Indones. J. Math. Nat. Sci. 45(1) 2022
Indonesian Journal of Mathematics and Natural Sciences
http://journal.unnes.ac.id/nju/index.php/JM

Pemrograman Non Linear dengan Pendekatan Separable Programming dan Lagrange Multiplier dalam Penetapan Biaya Produksi Optimal Lanting di "Lanting Bumbu An-Nisa"

Tamara Arindita*, Mashuri, Rahayu Budhiati Veronika

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 Lt.1, Kampus Sekaran Gunungpati, Semarang 50229
*E-mail: arinditatamara@gmail.com

Diterima 5 Januari 2022 Disetujui 24 Februari 2022 Dipublikasikan 28 April 2022

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menerapkan masalah pemrograman nonlinear dalam menetapkan biaya produksi optimal lanting di "Lanting Bumbu An-Nisa" dengan pendekatan Separable Programming dan Lagrange Multiplier. Separable programming merupakan suatu pendekatan penyelesaian masalah nonlinear dengan mentrasformasikan bentuk nonlinear menjadi bentuk linear yang memuat satu variabel, sedangkan Lagrange Multiplier dengan cara membentuk sebuah fungsi baru. Hasil dari Separable Programming diperoleh solusi bahwa "Lanting Bumbu An-Nisa" harus memproduksi 500 kemasan lanting rasa bawang, 500 kemasan lanting rasa keju, 500 kemasan lanting rasa pedas manis, dan 500 kemasan lanting rasa jagung dengan biaya total sebesar Rp 11.242.517,3. Dengan Lagrange Multiplier diperoleh solusi bahwa "Lanting Bumbu An-Nisa" harus memproduksi 533 kemasan lanting rasa bawang, 507 kemasan lanting rasa keju, 505 kemasan lanting rasa pedas manis, dan 455 kemasan lanting rasa jagung dengan biaya produksi sebesar Rp 11.213.943,6. Berdasakan penelitian, diperoleh bahwa metode Lagrange Multiplier lebih optimal dalam penentuan produksi lanting dibandingkan dengan Separable Programming.

Kata kunci: pemrograman nonlinear, optimasi Separable Programming, Lagrange Multiplier

Abstract

This research is aimed to apply nonlinear programming problems for determining the optimal production cost of lanting in "Lanting Bumbu An - Nisa" using Separable Programming approach and Lagrange Multiplier method. Separable programming is a nonlinear problem solving that is approached by transforming the nonlinear form into a linear form and it contains of one variable. While Lagrange Multiplier by forming a new function. The research results of using Separable programming in "Lanting Bumbu An-Nisa" should produce 500 packs of lanting onion flavor, 500 packs of lanting cheese flavor, 500 packs of lanting sweet spicy flavor, and 500 packs of lanting corn flavor with total production cost of Rp 11.242.517,3. Meanwhile using Lagrange Multiplier is " Lanting Bumbu An -Nisa " have to produce 533 packs of lanting onion flavor, 507 packs of lanting cheese flavor, 505 packs of lanting sweet spicy flavor, and 455 packs of lanting corn flavor with total production cost Rp 11.213.943,6. Based on the research, it can be found that Lagrange Multiplier method is more optimal than Separable Programming to determine lanting production in "Lanting Bumbu An-Nisa"..

Key words: Nonlinear programming, optimization Separable Prpgramming, Lagrange Multiplier

How to cite:
Arindita T., Mashuri, & Veronika R.B. (2020). Penyelesaian pemrograman nonlinear dengan pendekatan separable programming dan Lagrange Multiplier. *Indonesian Journal of Mathematics and Natural Science*, 45(1), 9-19

PENDAHULUAN

Optimasi merupakan tindakan untuk mendapatkan hasil yang terbaik terhadap suatu masalah. Permasalahan optimasi meliputi pemaksimuman atau peminimuman suatu fungsi tujuan yang dibatasi oleh berbagai kendala keterbatasan sumber daya dan kendala persyaratan tertentu yang harus dipenuhi (Sasongko *et al.*, 2012). Optimasi dalam pembuatan keputusan ini dapat dicapai dengan analisis kuantitatif yang mendasarkan pada pengalaman dan pertimbangan manajerial, dan analisis kuantitatif menggunakan teknik matematika dan statistik (Muhammad *et al.*, 2013).

