikut. sebuah kisi  $\mathbf{i} = i_x \hat{e}_x + i_y \hat{e}_y = (i_x, i_y) \in \mathcal{L}^2$  dipilih secara acak dengan peluang  $\frac{1}{|N(N+2)|}$ . Dengan analogi persamaan (Dwandaru 2010; Parmeggian 2004), rapat arus TASEP pada sistem 2D menjadi,  $J_{i(i+\hat{e}_x)}^r(t) = k_{i(i+\hat{e}_x)}^r(t) \rho_i(t) [1 - \rho_{i+\hat{e}_x}(t)]$ , (3) dan

$$J_{i(i+\hat{e}_y)}^u(t) = k_{i(i+\hat{e}_y)}^u(t) \rho_i(t) [1 - \rho_{i+\hat{e}_y}(t)], \quad (4)$$

dimana  $J_{i(i+\hat{e}_x)}^r(t)$  adalah rapat arus ke kanan, dan  $J_{i(i+\hat{e}_y)}^u(t)$  adalah rapat arus ke atas.

Evolusi kepadatan partikel terhadap waktu dapat diperoleh dari persamaan kontinuitas dua dimensi berikut ini.

$$\frac{\partial \rho_i(t)}{\partial t} = \frac{1}{N(N-2)} \left\{ [J_{i(i-\hat{e}_x)}^r(t) - J_{i(i+\hat{e}_x)}^r(t)] + [J_{i(i-\hat{e}_y)}^u(t) - J_{i(i+\hat{e}_y)}^u(t)] \right\}. \quad (5)$$

Adanya pengaruh laju masukan, laju keluaran, dan laju antar kekisi terhadap besarnya kepadatan dan rapat arus partikel akan memunculkan berbagai perilaku dinamik partikel di dalam kisi. Dengan melakukan pemodelan ini, dapat diketahui gambaran kepadatan dan rapat arus kendaraan di suatu jalan pertigaan.

Tujuan penelitian ini adalah Menganalisis perilaku partikel pada sistem dua dimensi yang memiliki dua laju masuk partikel dengan  $\alpha_1 = \alpha_2$  dan satu laju keluaran partikel  $\beta_2$ , terutama mengamati kepadatan dan rapat arus partikel di dalam sistem dan menganalisis perilaku partikel pada sistem dua dimensi yang memiliki satu laju

masuk partikel  $\alpha_1$  dan dua laju keluaran partikel dengan  $\beta_1 = \beta_2$ , terutama mengamati kepadatan dan rapat arus partikel di dalam sistem.

### Metode Penelitian

Instrumen penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah satu unit komputer, perangkat lunak Dev C++, dan perangkat lunak MS Excel. Data hasil penelitian ini diperoleh dengan menjalankan program yang telah dibuat dengan mengubah-ubah beberapa variabel. Variabel yang diubah-ubah adalah  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $\beta_2$  untuk kasus pertigaan dengan dua masukan serta satu keluaran, dan  $\alpha_1, \beta_1 = \beta_2$  untuk kasus pertigaan dengan satu masukan dan dua keluaran.

### Hasil dan Pembahasan

#### TASEP 2D dengan dua masukan, satu keluaran

Kepadatan partikel dalam sistem dua dimensi yang berbentuk pertigaan memiliki enam jenis fase kepadatan, yakni: *high density-high density* (HD-HD), *coexistence phase-high density* (CP-HD), *low density-coexistence phase* (LD-CP), *low density-low density* (LD-LD), *maximal current-low density* (MC-LD) dan *high density-maximal current* (HD-MC).

Tabel 1 menunjukkan terjadinya transisi (perubahan) fase kepadatan untuk laju masukan  $\alpha_2 = \alpha_1 = 0.1$  dan laju keluaran  $\beta_2$  dari 0.1 hingga 1.0 yaitu dari fase HD-HD hingga menjadi LD-LD. Pada  $\alpha_2 = \alpha_1 > 0,1$  dengan variasi laju keluaran  $\beta_2$  dari 0.1 hingga ke 1.0 terjadi transisi (perubahan) fase dari HD-HD menjadi HD-MC.

