Jurnal MIPA 37 (1): 79-91 (2014)

Jurnal MIPA

http://journal.unnes.ac.id/nju/index.php/JM

ESENSI NILAI DAN VEKTOR EIGEN DARI SUATU OPERATOR PADA RUANG HILBERT KLASIK

Wuryanto✉

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Februari 2014
Disetujui Maret 2014
Dipublikasikan April 2014

Keywords:
nilai eigen;
Vector eigen;
Ruang Hilbert;
operator

Abstrak

Suatu transformasi linear T dari V ke W adalah fungsi dari ruang linear V atas F ke ruang linear W atas F dengan sifat untuk setiap vektor $x, y \in V$ dan skalar $\alpha, \beta \in F$, berlaku $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$. V Ruang Hilbert atas lapangan kompleks C senantiasa yang dimaksudkan adalah ruang hasilkali dalam lengkap dalam arti V adalah ruang linear atas C yang dilengkapi dengan suatu fungsi $\langle .,. \rangle$ dari VxV ke C dan memenuhi semua sifat hasilkali dalam, dan kelengkapan V ditunjukkan dalam kapasitas V sebagai ruang metrik dengan sifat setiap barisan Cauchy di V konvergen ke suatu titik di V. Metrik untuk V dibangun melalui suatu norm pada V yang didefinisikan $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$. Selanjutnya yang dimaksud dengan operator adalah suatu transformasi linear kontinu dari ruang Hilbert V ke ruang hibert W. Dengan demikian jika dikatakan T suatu operator pada V, senantiasa yang dimaksudkan adalah V ruang Hilbert atas C dan T adalah suatu transformasi linear dari V ke V. Notasi $L_C(V, W)$ adalah koleksi semua operator dari V ke W . Esensi nilai eigen dan vektor eigen berkaitan langsung dengan sifat mendasar dari nilai dan vektor eigen dari suatu operator pada ruang hilbert klasik.

Abstract

A linear transformation of T from V to W is function from linear space V to F to linear space W to F with the properties of every vector $x, y \in V$ and scalar $\alpha, \beta \in F$, applies $\mathrm{T}(\alpha \mathrm{x} + \beta \mathrm{y}) = \alpha \mathrm{T}(\mathrm{x}) + \beta \mathrm{T}(\mathrm{y})$. V . A Hilbert Space V over a complex field C is always meant the complete inner product space where V is a linear space to C with a function of $\langle .,. \rangle$ from VxV to C and satisfies all properties of inner product space, and the completeness of V is shown by the capacity of V as the metric space with the properties of Cauchy sequence in a convergent V to any point in V. The metrics for V is built through a norm at V which is defined as $\|\mathrm{x}\| = \langle \mathrm{x}, \mathrm{x} \rangle^{1/2}$. . Further, what is meant with an operator is a continuous linear transformation of Hilbert Space V to Hibert Space W. Therefore, if T is said to be an operator on V, then it is always said that Hilbert Space V is on C and T is a linear transformation from V to V. The notation $L_C(V, W)$ is the collection of all operators from V to W. The essentials of eigen values and eigen vectors are related directly with the basic properties of eigen value and vector of an operator on a classical Hilbert Space.

✉Alamat korespondensi:
Gedung D7 Lantai 1, Kampus Unnes Sekaran,
Gunungpati, Semarang, 50229

ISSN 0215-9945

PENDAHULUAN

Beberapa ***pengetahuan prasyarat*** yang erat hubungannya dengan topik yang dibahas, seperti ruang linear, ruang bernorma, ruang Hilbert, ruang banach, ruang metrik dan struktur $L_c(X,Y)$ tidak dibahas dalam rubrik ini. Berikut ini dibahas keterkaitan antara beragam operator .

Teorema 1.1

Jika X dan Y dua ruang hilbert atas C dan $A \in Lc(X,Y)$, maka terdapat $A^* \in Lc(Y,X)$ sehingga $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ untuk setiap $x \in X$ dan $y \in Y$. Selanjutnya A^* disebut operator ajoint dari operator A. (Folland 1984)

Bukti:

Andaikan ada operator A dari X ke Y tetapi tidak ada operator T dari Y ke X dengan sifat $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ $\forall x \in X, \forall y \in Y$ artinya , setiap operator T dari Y ke X senantiasa $\langle Ax, y\rangle \neq \langle x, Ty\rangle$ tak terkecuali untuk x dan y keduanya vektor nol di X dan vektor nol di Y.

Dengan memilih x vektor nol di X dan y vektor nol di Y, jelas pernyatan$\langle Ax, y\rangle \neq \langle x, Ty\rangle$ suatu kontradiksi. Artinya, setiap $A \in Lc(X,Y)$ ada $A^* \in Lc(Y,X)$ sehingga $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ ■

Teorema 1.2.

Jika X, Y dan Z ketiganya ruang hilbert maka, setiap $A, B \in L_C(X,Y)$ dan $C \in L_C(Y,Z)$ maka

1. $(A+B)* = A* + B*$
2. $(\gamma A)^* = \bar{\gamma} A^*$
3. $\langle A^*y, x\rangle = \langle y, Ax\rangle$
4. $(A^*)^* = A = A^{**}$
5. $\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2$
6. A*A=0 jika dan hanya jika A=0
7. $(CA)^* = A^*C^*$

(Folland 1984)

Bukti:

(1) $\forall x \in X, \forall y \in Y$,

$\langle (A+B)x, y\rangle = \langle x, (A+B)^* \rangle$ ... (fakta 1)

Dilain pihak

$$\langle (A+B)x, y\rangle = \langle Ax + Bx, y\rangle$$
$$= \langle Ax, y\rangle + \langle Bx, y\rangle$$
$$= \langle x, A^*y\rangle + \langle x, B^*y\rangle$$
$$= \langle x, A^*y + B^*y\rangle$$
$$= \langle x, (A^* + B^*)y\rangle$$

Diperoleh fakta

$\langle (A+B)x, y\rangle = \langle x, (A^* + B^*)y\rangle$ ...(fakta 2)

Dari (fakta 1) dan (faktaa2) diperoleh fakta (A+B)*=A*+B* ■

(2) $\forall x \in X, \forall y \in Y$ dan $\forall \lambda \in C$

$\langle \lambda Ax, y\rangle = \langle x, (\lambda A)^* y\rangle$ .... (fakta 3)

Dari lain pihak

$\langle \lambda Ax, y\rangle = \lambda \langle Ax, y\rangle$ (sifat HKD)

$= \lambda \langle x, A^*y\rangle$ (Teorema 1.1)

$= \langle x, \bar{\lambda} A^* \rangle$ (akibat sifat HKD)

Diperoleh fakta

$\langle \lambda Ax, y\rangle = \langle x, \bar{\lambda} A^* y\rangle$ (fakta 4))