Model masalah optimasi dapat berupa pemrograman linear maupun nonlinear. Saat ini, dengan semakin kompleksnya permasalahan yang timbul, tidak semua masalah yang terjadi dapat dibentuk menjadi model linear. Untuk itu digunakanlah model nonlinear untuk menyelesaikannya. Suatu permasalahan disebut nonlinear jika fungsi tujuan dan kendalanya mempunyai bentuk nonlinear pada salah satu atau keduanya.

Separable programming merupakan suatu metode penyelesaian dalam masalah nonlinear dengan mentransformasikan bentuk nonlinear menjadi bentuk linear yang memuat satu variabel. Pada *Separable programming* fungsinya merupakan penjumlahan fungsi nonlinear, yang selanjutnya dipisahkan menjadi satu variabel. Fungsi Separable adalah Fungsi n variabel $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dikatakan penjumlahan yang dapat dipisahkan (*additively separable*) jika dapat ditulis dengan $f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)$ (Segal, 1994). *Separable programming* dapat diselesaikan dengan menggunakan pendekatan *piecewise linear function.*

Mariani (2003) membahas penyelesaian masalah s*eparable programming* yang diselesaikan dengan metode simpleks. Niederhoff (2007) menggunakan Separable Programming untuk menyelesaikan masalah multi produk multiple ex-ante kendala newsvendor dan ekstensi. Marpaung (2012) membahas perbandingan pendekatan s*eparable programming* dengan *the karush-kuhn-tucker conditions* dalam memberikan solusi optimal. Nurcahyani (2014) membahas tentang penyelesaian *separable programming* pada portofolio optimal. Febriani (2015) membahas penyelesaian pemrograman nonlinear dengan *pendekatan separable* programming untuk produksi bakpia Eny. Utami (2015) membahas tentang efektivitas penyelesaian model nonlinear menggunakan pendekatan *quadratic programming* dan *separable programming* untuk optimasi biaya produksi pada bakpia 716.

Lagrange multiplier juga merupakan suatu metode penyelesaian dalam masalah nonlinear. Metode ini digunakan untuk menentukan persoalan optimasi dengan kendala menjadi optimasi tanpa kendala. Berbeda dengan *Separable Programming*, penyelesaian *Lagrange Multiplier* ini dengan cara membentuk sebuah fungsi baru yang merupakan penjumlahan dari fungsi yang hendak dioptimumkan ditambah hasil kali pengali Lagrange (λ) dengan fungsi kendalanya.

$$L(X, \lambda) = f(X) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(X)$$

Beberapa penelitian tentang metode *Lagrange Multiplier* telah dibahas oleh Ridwan (2007) mengenai optimasi bersyarat menggunakan lagrange multiplier dan aplikasinya pada berbagai kasus dalam bidang ekonomi. Syaripuddin (2010) membahas mengenai aplikasi Metode Lagrange pada fungsi produksi Cobb-Douglass. Kurniati (2014) membahas tentang penentuan proporsi saham portofolio dengan metode lagrange.

Separable programming dan *Lagrange Multiplier* dapat diaplikasikan dalam masalah optimasi produk suatu perusahaan. Misalnya pengoptimalan pembuatan produksi lanting. Lanting merupakan makanan ringan yang terbuat dari singkong berbentuk lingkaran kecil atau angka delapan. Lanting merupakan oleh-oleh khas Kebumen. Salah satu industri pembuatan lanting terletak di Karanganyar, Kebumen, "Lanting Bumbu An-Nisa" merupakan usaha menengah kecil yang menghasilkan produksi lanting bumbu tersebut. Lanting di sini memiliki berbagai varian rasa dan memiliki banyak peminat baik warga Kebumen sendiri maupun wisatawan. Banyak para wisatawan dari luar Kebumen yang memesan lanting di "Lanting Bumbu An-Nisa" sebagai oleh-oleh. Namun "Lanting Bumbu An-Nisa" masih memiliki kendala dalam penetapan jumlah produksi agar biaya yang dikeluarkan minimum. Penelitian ini bertujuan untuk menerapkan masalah pemrograman nonlinear dalam menetapkan biaya produksi optimal lanting di "Lanting Bumbu An-Nisa" dengan pendekatan Separable Programming dan Lagrange Multiplier.

METODE

Sumber Data dan Variabel Penelitian

Data yang digunakan dalam penulisan artikel ini adalah data sekunder. Keterangan lain yang mendukung, dikumpulkan dengan metode wawancara dengan pemilik "Lanting Bumbu An-Nisa". Objek yang diteliti adalah data biaya produksi lanting pada bulan Mei sampai Agustus 2017 dengan empat varian rasa. Biaya produksi merupakan biaya keseluruhan perusahaan untuk memproduksi suatu barang yang jumlahnya lebih besar dibanding dengan jenis biaya lain, yang meliputi biaya bahan baku, biaya tenaga kerja langsung, dan biaya tidak langsung.