Profil kepadatan untuk TASEP dua dimensi dengan dua masukan ( $\alpha_2, \alpha_1$ ) dan satu keluaran ( $\beta_2$ ) menghasilkan banyak variasi fase kepadatan yaitu: Untuk  $\alpha_2 = \alpha_1 = 0.1$ ;  $\beta_2 = 0.1$  terjadi fase kepadatan HD-HD. Ketika  $\alpha_2 = \alpha_1 = 0.1$ ;  $\beta_2 = 0.2$  terjadi fase kepadatan CP-HD. Selanjutnya  $\alpha_2 = \alpha_1 = 0.1$ ;  $\beta_2 = 0.3$  terjadi fase kepadatan LD-CP. Untuk  $\alpha_2 = \alpha_1 = 0.1$ ;  $\beta_2 > 0.3$  terjadi fase kepadatan LD-LD. Sedangkan untuk  $\alpha_2 = \alpha_1 > 0.1$ ;  $0.1 \leq \beta_2 < 0.5$  terjadi fase kepadatan HD-HD dan  $\alpha_2 = \alpha_1 > 0.1$ ;  $\beta_2 \geq 0.5$  terjadi fase kepadatan HD-MC.

**Tabel 1.** Berbagai fase kepadatan untuk dua laju masukan partikel ( $\alpha_1 = \alpha_2$ ) dan satu laju keluaran ( $\beta_2$ ).

$\alpha_2 = \alpha_1$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\beta_2$										
0,1	HD-HD									
0,2	CP-HD	HD-HD								
0,3	LD-CP	HD-HD								
0,4	LD-LD	HD-HD								
0,5	LD-LD	HD-MC								
0,6	LD-LD	HD-MC								
0,7	LD-LD	HD-MC								
0,8	LD-LD	HD-MC								
0,9	LD-LD	HD-MC								
1,0	LD-LD	HD-MC								

**Tabel 2.** Berbagai fase kepadatan untuk satu laju masukan partikel ( $\alpha_1$ ) dan dua laju keluaran ( $\beta_1, \beta_2$ ).

$\frac{\alpha_1}{\beta_1 = \beta_2}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,1	LD-LD	LD-CP	CP-HD	HD-HD						
0,2	LD-LD	LD-LD	LD-LD	LD-LD	LD-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD
0,3	LD-LD	LD-LD	LD-LD	LD-LD	LD-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD
0,4	LD-LD	LD-LD	LD-LD	LD-LD	LD-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD
0,5	LD-LD	LD-LD	LD-LD	LD-LD	LD-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD
0,6	LD-LD	LD-LD	LD-LD	LD-LD	LD-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD
0,7	LD-LD	LD-LD	LD-LD	LD-LD	LD-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD
0,8	LD-LD	LD-LD	LD-LD	LD-LD	LD-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD
0,9	LD-LD	LD-LD	LD-LD	LD-LD	LD-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD
1,0	LD-LD	LD-LD	LD-LD	LD-LD	LD-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD	MC-LD

Dengan melihat Tabel 2, dapat diamati terjadinya tansisi fase kepadatan partikel. Salah satu fase kepadatan adalah *low density-low density* (LD-LD) adalah ketika  $\alpha_1 = 0.1; \beta_1 = \beta_2 = 0.1$ . Dari keadaan tersebut, bila  $\alpha_1$  diperbesar menjadi 0.2 sedangkan  $\beta_1, \beta_2$  tetap, fase kepadatan berubah

menjadi LD-CP. Kemudian bila  $\alpha_1$  diperbesar lagi menjadi 0.3 fase kepadatan akan berubah menjadi CP-HD. Fase kepadatan akan mencapai kepadatan yang tinggi yaitu HD-HD bila besarnya  $\alpha_1$  mencapai 0.4 sampai 1.0 dengan  $\beta_1, \beta_2$  tetap 0.1. Kepadatan partikel yang tinggi tersebut (HD-HD) dapat

diturunkan dengan memperbesar  $\beta_1, \beta_2$ . Pada  $\alpha_1=0.4$  dan  $0.5$  bila  $\beta_1 = \beta_2$  diperbesar, fase akan berubah menjadi LD-LD, sedangkan untuk  $\alpha_1=0.6 - 1.0$ , fase kepadatannya akan berubah menjadi MC-LD.