Dari (fakta 3) dan (fakta 4) diperoleh

$(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$ ■

(3) $\forall x \in X, \forall y \in Y$

$\langle A^*y, x\rangle = \overline{\langle x, A^*y\rangle}$ (sifat HKD)

$= \overline{\langle Ax, y\rangle}$ (Teorema 1.1)

Berakibat

$\overline{\langle A^*y, x\rangle} = \langle Ax, y\rangle$ .....(fakta 5)

Diperoleh fakta

$\langle Ax, y\rangle = \overline{\langle A^*y, x\rangle}$ (f akta 5)

$= \langle x, A^*y\rangle$ (sifat HKD)

Atau

$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ ■

(4) $\forall x \in X, \forall y \in Y$

$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ (Teorema 1.1)

$= \overline{\langle A^*y, x\rangle}$ (sifat HKD)

$= \overline{\langle y, (A^*)^*x\rangle}$ (Teorema 1.1)

$= \overline{\overline{\langle (A^*)^*x, y\rangle}}$ (sifat HKD)

$= \langle (A^*)^*x, y\rangle$ (sifat konyugat di C)

Diperoleh fakta

$\langle Ax, y\rangle = \langle (A^*)^* x, y\rangle \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$

Artinya $(A^*)^* = A$ ■

(5) Karena $A^* \in Lc(Y,X)$ dan $A \in Lc(X,Y)$ maka komposisi A*A suatu operator pada X. Dan oleh sebab $Lc(X,X)$ merupakan ruang banach terhadap norma

$\|.\| : L_C(X, X) \to R$ yang didefinisikan

$\|A\| = \inf\{M > 0 : \|Ax\| \leq M\|x\|,\ x \in X,\ \|x\|$

= sup $\{\ \|Ax\| :\ x \in X\ dan\ 0 < \|x\| \leq 1\}$

maka $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$ berakibat

$\dfrac{\|A^* Ax\|}{\|x\|} \leq \|A^* A\|$ (fakta 6)

$\|A^* Ax\| \leq \|A^*\|\|Ax\| \leq \|A^*\|\|A\|\|x\|$ atau

(fakta 7)

Maka $\|A^* A\| \leq \|A\|^2$ (fakta 8)

Dari lain pihak jika x∈X

$\|Ax\|^2 = |\langle Ax, Ax\rangle|$

$= |\langle x, A^* Ax\rangle|$

$\leq \|x\|\|A^* Ax\|$

$\leq \|x\|\|A^* A\|\|a\|$

$= \|x\|^2\|A^* A\|$

Maka $\|Ax\|^2 \leq \|A^* A\|$

Artinya $\|A^* A\|$ merupakan batas atas dari himpunan nilai $\|Ax\|^2$ jika $\|x\| \leq 1$

Dilain pihak $\|A\|$ batas atas terkecil dari himpunan terbatas $\|Ax\|$ jika $\|x\| \leq 1$ .Artinya

$\|A\|^2 \leq \|A^* A\|$ (fakta 9)

Dari (fakta 8) dan (fakta 9) diperoleh $\|A^* A\| = \|A\|^2$. Dan dengan menggantikan peran A* oleh A diperoleh

$\|AA^*\| = \|A\|^2$ ■

(6) $(\Rightarrow)$

Diketahui A*A=0 ditunjukkan A=0

$\forall x \in X, \forall y \in Y$,

$0 = \langle A^* Ax, y\rangle$ (sebab A*A operator nol)

$= \langle Ax, Ay\rangle$ (Teorema 1.2 butir 4)

Diperoleh fakta *Ax* atau *Ay* vektor nol di *X*. Tanpa mengurangi perumuman bukti, Misalkan *Ax* bukan vektor nol, maka *Ay* harus vektor nol di *X*. Karena *y* sebarang dan dengan memilih *y* tak nol dan fakta *Ay =0* maka *A* harus operator nol.

$(\Leftarrow)$

Diketahui *A=0* ditunjukkan A*A =0.

$\forall x \in X, \forall y \in Y$,

$0 = \langle Ax, Ay\rangle$ (sebab A=0 dan Ax=0)

$= \langle x, A^* Ay\rangle$ (Teorema 1.1)

Diperoleh fakta

$\langle x, A^* Ay\rangle = 0$.

Satu-satunya kemungkinan A*A harus Operator nol ■

(7) $\forall x \in X, \forall y \in Y$,

$\langle (CA)x, y\rangle = \langle x, (CA)^* y\rangle$ (fakta 10)

Dari lain pihak

$\langle (CA)x, y\rangle = \langle CAx, y\rangle$

$= \langle Ax, C^* y\rangle$

$= \langle x, A^* C^* y\rangle$

Ditemukan fakta

$\langle (CA)x, y\rangle = \langle x, A^* C^* y\rangle$ (fakta 11)

Dari (fakta 10) dan (fakta 11) diperoleh (CA)*=A*C* ■

Definisi 1.3

Dipunyai X ruang hilbert atas lapangan kompleks dan setiap anggota $L_c(X,X)$ disebut operator pada X. Jika A operator pada X dan I operator identitas pada X maka

(1) A disebut *operator isometrik* jika A*A=I
(2) A disebut *operator uniter* jika A*A=AA*=I
(3) A disebut *operator ajoint mandiri* jika A*=A
(4) A disebut *operator proyeksi* jika AA=A dan A*=A
(5) A disebut *operator normal* jika A*A=AA*

(Royden 1980)

2. Dasar Teori

Ruang hilbert klasik dalam tulisan ini senantiasa yang dimaksud adalah ruang hasil kalidalam lengkap dengan basis hingga atau tak hingga terbilang.

Teorema 2.1

Jika X ruang hilbert klasik dan $A, B \in Lc(X,X)$ maka *A*A* dan *A + A** adalah operator ajoint mandiri.

(Rudin 1975)

Bukti:

*(A*A)* =A*(A*)** (Teorema 1.2)
*=A*A*** ((A*)* =A**)
*=A*A* (Teorema 1.2)

Jadi, *(A*A)*= A*(A*)** , dan
(A+A)*=A*+A*** (Teorema 1.2)
= A+A* (Teorema 1.2)

Jadi, *(A+A*)* =A*+A* ■

Teorema 2.2.

Jika X ruang hilbert klasik dan A,B $\in L_c(X,X)$ A dan B ajoint mandiri maka AB ajoint mandiri jika dan hanya jika AB=BA

(Rudin 1975)

Bukti.