Metode Analisis

Langkah-langkah penyelesaian dalam penelitian ini adalah:

1. Menentukan fungsi tujuan dengan mengetahui biaya produksi lanting pada setiap varian rasa pada bulan Mei sampai Agustus sehingga dapat memodelkan dalam program nonlinear.
2. Menentukan variabel keputusan, fungsi tujuan, dan semua fungsi kendala dalam masalah.
3. Memodelkan permasalahan ke dalam model matematis program nonlinear
4. Menyelesaikan permasalahan dengan metode *Separable programming* dan *Lagrange Multiplier.*
   1.) Separable programming
      a. Membentuk fungsi separable
         $Z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_n(x_n)$
         $g_{11}(x_1) + g_{12}(x_2) + \cdots + g_{1n}(x_n)(\leq, =, \geq)b_1$
         $g_{21}(x_1) + g_{22}(x_2) + \cdots + g_{2n}(x_n)(\leq, =, \geq)b_2$
         $g_{m1}(x_1) + g_{m2}(x_2) + \cdots + g_{mn}(x_n)(\leq, =, \geq)b_m$
         dan $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$
      b. Mentransformasikan fungsi nonlinear menjadi fungsi linear dengan hampiran fungsi linear sepotong-sepotong formulasi delta.
         $$\hat{f}_j(x_j) = f_j(x_{oj}) + \sum_{v=1}^{k_j} (\Delta f_{vj})\delta_{vj}, \Delta f_{vj} = f_j(x_{vj}) - f_j(x_{(v-1)j})$$
         $$\hat{g}_{ij}(x_j) = g_{ij}(x_{0j}) + \sum_{v=1}^{k_j} (\Delta g_{i,vj})\delta_{vj}\, , \Delta g_{i,vj} = g_{ij}(x_{vj}) - g_{ij}(x_{(v-1)j})$$
      c. Membentuk masalah AP berdasarkan hampiran linear dari masalah P yang diperoleh dengan menggunakan formulasi delta.
         Meaksimumkan/Meminimumkan
         $Z = \sum_{j \notin L} \hat{f}_j(x_j)$
         terhadap kendala
         $\sum_{j \notin L} \hat{g}_{ij}(x_j)(\leq, =, \geq)b_i, i = 1,2, \ldots, m$
         $x_j \geq 0$ untuk $\mathrm{j} = 1,2, \ldots, \mathrm{n}$ dan $j \notin L$
      d. Membentuk masalah LAP dengan mendistribusikan nilai-nilai yang diperoleh dari masalah AP.
         Memaksimumkan/Meminimumkan
         $Z = \sum_{j \notin L}(\hat{f}_j(x_{0j}) + \sum_{v=1}^{k_j}(\Delta x_{vj})\delta_{vj})$
         terhadap kendala
         $\sum_{j \notin L}(g_{ij}(x_{0j}) + \sum_{v=1}^{k_j}(\Delta g_{i,vj})\delta_{vj}) (\leq, =, \geq)b_i, (i = 1,2, \ldots, m)\ 0 \leq \delta_{vj} \leq 1$
         untuk $v = 1,2,3, \ldots, k_j; j \notin L$
      e. Memperoleh masalah pemrograman linear dengan fungsi tujuan dan fungsi kendala linear.

f. Menyelesaikan pemrograman linear dengan bantuan software WinQSB

2.) Lagrange Multiplier

a. Membentuk fungsi *lagrange* yaitu fungsi yang memuat hasil penjumlahan atau selisih fungsi tujuan dan perkalian antara pengali *lagrange* dengan fungsi kendala.
Fungsi Lagrange yang terbentuk adalah
$F(x, y, \lambda_i) = f(x, y) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X, Y)$
$F(x_1, x_2, x_3, \lambda_i) = f x_1, x_2, x_3) + \lambda_i g_i(x_1, x_2, x_3),$
$i = 1,2,3$

b. Membuat turunan pertama pada semua variabel sebagai syarat perlu meminimumkan fungsi *lagrange* dalam kondisi stasioner
   i. $\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3, \lambda_i) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) + \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = 0$
   ii. $\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3, \lambda_i) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) + \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = 0$
   iii. $\frac{\partial F}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3, \lambda_i) = \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) + \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = 0$
   iv. $\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}(x_1, x_2, x_3, \lambda_i) = g_i(x_1, x_2, x_3) = 0, i = 0,1,2,3$

c. Memperoleh titik-titik kritis dengan menyelesaikan persamaan yang diperoleh dengan bantuan *software* Maple.