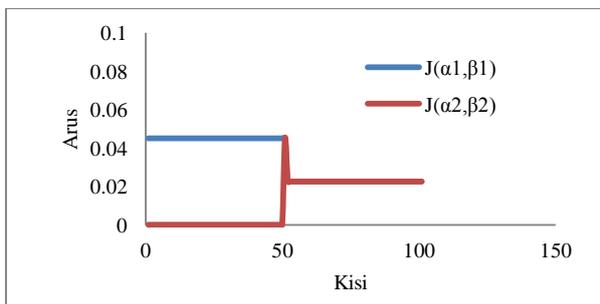
Secara keseluruhan, berdasarkan hasil penelitian, LD-LD terjadi ketika  $\alpha_1=\beta_1 = \beta_2=0.1$  dan  $\alpha_1 \leq 0.5, \beta_1=\beta_2 \geq 0.2$ . LD-CP terjadi hanya bila  $\alpha_1=0.2, \beta_1 = \beta_2=0.1$ . Selanjutnya fase CP-HD adalah fase kepadatan ketika  $\alpha_1 = 0.3, \beta_1 = \beta_2 = 0.1$ . HD-HD terjadi ketika  $\alpha_1 \geq 0.4; \beta_1 = \beta_2 = 0.1$  dan MC-LD adalah fase kepadatan dimana  $\alpha_1 \geq 0.6, \beta_1 = \beta_2 \geq 0.2$ .

Kepadatan partikel pada sistem dua dimensi yang berbentuk pertigaan dengan dua masukan dan satu keluaran lebih tinggi dari kepadatan partikel pada sistem dua dimensi berbentuk pertigaan yang memiliki dua keluaran dan satu masukan.

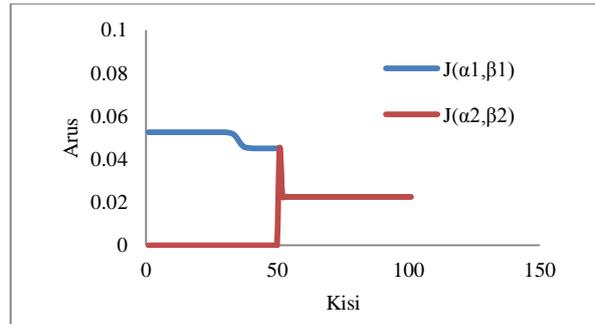
Jika partikel yang bergerak pada sistem dua dimensi berbentuk pertigaan dianalogikan dengan lalu lintas kendaraan pada suatu jalan searah yang berbentuk pertigaan, maka pertigaan dengan dua jalan masuk dan satu jalan keluar akan memiliki kepadatan tinggi, yang dapat dilihat pada Tabel 1. Apabila pertigaan tersebut memiliki satu jalan masuk dan dua jalan keluar maka kepadatan lalu lintas kendaraan akan lebih rendah. Hal ini dapat dilihat pada Tabel 2.

**Rapat Arus (Current Density)**

Hasil penelitian untuk rapat arus berupa grafik. Sebagai salah contoh dapat dilihat pada grafik berikut ini.



**Gambar 3.** Rapat arus dengan  $\alpha_1 = 0.4; \beta_1 = \beta_2 = 0.1$ .



**Gambar 4.** Rapat arus partikel pada fase CP-HD dengan  $\alpha_1 = 0.3; \beta_1 = \beta_2 = 0.1$ .

Besarnya rapat arus bergantung pada besarnya  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1,$  dan  $\beta_2$ . Baik untuk satu keluaran maupun dua keluaran, bentuk grafik sama yaitu berupa garis lurus kecuali untuk fase kepadatan yang mengandung CP. Untuk pola rapat arus fase CP terjadi sedikit kenaikan dan penurunan yang lebih jelasnya dapat dilihat pada Gambar 4.