$(\Rightarrow)$

Dipunyai A dan B operator ajoint mandiri dan AB ajoint mandiri, ditunjukkan AB=BA

$\forall x, y \in X$

$\langle ABx, y\rangle = \langle x, (AB)^* y\rangle$ (Teorema 1.1)

$= \langle x, B^* A^* y\rangle$ (Teorema 1.2)

$= \langle x, BAy\rangle$ (A*=A, B*=B)

Diperoleh fakta

$\langle ABx, y\rangle = \langle x, BAy\rangle$ (fakta1)

Dilain pihak

$\langle ABx, y\rangle = \langle x, (AB)^* y\rangle$ (Teorema 1.1)

$= \langle x, ABy\rangle$ (AB ajoint mandiri)

Diperoleh fakta

$\langle ABx, y\rangle = \langle x, ABy\rangle$ (fakta 2)

Dari (fakta1) dan (fakta 2) diperoleh AB=BA

$(\Leftarrow)$

Dipunyai A dan B operator ajoint mandiri dan AB=BA, ditunjukkan AB operator ajoiunt mandiri

(AB)=B*A** (Teorema 1.2)
=BA (A dan B ajoint mandiri)
=AB (diketahui AB=BA)

(AB)=AB* , artinya
AB operator ajoint mandiri ■

Teorema 2.3

Jika X ruang hilbert klasik dan A operator pada X maka pernyataan berikut equivalen

A operator normal
A* operator normal
$\|A^* x\| = \|Ax\| \quad \forall x \in X$

(Rudin 1975)

Bukti:

$(1) \Rightarrow (2)$ Dipunyai A normal ditunjukkan A* normal

*A*A=AA** (diketahui A normal)

Maka *(A*A)*=(AA*)**

Diperoleh

*A*A**= A**A**

Atau *(A*)*A*=A*(A*)** ,

artinya *A** normal ■

$(2) \Rightarrow (3)$ Dipunyai A* normal , ditunjukkan

$\|A^* x\| = \|Ax\|$

$\forall x \in X$,

$\|A^* x\|^2 = \langle A^* x, A^* x\rangle$ (norma di ruang hilbert)

$= \langle x, (A^*)^* A^* x\rangle$ (Teorema 1.1)

$= \langle x, A^* (A^*)^* x\rangle$ (A* normal)

= $\langle Ax, (A^*)^* x\rangle$ (Teorema 1.1)

= $\langle Ax, Ax\rangle$ (A=A**=(A*)*)

= $\|Ax\|^2$

Diperoleh fakta

$0 \le \|A^* x\|^2 = \|Ax\|^2$

Berakibat

$\|A^* x\| = \|Ax\|$ ■

$(3) \Rightarrow (1)$ Dipunyai $\|A^* x\| = \|Ax\|$ $\forall x \in X$, ditunjukkan A normal.

Dari hipótesis diperoleh fakta

$\|A^* x\|^2 = \|Ax\|^2$

Maka

$\|A^* x\|^2 - \|Ax\|^2 = 0$

Ekuivalen $\langle A^* x, A^* x\rangle - \langle Ax, Ax\rangle$ =0

Ekuivalen $\langle x, A^{**}A^* x\rangle - \langle x, A^* Ax\rangle$ =0

Ekuivalen $\langle x, AA^* x\rangle - \langle x, A^* Ax\rangle$ =0

Ekuivalen $\langle x, AA^* x - A^* Ax\rangle$ =0

Ekuivalen $\langle x, (AA^* - A^* A)x\rangle$ =0

Karena *x* Sebarang vektor di *X* maka dengan memilih *x* bukan vektor nol di *X*, haruslah *(AA*-A*A)x* vektor nol di *X*. Artinya, *AA*-A*A* harus operator nol pada *X*. Dengan kata lain

AA=A*A* atau

A operator normal pada *X* ■

Definisi 2.4.

Dipunyai X ruang hilbert klasik.

(1) Barisan vektor { v_k} di X disebut basis Orthogonal untuk X jika {v_k} bebas linear, membangun X dan $\langle v_i, v_j\rangle$ =0 apabila $i \neq j$

(2) Barisan vektor {v_k} disebut basis ortonormal untuk X jika {v_k} basis ortogonal dan $\|v_k\| = 1$ $\forall k \in N$

(Rudin 1975)

***Teorema* 2.5.**

Jika *X* ruang hilbert klasik dan {e_k} basis ortonormal, $\{\mu_k\}$ barisan bilangan kompleks dan barisan $\{|\mu_k|\}$ terbatas dengan M= sup $\{\mu_k\}$ maka terdapat operator A pada X sehingga

(1) $Ae_k = \mu_k e_k$

(2) $A\left(\sum_{k=}^{\infty} \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mu_k e_k$ apabila $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ Terbatas

(3) $\|A\|$ =M

(4) $A^* e_k = \overline{\mu}_k e_k$ untuk setiap k (k=1,2,3,...)

(5) $A^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\mu}_k e_k$

(6) A* normal

(Rudin 1975)

Bukti:

(1) Ditunjukkan A bersifat linear dan kontinu.

Dikonstruksi operator A: X → X dan $Ae_k = \mu_k e_k$. Karena {e_k} basis ortonormal untuk X maka $\forall x, y \in X$ tentu terdapat barisan bilangan {α_k} dan {β_k} di C sehingga

x= $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ dan α_k= $\langle x, e_k\rangle$,

y= $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e_k$ dan β_k= $\langle y, e_k\rangle$

untuk sebarang skalar kompleks α,

Aαx=Aα $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ =A $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha\alpha_k e_k$

= $\sum_{k=1}^{\infty} A(\alpha\alpha_k e_k)$

= $\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k Ae_k$

= $\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mu_k e_k$

= $\alpha A \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$

= αAx.

Artinya A αx = αAx (fakta1)

A(x+y) = $A\left(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k + \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k e_k\right)$

= $A\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k e_k + \beta_k e_k\right)\right)$

= $A\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k + \beta_k\right)e_k\right)$

= $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k + \beta_k\right)Ae_k$

= $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k + \beta_k\right)\mu_k e_k$

= $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k \mu_k e_k + \beta_k \mu_k e_k\right)$

= $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k Ae_k + \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k Ae_k$

= $A\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k + A\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k e_k$

= Ax + Ay

Artinya A(x+y) =Ax+Ay (fakta 2)

Dari perolehan (fakta 1) dan (fakta2) menunjukkan bahwa A bersifat linear

Dan Ditunjukkan A kontinu.