d. Mencari nilai ekstrim dengan mensubstitusikan titik-titik kritis ke dalam persamaan nonlinear.

e. Menentukan solusi optimal

HASIL DAN PEMBAHASAN

"Lanting Bumbu An-Nisa" memproduksi lanting dengan 4 varian rasa yaitu rasa bawang, keju, pedas manis, dan jagung. Pada pengumpulan data, telah diperoleh data biaya produksi perbulan lanting dari bulan Mei sampai Agustus 2017. Biaya produksi lanting diberikan pada Tabel 1, Tabel 2, Tabel 3, dan Tabel 4.

Tabel 1. Biaya produksi lanting rasa bawang

Bulan produksi	Jumlah Produksi (kemasan)	Biaya Produksi
Mei	538	3.223.300
Juni	684	4.181.400
Juli	645	3.864.400
Agustus	521	3.121.400

Tabel 2. Biaya produksi lanting rasa keju

Bulan produksi	Jumlah Produksi (kemasan)	Biaya Produksi
Mei	470	2.540.500
Juni	578	3.091.700
Juli	523	2.785.900
Agustus	417	2.349.400

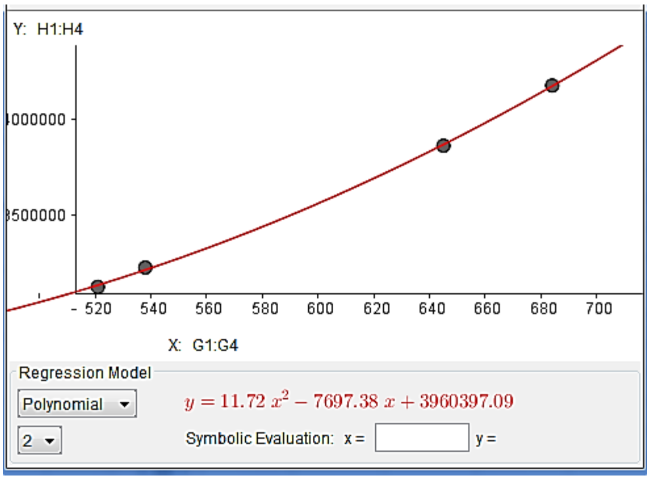
Tabel 3. Biaya produksi lanting rasa pedas manis

Bulan produksi	Jumlah Produksi (kemasan)	Biaya Produksi
Mei	324	1.949.700
Juni	567	2.924.500
Juli	599	3.141.500
Agustus	356	2.065.000

Tabel 4. Biaya produksi lanting rasa jagung

Bulan produksi	Jumlah Produksi (kemasan)	Biaya Produksi
Mei	363	2.333.400
Juni	456	2.705.600
Juli	354	2.281.700
Agustus	397	2.442.500

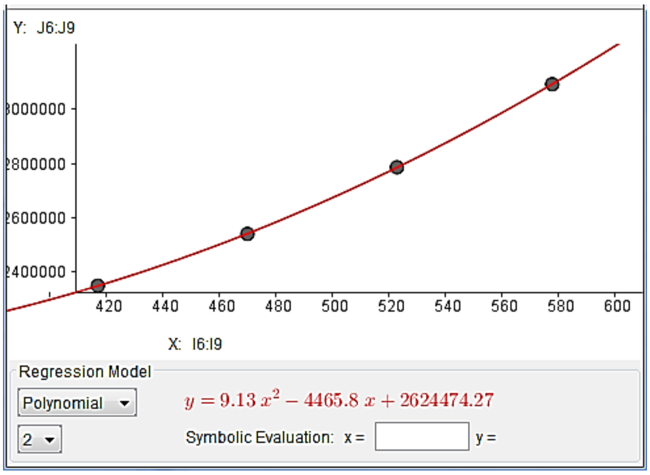
Sebelum melakukan perhitungan, data yang telah diperoleh terlebih dahulu dianalisis untuk mengetahui karakteristik data tersebut. Analisis yang dilakukan adalah analisis regresi. Dalam skripsi ini akan digunakan software GeoGebra. Hasil analisis yang dilakukan menggunakan software GeoGebra diberikan Gambar 1.