**Penutup**

Besar kepadatan untuk kasus TASEP dua dimensi dengan dua masukan ( $\alpha_2 = \alpha_1$ ) dan satu keluaran ( $\beta_2$ ) menghasilkan banyak variasi fase kepadatan yaitu: Untuk  $\alpha_2 = \alpha_1 = 0.1; \beta_2 = 0.1$  terjadi fase kepadatan HD-HD. Ketika  $\alpha_2 = \alpha_1 = 0.1; \beta_2 = 0.2$  terjadi fase kepadatan CP-HD. Selanjutnya  $\alpha_2 = \alpha_1 = 0.1; \beta_2 = 0.3$  terjadi fase kepadatan LD-CP.  $\alpha_2 = \alpha_1 = 0.1; \beta_2 > 0.3$  terjadi fase kepadatan LD-LD. Sedangkan  $\alpha_2 = \alpha_1 > 0.1; 0.1 \leq \beta_2 < 0.5$  terjadi fase kepadatan HD-HD dan  $\alpha_2 = \alpha_1 > 0.1; \beta_2 \geq 0.5$  terjadi fase kepadatan HD-MC.

Berbagai fase kepadatan untuk TASEP dua dimensi dengan satu masukan ( $\alpha_1$ ) dan dua keluaran ( $\beta_1 = \beta_2$ ) berdasarkan hasil penelitian adalah LD-LD terjadi ketika  $\alpha_1=\beta_1=\beta_2=0.1$  dan  $\alpha_1 \leq 0.5, \beta_1=\beta_2 \geq 0.2$ . Fase LD-CP terjadi hanya bila  $\alpha_1=0.2, \beta_1=\beta_2=0.1$ . Selanjutnya fase CP-HD adalah fase kepadatan ketika  $\alpha_1 = 0.3, \beta_1=\beta_2=0.1$ . Fase HD-HD terjadi ketika  $\alpha_1 \geq 0.4; \beta_1=\beta_2=0.1$  dan MC-LD adalah fase kepadatan dimana  $\alpha_1 \geq 0.6, \beta_1=\beta_2 \geq 0.2$ .

Besar kepadatan partikel pada sistem dua dimensi yang berbentuk petigaan dengan dua masukan dan satu keluaran lebih tinggi daripada kepadatan partikel pada sistem dua dimensi berbentuk petigaan yang memiliki dua keluaran dan satu masukan.

Rapat arus bergantung pada laju masukan dan keluaran  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ , dan  $\beta_2$ . Sedangkan rapat arus untuk profil kepadatan yang mengandung fase CP sedikit mengalami peningkatan dan penurunan.

Diharapkan akan ada penelitian lebih mendalam mengenai TASEP dengan variasi variabel yang berbeda sehingga aplikasi TASEP dalam memodelkan sistem-sistem fisis menjadi semakin luas.

#### Daftar Pustaka

- Bellac ML. 2007. Non Equilibrium Statistical Mechanics, Makalah ini disajikan dalam *Lectures Given at Les Houches Predoctoral School*. Perancis, 26 Agustus – 7 September, 2007
- Chowdury D. 2003. *Traffic Flow Of Interacting Self-Driven Particles: Rails and Trails Vehicles and Vesicles*. Kanpur: Indian Institute of Technology
- Derrida B, Domany E & Mukamel D. 1992. An exact solution of the one dimensional asymmetric exclusion model with open boundaries, *J Stat Phys*. 69: 667-687
- Dwandaru WSB. 2010. Various Correspondences Between Simple Driven And Equilibrium Statistical Hard Core Models. PhD Thesis. University of Bristol
- Parmeggiani A, Franosch T & Frey E 2004. Totally Asymmetric Simple Exclusion Process with Langmair Kinetics. *Phys Rev E* 70: 046101-046121
- Van Vliet CM. 2008. *Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Mechanics*. World Scientific.
- Zwanzig R. 2001. *Nonequilibrium Statistical Mechanics*. Oxford: Oxford University Press