Berikan ε>0, jika x,y ∈X maka

$\left\|Ax - Ay\right\|^2 = \left\|A(x-y)\right\|^2$

= $\left\|A\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k - \beta_k\right)e_k\right)\right\|^2$

= $\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k - \beta_k\right)\mu_k e_k\right\|^2$

≤ $\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\left(\alpha_k - \beta_k\right)\mu_k e_k\right\|^2$

= $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\alpha_k - \beta_k\right|^2\left|\mu_k\right|^2\left\|e_k\right\|^2$

= $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\alpha_k - \beta_k\right|^2\left|\mu_k\right|^2$ (krn $\left\|e_k\right\|^2 = 1$)

≤ $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\alpha_k - \beta_k\right|^2 M^2$ (M=sup{μ_k})

= $\left\|x-y\right\|^2 M^2$

Diperoleh fakta

$\left\|Ax - Ay\right\|^2 \le \left\|x-y\right\|^2 M^2$ (fakta 3)

Dari fakta (3*)

Jika x,y∈X , $\left\|x-y\right\| < \left(\frac{\varepsilon^2}{M^2+1}\right)^{1/2}$ maka

$\left\|Ax = Ay\right\| < \varepsilon$. Artinya. A kontinu.

Jadi, telah ditunjukkan suatu operator A yang memenuhi sifat $Ae_k=\mu_k e_k$ bersifat linear kontinu.

(2) Karena barisan jumlah parsial $\left\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right\}$

Merupakan barisan cauchy di X dan X lengkap maka barisan $\left\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right\}$ konvergen ke $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k e_k$,

dan oleh sebab A linear kontinu maka barisan $\left\{A\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right\}$ konvergen ke

$A\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k e_k$ asalkan $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\lambda_k\right|^2$ berhingga

Diperoleh fakta

$\left\langle Ae_k, e_k\right\rangle = \left\langle e_k, \bar{\mu}_k e_k\right\rangle$ (fakta 5)

Dari fakta (1*) dan (2*) diperoleh

$A^* e_k = \bar{\mu}_k e_k$ ■

$A\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty}A\left(\lambda_k e_k\right)$

= $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k Ae_k$

= $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k \mu_k e_k$

Diperoleh

$A\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k \mu_k e_k$ ■

(3) $\left\|A\right\| = \sup\left\{\left\|Ax\right\| : \ x \in X \ dan \ \left\|x\right\| \le 1\right\}$ dan

$\left\|Ax\right\|^2 = \left\langle Ax, Ax\right\rangle$

= $\left\langle \sum_{k=1}^{\infty}\left\langle x, e_k\right\rangle \mu_k e_k, \sum_{k=1}^{\infty}\left\langle x, e_k\right\rangle \mu_k e_k\right\rangle$

= $\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle x, e_k\right\rangle \mu_k e_k\right\|^2$

$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \left\langle x, e_k \right\rangle \mu_k e_k \right\|^2$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left\langle x, e_k \right\rangle \right|^2 \left| \mu_k \right|^2 \left\| e_k \right\|^2$

$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left\langle x, e_k \right\rangle \right|^2 M^2$

$= M^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left| \lambda_k \right|^2$

$= M^2 \left\| x \right\|^2$

Artinya

$\left\| Ax \right\| \leq M$ apabila $\left\| x \right\| \leq 1$

Berakibat

$\left\| A \right\| \leq M$

Dari lain pihak

Oleh sebab $\left\| A \right\| \geq M$

Maka $\left\| A \right\| = M$ ■

(4) Ditunjukkan $A^* e_k = \overline{\mu} e_k$

Dipunyai

$\left\langle Ae_k, e_k \right\rangle = \left\langle e_k, A^* e_k \right\rangle$ (fakta 4)

Dari lain pihak

$\left\langle Ae_k, e_k \right\rangle = \left\langle \mu_k e_k, e_k \right\rangle$

$= \mu_k \left\langle e_k, e_k \right\rangle$

$= \left\langle e_k, \overline{\mu_k} e_k \right\rangle$

(5) Ditunjukkan $A^*x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\mu_k} e_k$ dengan

$\lambda_k = \left\langle x, e_k \right\rangle$ .dan $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$

Kita tahu tahu $A^*x \in X$ dan $\{e_k\}$basis ortonormal di X maka

$A^*x = \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle A^* x, e_k \right\rangle e_k$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle x, Ae_k \right\rangle e_k$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle x, \mu_k e_k \right\rangle e_k$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mu_k} \left\langle x, e_k \right\rangle e_k$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mu_k} \lambda_k e_k$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\mu_k} e_k$

Diperoleh

$A^*x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\mu_k} e_k$ ■

(6) Ditunjukkan A operator normal

$A^*Ae_k = A^*\mu_k e_k = \overline{\mu_k} \mu_k e_k = \left| \mu_k \right|^2 e_k$

$AA^*e_k = A\overline{\mu_k} e_k = \mu_k \overline{\mu_k} e_k = \left| \mu_k \right|^2 e_k$

Jadi $A^*A = AA^*$, artinya

A operator normal di X ■

3. Pembahasan

Konsepsi nilai eigen dan vektor eigen di ruang Hilbert dituangkan pada definisi berikut

Definisi 3.1

Dipunyai *X* ruang hilbert, $x \in X$ dan *A* operator pada *X*. Selanjutnya, *x* disebut vektor eigen jika *x* bukan vektor nol sedemikian hingga terdapat bilangan λ sehingga $Ax = \lambda x$. (Ambrose 1975)

Selanjutnya λ disebut nilai eigen yang berkaitan dengan vektor eigen *x*.

Teorema 3.2.

Jika *X* ruang hilbert atas lapangan kompleks *C* dan *A* operator pada *X*, μ suatu nilai eigen maka

(1) $\left| \mu \right| \leq \left\| A \right\|$

(2) μ bilangan real jika A ajoint mandiri

(3) $\left| \mu \right| = 1$ jika A isometrik

(Ambrose 1975)

Bukti:

(1) Jika *x* vektor eigen yang bertkaitan dengan nilai eigen μ maka *x* vektor tak nol di X dengan sifat Ax=μx,

maka $\left\| Ax \right\| = \left\| \mu x \right\|$. Diperoleh fakta

$\left| \mu \right| \left\| x \right\| = \left\| Ax \right\| \leq \left\| A \right\| \left\| x \right\|$ (sebab $A \in L_C(X,X)$)

Berakibat $\left| \mu \right| \leq \left\| A \right\|$ (sebab $\left\| x \right\| > 0$) ■

(2)Jika x vektor eigen yang berkaitan dengan nilai eigen μ maka

$\langle Ax, x\rangle = \langle \mu x, x\rangle = \mu\langle x, x\rangle = \mu\|x\|^2$ (fakta1)

Dari lain pihak

$\langle Ax, x\rangle = \langle x, A^* x\rangle = \langle x, Ax\rangle$ (krn A*=A)

$= \langle x., \mu x\rangle$ (krn Ax=μx)

$= \overline{\mu}\langle x, x\rangle$ (sifat HKD)

$= \overline{\mu}\|x\|^2$

Atau $\langle Ax, x\rangle = \overline{\mu}\|x\|^2$ (fakta 2)

Dari (fakta 1) dan (fakta 2) diperoleh

$\mu = \overline{\mu}$ (krn $\|x\|^2 \neq 0$)

Satu-satunya kemungkinan μ real ■

(3) Jika x vektor eigen yang berkaitan dengan nilai eigen μ maka Ax=μx dan oleh sebab A isometrik maka $\|Ax\| = \|x\|$

Diperoleh fakta $\|\mu x\| = \|Ax\| = \|x\|$ atau $\|\mu x\| = \|x\|$. Oleh sebab $\|\mu x\| = |\mu|\|x\|$ maka $|\mu|\|x\| = \|x\|$. Karena $\|x\| \neq 0$ berakibat $|\mu| = 1$

■

Teorema 3.3.