Gambar 1. Output regresi dari biaya produksi lanting rasa bawang pada bulan Mei sampai Agustus

Berdasarkan Gambar 1 didapatkan masalah regresinya berbentuk nonlinear, yaitu:

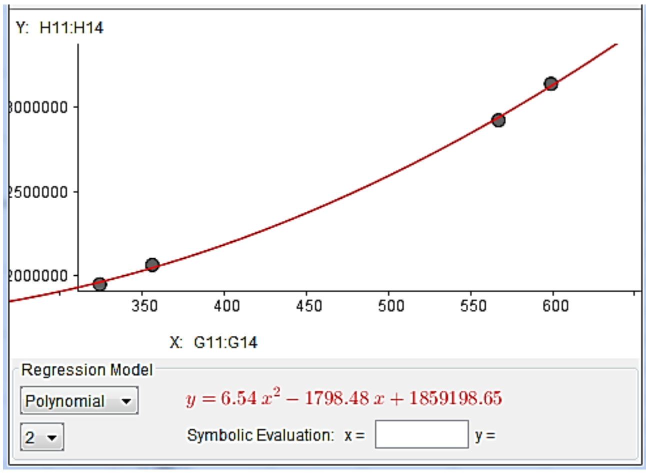
$$f(x) = 11{,}72x^2 - 7697{,}38x + 3960397{,}09$$



Gambar 2. Output regresi dari biaya produksi lanting rasa keju pada bulan Mei sampai Agustus

Berdasarkan Gambar 2 didapatkan masalah regresinya berbentuk nonlinear, yaitu

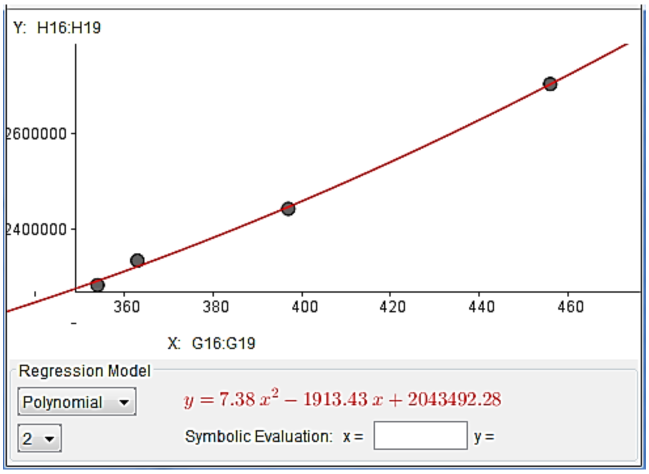
$$f(x) = 9{,}13x^2 - 4465{,}8x + 2624474{,}27$$



Gambar 3. Output regresi dari biaya produksi lanting rasa pedas manis pada bulan Mei sampai Agustus

Berdasarkan Gambar 3 didapatkan masalah regresinya berbentuk nonlinear, yaitu

$$f(x) = 6{,}54x^2 - 1798{,}48x + 1859198{,}65$$



Gambar 4. Output regresi dari biaya produksi lanting rasa jagung pada bulan Mei sampai Agustus

Berdasarkan Gambar 4 didapatkan masalah regresinya berbentuk nonlinear, yaitu

$$f(x) = 7{,}38x^2 - 1913{,}43x + 2043492{,}28$$

Selanjutnya membentuk model matematikanya:

1. Mengidentifikasi variabel keputusan
   x_1 = jumlah produksi lanting rasa bawang
   x_2 = jumlah produksi lanting rasa keju
   x_3 = jumlah produksi lanting rasa bawang
   x_4 = jumlah produksi lanting rasa bawang

2. Mengidentifikasi fungsi tujuan

   Tujuan dalam masalah ini adalah mengusahakan agar biaya total menjadi minimum. Setelah dilakukan analisis regresi dengan *software* WinQsb pada data produksi lanting setiap varian rasanya, diperoleh biaya produksi totalnya adalah

   Biaya produksi = $[11{,}72x_1^2 - 7697{,}38x_1 + 3960397{,}09] + [9{,}13x_2^2 - 4465{,}8x_2 + 2624474{,}27] + [6{,}54x_3^2 - 1798{,}48x_3 + 1859198{,}65] + [7{,}38x_4^2 - 1913{,}43x_4 + 2043492{,}28]$ (1)

3. Mengidentifikasi fungsi kendala dalam masalah

   Pada bulan September industri Lanting Bumbu An-Nisa akan mendapat pesanan untuk menyediakan 2000 kemasan lanting untuk jumlah keseluruhan rasa lanting yang tersedia pada bulan tersebut. Berdasarkan data pada bulan Mei sampai Agustus, Lanting Bumbu An-Nisa akan menentukan jumlah produksi untuk setiap varian rasa agar biaya produksi total menjadi minimum.