Jika *X* ruang hilbert atas *C* dan *A* operator pada *X*, jika *x* suatu vektor eigen yang berkaitan dengan nilai eigen μ maka berlaku

Ax=μx $\Leftrightarrow A^* x = \overline{\mu} x$

(Ambrose 1975)

Bukti:

$(\Rightarrow)$

$\langle Ax, x\rangle = \langle x, A^* x\rangle$ dan dari lain pihak

$\langle Ax, x\rangle = \langle \mu x, x\rangle = \mu\langle x, x\rangle = \langle x, \overline{\mu} x\rangle$,

Diperoleh fakta $\langle x, A^* x\rangle = \langle x, \overline{\mu} x\rangle$ untuk setiap vektor eigen x yang berkaitan dengan nilai eigen μ .

Berakibat A*x= $\overline{\mu} x$

$(\Leftarrow)$

$\langle A^* x, x\rangle = \langle x, Ax\rangle$ dan dari lain pihak

$\langle A^* x, x\rangle = \langle \overline{\mu} x, x\rangle = \overline{\mu}\langle x, x\rangle = \langle x, \overline{\overline{\mu}} x\rangle =$

$\langle x, \mu x\rangle$

Jadi , Ax=μx ■

Himpunan bagian dari dari ruang hilbert *X* yang terdiri dari semua vektor eigen yang berkaitan dengan nilai eigen μ tak terkecuali vektor nol yang merupakan solusi trivial dari persamaan Ax=μx untuk suatu operator *A* , membentuk suatu ruang bagian *X* yang dikenal ruang vektor eigen yang berkaitan dengan nilai eigen μ atas operator *A* atau di notasikan dengan simbol Ҁ$_A$(μ) dan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.4.

Dipunyai *A* suatu operator pada ruang hilbert *X* atas lapangan kompleks *C* dan μ. suatu nilai eigen maka suatu himpunan bagian dari *X* yang dinotasikan Ҁ$_A$(μ) dan didefinisikan

Ҁ$_A$(μ)= $\{x \in X : \; Ax = \mu x\}$

Selanjutnya Ҁ$_A$(μ) disebut ruang vektor μ eigen atas operator A.

(Ambrose 1975)

Untuk membuktikan bahwa Ҁ$_A$(μ) memenuhi struktur ruang hilbert , perhatikan bukti dari teorema berikut.

Teorema 3.5

Jika *A* operator pada ruang hilbert *X* atas *C* dan μ suatu nilai eigen maka Ҁ$_A$(μ) yang didefinisikan Ҁ$_A$(μ)= $\{x \in X : \; Ax = \mu x\}$

Memenuhi struktur ruang hilbert (Ambrose 1975)

Bukti:

solusi dari Ax=μx, ini artinya θ∈ Ҁ$_A$(μ)

Pertama, ditunjukkan Ҁ$_A$(μ) tidak kosong.

Oleh sebab θ (θ vektor nol di X) merupakan

Atau dengan kata lain Ҁ$_A$(μ) tidak kosong.

Kedua, ditunjukkan penjumlahan vektor di Ҁ$_A$(μ), tertutup.

Ambil vektor x, y∈ Ҁ$_A$(μ) , maka x dan y vektor di X dengan sifat Ax=μx dan Ay=μy . Diperoleh fakta

Ax+Ay=μx+μy (fakta 1)

Oleh sebab Ax dan Ay vektor di X dan A operator pada X maka

Ax+Ay=A(x+y) (fakta 2)

Oleh sebab *X* ruang hilbert atas *C*, artinya *X* ruang vektor atas *C* , selanjutnya oleh sebab *x,y* $\in X$ dan $\mu \in C$ maka

$\mu x + \mu y = \mu(x+y)$ (fakta 3)

Berdasarkan ketiga fakta tersebut diperoleh fakta

$A(x+y) = \mu(x+y)$ (fakta 4)

Karena x+y vektor di X dengan sifat

$A(x+y) = \mu(x+y)$ maka $x+y \in K_A(\mu)$

Ketiga, ditunjukkan perkalian skalar di C dan vektor di $K_A(\mu)$, tertutup .

Ambil $x \in K_A(\mu)$ dan $\alpha \in C$, maka x vektor di X dengan sifat $Ax = \mu x$ dan $\alpha x \in X$, berakibat

$A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha(\mu x) = (\alpha\mu)x = (\mu\alpha)x = \mu(\alpha x)$ atau $A(\alpha x) = \mu(\alpha x)$. Diperoleh fakta, $\alpha x \in X$ dengan sifat $A(\alpha x) = \mu(\alpha x)$ maka $\alpha x \in K_A(\mu)$.

Ketiga langkah tersebut menunjukkan bahwa $K_A(\mu)$ memenuhi struktur ruang linear atas C Cukup jelas bahwa sifat-sifat hasilkali dalam pada X juga berlaku pada $K_A(\mu)$.karena vektor di $K_A(\mu)$. Adalah vektor di X. Artinya bahwa $K_A(\mu)$. Adalah ruang prehilbert. Kelengkapannya ditunjukkan sebagai berikut.

Ambil sebarang barisan cauchy (x_n) di $K_A(\mu)$.

Oleh sebab (x_n) barisan cauchy di X dan X ruang hilbert maka barisan (x_n) konvergen ke suatu $x \in X$ (sifat barisan diruang metrik lengkap). Tinggal ditunjukkan $x \in K_A(\mu)$.

Karena (x_n) barisan cauchy di $K_A(\mu)$.maka $x_n \in X$ dan $Ax_n = \mu x_n$ berlaku untuk setiap $n \in N$.

Karena barisan (x_n) konvergen ke x dan A operator pada X maka A bersifat linear kontinu, berakibat barisan (Ax_n) konvergen ke Ax dengan sifat $Ax = \mu x$. Artinya $x \in K_A(\mu)$.

Telah ditunjukkan, setiap barisan cauchy di $K_A(\mu)$. Konvergen ke suatu $x \in K_A(\mu)$. Jadi $K_A(\mu)$ ruang prehilbert dan lengkap, artinya $K_A(\mu)$ ruang Hilbert. ■

Selanjutnya, $K_A(\mu)$ disebut ruang μ Eigen atas A, ini merupakan ruang bagian dari ruang Hilbert X atas lapangan C.

Berikut dibangun suatu ruang eigen dari suatu operator normal pada ruang Hilbert.

Teorema 3.6.

Jika X ruang hilbert atas C dan A suatu operator pada x dan μ suatu nilai eigen dari A maka, jika A operator normal berakibat

(1) $A^*\left(K_A(\mu)\right) \subset K_A(\mu)$

(2) $K_A(\mu) = K_{A^*}(\overline{\mu})$

(3) $K_A(\lambda) \perp K_A(\mu)$ jika $\lambda \neq \mu$

(Brown 1973)

Bukti:

(1) Peta vektor nol di $K_A(\mu)$ oleh A* adalah vektor nol ruang X yang sekaligus merupakan vektor nol di $K_A(\mu)$, artinya vektor nol di X sekaligus adalah vektor nol di $K_A(\mu)$ dan $A^*(K_A(\mu))$. Jadi $A^*(K_A(\mu)$ tidak kosong.

Ambil $y \in A^*(K_A(\mu))$, maka terdapat $x \in K_A(\mu)$ dengan sifat $y = A^*x$ dan $Ax = \mu x$. Jelas $y \in X$ sebab A* operator pada X.

Tinggal ditunjukkan $Ay = \mu y$.

Oleh sebab

$\mu y = \mu A^*x$ (karena $y = A^*x$)

$= A^*\mu x$

$= A^*Ax$ (karena $Ax = \mu x$)

$= AA^*x$ (karena A normal)

$= Ay$ (karena $y = A^*x$)

Jadi $Ay = \mu x$, artinya $y \in K_A(\mu)$.

Karena , jika $y \in A^*(K_A(\mu))$.maka $y \in K_A(\mu)$, artinya $A^*\left(K_A(\mu)\right) \subset K_A(\mu)$ ■

(2) Ambil $x \in K_A(\mu)$,maka $Ax = \mu x$ sehingga

$\langle Ax, x \rangle = \langle x, A^*x \rangle$ (fakta 1)

Dilain pihak

$\langle Ax, x \rangle = \langle \mu x, x \rangle$

$= \mu\langle x, x \rangle$ (sifat HKD)

$= \langle x, \overline{\mu} x \rangle$ (sifat HKD)

Diperoleh

$\langle Ax, x \rangle = \langle x, \overline{\mu} x \rangle$ (fakta 2)

Dari (fakta 1) dan (fakta2) diperoleh

$A^*x = \overline{\mu} x$, artinya $x \in K_{A^*}(\overline{\mu})$. Oleh sebab jika $x \in K_A(\mu)$ maka $x \in K_{A^*}(\overline{\mu})$, artinya

$K_A(\mu) \subset K_{A^*}(\overline{\mu})$ (fakta 3).

Ambil $y \in K_{A^*}(\overline{\mu})$, maka $A^*y = \overline{\mu} y$ sehingga

$\langle A^*y, y \rangle = \langle y, A^{**}y \rangle$ (sifat operator)

$= \langle y, Ay \rangle$ (krn A**=A)

Diperoleh

$\langle A^* y, y \rangle = \langle y, Ay \rangle$ (fakta 4)

Dilain pihak

$\langle A^* y, y \rangle = \langle \bar{\mu} y, y \rangle$ (krn $A^*y = \bar{\mu} y$)

$= \bar{\mu} \langle y, y \rangle$ (sifat HKD)

$= \langle y, \mu y \rangle$ (sifat akibat HKD)

Diperoleh

$\langle A^* y, y \rangle = \langle y, \mu y \rangle$ (fakta 5)

Dari (fakta 4) dan (fakta 5) diperoleh Ay=μy, artinya $y \in K_A(\mu)$,. Oleh sebab,ternyata jika $y \in K_{A^*}(\bar{\mu})$ maka $y \in K_A(\mu)$, artinya

$K_{A^*}(\bar{\mu}) \subset K_A(\mu)$ (fakta 6)

Dari (fakta 3) dan (fakta 6) diperoleh

$K_A(\mu) = K_{A^*}(\bar{\mu})$ ■

(3) Ambil $x \in K_A(\mu)$ dan $y \in K_A(\lambda)$, ditunjukkan x dan y ortogonal.

Karena $x \in K_A(\mu)$ dan $y \in K_A(\lambda)$maka Ax=μx dan Ay=λy. Oleh sebab

$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$

$\Leftrightarrow \langle \mu x, y \rangle = \langle x, \bar{\lambda} y \rangle$

$\Leftrightarrow \mu \langle x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

$\Leftrightarrow (\mu-\lambda) \langle x, y \rangle = 0$

Oleh sebab $\lambda \neq \mu$ maka $\langle x, y \rangle = 0$, ini artinya x dan y ortogonal . Karena x dan y dua vektor sebarang di $K_A(\mu)$ dan $K_A(\lambda)$, artinya dua ruang eigen yang saling ortogonal atau

$K_A(\lambda) \perp K_A(\mu)$ ■

***Teorema* 3.7.**

Jika A operator pada ruang hilbert X dengan μ suatu nilai eigen dari A dan $K_A(\mu)$ total maka pernyataan berikut ekuivalen

(1) SA= AS untuk setiap operator S pada X

(2) $S (K_A(\mu)) \subset K_A(\mu)$

(Brown 1973)

Bukti:

(1) $\Rightarrow$ (2)

Ambil $y \in S(K_A(\mu))$ maka, terdapat $x \in K_A(\mu)$ dengan sifat y= Sx, dan Ax= μx. (fakta 1)

Jelas $y \in X$ (sebab S operator pada X), sehingga μy= μSx (sebab fakta 1, y=Sx)

= Sμx (sebab S bersifat linear)

= SAx (sebab fakta 1 Ax= μx)

= ASx (diketahui SA=AS)

= Ay (sebab fakta 1, y=Sx)

Diperoleh μy=Ay atau

Ay=μy (fakta 2)

Dari fakta 2, menunjukkan bahwa $y \in K_A(\mu)$.

Telah ditunjukkan sebarang vektor $y \in S (K_A(\mu))$ berakibat $y \in K_A(\mu)$. Artinya,

$S(K_A(\mu)) \subset K_A(\mu)$

(2) $\Leftarrow$ (1)

Ditunjukkan untuk setiap $y \in X$, ASy=SAy.

Untuk setiap $y \in X$, $Sy \in X$ (sebab S operator pada X), berakibat $Sy \in K_A(\mu)$ (sebab dike-tahui $S(K_A(\mu)) \subset K_A(\mu)$).

Tinjau jika $y \in X$ dan $y \in K_A(\mu)$).

Oleh sebab $y \in K_A(\mu)$ dan $S(K_A(\mu)) \subset K_A(\mu)$ maka $Sy \in K_A(\mu)$. Diperoleh fakta

ASy = μSy (sebab vektor Sy di $K_A(\mu)$)

= Sμy (S bersifat linear)

= SAy (sebab $y \in K_A(\mu)$)

Artinya

ASy = SAy untuk setiap $y \in K_A(\mu)$..(fakta 1)

Andaikan ada $y \in X$ dan $y \notin K_A(\mu)$

Karena $K_A(\mu)^{\perp}$merupakan ruang bagian tertutup maka ruang X dan oleh sebab $K_A(\mu)$ total berakibat terdekomposisi sedemikian hingga

$X = K_A(\mu) \oplus K_A(\mu)^{\perp}$ (fakta 2) dan

$K_A(\mu) \cap K_A(\mu)^{\perp} = \{\theta\}$ (fakta 3)

θ vektor nol di X

Karena $y \in X$ dan berdasarkan fakta 2, maka $y=u+v$ untuk suatu $u \in K_A(\mu)$ dan $v \in K_A(\mu)^{\perp}$

Karena $y \notin K_A(\mu)$ maka

y bukan vektor nol. Ini kontradiksi dengan fakta 3. Jadi pengandaian harus dicabut, yang benar $y \in K_A(\mu)$. Berdasarkan fakta 1, berlaku ASy = SAy

kesimpulannya, untuk setiap $y \in X$ berlaku

ASy = SAy

Atau dengan kata lain AS = SA ■

Teorema 3.8

Jika **Hom$_F$(V,W)** dilengkapi fungsi $\|.\|: V \to W$ yang didefinisikan

$$\|f\| = \inf\left\{M > 0 : \|f(v)\|_W \le M\|v\|_V, v \in V\right\}$$

(a) $\left(Hom_F(V,W), \|.\|\right)$ ruang bernorma , dan

(b) Jika $\left(W, \|.\|_W\right)$ ruang banach maka

$\left(Hom_F(V,W), \|.\|\right)$ ruang banach

(Barbasch 1989)

Teorema 3.9 (Akibat):

Jika *V* ruang linear atas *R* yang dilengkapi suatu norma maka Hom$_R$(V,R) *ruang banach*. (Barbasch 1989)

Teorema tersebut merupakan akibat langsung dari Teorema 2 butitr (b) mengingat kita dapat memandang lapangan real R sebagai ruang bernorma lengkap terhadap fungsi *nilai mutlak* di R. Notasi singkat untuk Hom$_R$ (*V,R*) adalah *V**, dan untuk ruang banach yang satu ini juga disebut *ruang dual* . Secara umum jika kita punya *V* ruang linear atas lapangan *F* dan $\left(V, \|.\|\right)$ ruang bernorma (tak harus ruang banach) maka yang dimaksud dengan *ruang dual* yang dibangkitkan oleh *V* adalah himpunan *V**= Hom$_F$ (*V,F*). Selanjutnya dalam tulisan jika tidak ada penjelasan apapun maka simbol *V** senantiasa yang dimaksud adalah Hom$_R$ (*V,R*). Dengan demikian kita punya *V**=Hom$_R$ (*V,R*) *ruang dual* yang dibangkitkan oleh V, dan *V***=Hom$_R$ (*V*,R*) *ruang dual* yang dibangkikan oleh *V**. Pembuktian Teorema 3.9 sekaligus merupakan jawaban permasalahan (1)

***Teorema 3.10*:**

Jika V ruang bernorma maka pengaitan * yang memetakan x∈V ke suatu x*∈V** dengan sifat x*(f)=f(x) untuk setiap f∈V*, adalah suatu *transformasi linear* (Barbasch 1989)

Bukti:

Pertama ditunjukkan bahwa pengaitan * suatu fungsi dari V ke V** sebagai berikut.

Jika x,y∈V dan x=y maka untuk setiap f∈V* tentu berlaku x*(f)=f(x)=f(y)=y*(f) atau dengan kata lain x*=y*. Jadi, pengaitan * sungguh-sungguh suatu fungsi dari ke V*.

Kedua ditunjukkan bahwa fungsi * bersifat linear sebagai berikut.

Jika x,y∈V dan α,β∈R maka untuk setiap f∈V* (oleh sebab f linear) kita punyai

(αx+βy)*(f)=f(αx+βy)=αf(x)+βf(y)= αx* +βy*. Jadi fungsi * :V→V** linear, atau lazimnya disebut *transformasi linear*.

Teorema 3.11 menjadi bagian penting dalam tulisan ini , karena ternyata kumpulan para koset yang dibangkitkan oleh ruang bagian tertutup di V, memenuhi struktur ruang maka bernorm.

Teorema 3.11: Jika A ruang bagian tertutup dari ruang banach V maka V/A ruang bernorma lengkap terhadap fungsi $\|.\|_{V/A}: V/A \to R$ yang didefinisikan

$$\left\|\bar{x}\right\|_{V/A} = \inf\left\{\|g\|_V : g \in \bar{x}\right\}$$ untuksetiap

$\bar{x} = x + A \in V/A$ dan $\|.\|_V$ *norma* pada V

(Barbasch 1989)

Bukti:

(⇒)jika $\left\|\bar{x}\right\|_{V/A}$ =0 diperoleh fakta

0= $\left\|\bar{x}\right\|_{V/A}$ = $\inf\left\{\|g\|_V : g \in \bar{x}\right\}$, akibatnya untuk

setiap ε>0 tentu ada g∈ $\bar{x}$ sehingga

0≤ $\|g\|_V < \left\|\bar{x}\right\|_{V/A} + \varepsilon = \varepsilon$, dan jika ε→0, haruslah

$\|g\|_V = 0$, ini

berakibat g=θ(θ vektor nol di V), jadi $\theta \in \bar{x}$

yang berarti pula $\bar{\theta} = \bar{x}$. Sebaliknya

(⇐) jika $\bar{x} = \bar{\theta}$ maka

$$\left\|\bar{x}\right\|_{V/A} = \inf\left\{\|g\|_V : g \in \bar{x} = \bar{\theta}\right\} \le \|g\|_V$$

untuk

setiap g∈ $\bar{\theta}$.

Khususnya, untuk g=θ, maka kita punya

0≤ $\left\|\bar{x}\right\|_{V/A} \le \|\theta\|_V = 0$, atau dengan kata lain

$\left\|\bar{x}\right\|_{V/A}$ = 0

$$\left\|\alpha \bar{x}\right\|_{V/A} = \left\|\overline{\alpha x}\right\|_{V/V}$$

$$\inf\left\{\|g\|_V : g \in \overline{\alpha x}\right\} = \inf\left\{\|\alpha x + \alpha a\|_V : a \in A\right\}$$

$$|\alpha| \; inf\left\{\|x + a\|_V : a \in A\right\}$$

$$= |\alpha| \inf\left\{\|g\|_V : g \in \bar{x}\right\} = |\alpha| \left\|\bar{x}\right\|_{V/A}$$

$$\left\|\bar{x} + \bar{y}\right\|_{V/A} = \left\|\overline{x + y}\right\| = \inf\left\{\|g\|_V : g \in \overline{x + y}\right\}$$

$=$

$$\inf\left\{\|x + y + t + s\|_V : t, s \in A\right\}$$ bernorm

$\leq$

$$\inf\left\{\|x + t\|_V : t \in A\right\} + \inf\left\{\|y + s\|_V : s \in A\right\}$$

$$= \inf\left\{\|g\|_V : g \in \bar{x}\right\} + \inf\left\{\|g\|_V : g \in \bar{y}\right\}$$

$$= \left\|\bar{x}\right\|_{V/A} + \left\|\bar{y}\right\|_{V/A}$$

Kelengkapannya ditunjukkan dengan menggunakan *salah satu sifat* kelengkapan ruang bernorma yang telah ditunjukkan oleh Royden *(1983)* dalam *Lemma* berikut.

Ruang bernorma dikatakan lengkap *jika dan hanya jika* setiap barisan terjumlah mutlak didalamnya, adalah barisan konvergen.

Artinya, V ruang bernorma lengkap *jika dan hanya jika* setiap barisan $\{\alpha_n\}$ di $(V, \|.\|_V)$ terdapat bilangan b≥0 dengan sifat $\sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha_n\|_V$ = b *berakibat* terdapat α∈V dengan sifat $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ =α.

Selanjutnya diambil sebarang barisan koset $\{\bar{x}_n\}$ di V/A dengan sifat $\sum_{n=1}^{\infty} \left\|\bar{x}\right\|_{V/A}$ =b untuk suatu bilangan b (b berhingga), ditunjukkan barisan $\{\bar{x}_n\}$ mempunyai sifat $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{x}_n$ = $\bar{x}$ untuk suatu $\bar{x}$ ∈V/A. Karena

$$\left\|\bar{x}_n\right\|_{V/A} = \inf\left\{\|g\|_V : g \in \bar{x}_n\right\} \leq \|x_n\|_V$$, ini berakibat, untuk setiap bilangan asli n, terdapat $t_n \in \bar{x}_n$ sedemikian hingga berlaku

$$\left\|\|t_n\|\right\|_V \leq \left\|\bar{x}\right\|_{V/A} + 2^{-n}$$, ini berakibat kita punya $\sum_{n=1}^{\infty} \|t_n\|_V \leq b + 1$, artinya bahwa barisan $\{t_n\}$ di V bersifat *terjumlah mutlak*, dan karena V lengkap maka berdasar- kan Lemma di atas, terdapat t∈V dengan sifat t = $\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} t_n$, atau dengan kata lain t= $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$.

Sekarang kita perhatikan, suatu vektor x∈V dengan sifat x∈ $\bar{t}$.

Karena

$$\left\|\bar{x} - \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j\right\|_{V/A} = \left\|\bar{t} - \sum_{j=1}^{n} \bar{t}_j\right\|_{V/A}$$

$$= \left\|\overline{t - \sum_{j=1}^{n} t_j}\right\| = \inf\left\{\|g\|_V : g \in \overline{t - \sum_{j=1}^{n} t_j}\right\} \leq \|g\|_V$$

untuk setiap g ∈ $\overline{t - \sum_{j=1}^{n} t_j}$. Khususnya, untuk g= $t - \sum_{j=1}^{n} t_j$, kita punya relasi

$$\left\|\bar{x} - \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j\right\|_{V/A} \leq \left\|t - \sum_{j=1}^{n} t_j\right\|_V \to 0 \; jika \; n \to \infty$$

, ini berakibat $\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j \to \bar{x}$

.atau dengan kata lain $\bar{x} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j}$.

Telah ditunjukkan bahwa, setiap barisan $\{\overline{x_n}\}$ di ruang $(V/A, \|.\|_{V/A})$ dengan sifat

$\sum_{j=1}^{\infty} \left\| \overline{x}_n \right\|_{V/A} = b$ untuk suatu bilangan b≥0 berakibat $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} = \overline{x}$ untuk suatu $\overline{x} \in V/A$, .(konvergen ke suatu vektor $\overline{x} \in V/A$). Jadi $\left(V/A, \|\cdot\|_{V/A}\right)$, lengkap

PENUTUP

Permasalahan pertama telah terjawab dalam arti, pengaitan * yang memetakan vektor x di ruang Hilbert V ke suatu vektor x* di ruang dual ganda V**=Hom$_R$(V*,R), *mendefinisikan* suatu transformasi linear, dan uraian bukti tertuang dalam Teorema 3.10.

Secara implicit dengan menggunakan prinsip inferensi modus Tollens dalam logika matematika. Oleh sebab berdasarkan Teorema 3.11. Jika A ruang bagian tertutup dari ruang banach V maka ruang kuosien V/A memenuhi struktur ruang bernorma lengkap. Dan oleh sebab V ruang Hilbert maka V adalah ruang bernorma lengkap, ini berakibat ruang *dual* ganda V**, (akibat Teorema 3.10), memenuhi struktur ruang Banach, berakibat V**/A memenuhi struktur ruang bernorma lengkap, untuk suatu himpunan tertutup A⊂V**.

DAFTAR PUSTAKA

Ambrose W. 1975. Spectral Resolution of groups of Unitary operators, Duke Math

Barbasch D. 1989. The Unitary dual for complex classical lie group, Invent, Math 96

Brown ID. 1973. Dual Topology of Nilpotent lie groups. *Ann Sci Ecole Norm*. (sup) 6: 407 – 411

Corwin LW & Greenleaf FP. 1990. Representations of Nilpoten lie groups and Their Applications, Cambridge U. Press Cambridge, UK.

Folland GB. 1984. Real Analysis, John Wiley, New york.

Folland GB. 1988. Acourse in Abstract Harmonic Analysis, CRC PRESS Boca Ralan Ann Arbar London Tokyo.

Feel JMG. 1989. The dual spaces of C* algebra, Trans. Math. PRESS Tokyo Singapure

Royden. 1980. Real Analysis, Macmilan Publishing Company NewYork

Walter R. 1975. Principles of Mathematical Analysis, Mc Graw Hill International Edition

Wuryanto. 2002. Membangun ruang Kuosien berbasis ruang banach. Makalah pada seminar nasional " Kontribusi statistika dan matematika di era afta" . Surabaya. ITS