   Kendala permasalahan ini adalah bagaimana memenuhi pesanan sesuai dengan jumlah pesanan

   Kendala

   $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2000$ (2a)

   $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ (2b)

4. Penyelesaian masalah nonlinear menggunakan Separable Programming

   Masalah P yang diperoleh adalah sebagai berikut:

   $f_1(x_1) = 11{,}72x_1^2 - 7697{,}38x_1$ (3a)

   $f_2(x_2) = 9{,}13x_2^2 - 4465{,}8x_2$ (3b)

   $f_3(x_3) = 6{,}54x_3^2 - 1798{,}48x_3$ (3c)

   $f_4(x_4) = 7{,}38x_4^2 - 1913{,}43x_4 + 10487562{,}29$ (3d)

   dengan kendala

   $g_{11}(x_1) = x_1,$ (4a)

   $g_{12}(x_2) = x_2$ (4b)

   $g_{13}(x_3) = x_3$ (4c)

   $g_{14}(x_4) = x_4$ (4d)

   Selanjutnya kita akan menentukan titik kisi untuk membuat hampiran masalah P. Dipilih 5 titik kisi yaitu 0, 500, 1000, 1500, 2000, kemudian kita membentuk hampiran masalah P dinyatakan sebagai masalah AP sebagai berikut

   $\hat{f}_1(x_1) = f_1(x_{10}) + \sum_{v=1}^{4}(\Delta f_{1v})\delta_{1v}$ (5a)

   $\hat{f}_2(x_2) = f_2(x_{20}) + \sum_{v=1}^{4}(\Delta f_{2v})\delta_{2v}$ (5b)

   $\hat{f}_3(x_3) = f_3(x_{30}) + \sum_{v=1}^{4}(\Delta f_{3v})\delta_{3v}$ (5c)

   $\hat{f}_4(x_4) = f_4(x_{40}) + \sum_{v=1}^{4}(\Delta f_{4v})\delta_{4v}$ (5d)

   Dengan kendala

   $\hat{g}_{11}(x_1) = g_{11}(x_{10}) + \sum_{v=1}^{4}(\Delta g_{1,1v})\,\delta_{1v}$ (6a)

   $\hat{g}_{12}(x_2) = g_{12}(x_{20}) + \sum_{v=1}^{4}(\Delta g_{1,2v})\,\delta_{2v}$ (6b)

   $\hat{g}_{13}(x_3) = g_{13}(x_{30}) + \sum_{v=1}^{4}(\Delta g_{1,3v})\,\delta_{3v}$ (6c)

   $\hat{g}_{14}(x_4) = g_{14}(x_{40}) + \sum_{v=1}^{4}(\Delta g_{1,4v})\,\delta_{4v}$ (6d)

   $0 \leq \delta_{1v}, \delta_{2v}, \delta_{3v}, \delta_{4v} \leq 1$ untuk $v = 1,2,\ldots,4$

   diperoleh nilai-nilai x_j

   $x_1 = 0 + [500\delta_{11} + 500\delta_{12} + 500\delta_{13} + 500\delta_{14}]$ (7a)

   $x_2 = 0 + [500\delta_{21} + 500\delta_{22} + 500\delta_{23} + 500\delta_{24}]$ (7b)

$$x_3 = 0 + [500\delta_{31} + 500\delta_{32} + 500\delta_{33} + 500\delta_{34}] \qquad (7c)$$

$$x_4 = 0 + [500\delta_{41} + 500\delta_{42} + 500\delta_{43} + 500\delta_{44}] \qquad (7d)$$

Pemrograman linear dengan fungsi-fungsi linear pada masalah LAP sebagai berikut:

$$\sum_{j \notin L} \sum_{v=1}^{4} \hat{f}_j(x_{vj})\delta_{vj}$$

$$= [-1258383\delta_{11} + 2601279\delta_{12} + 8457310\delta_{13} + 21685034\delta_{14}] + [-444605\delta_{21} + 2715165\delta_{22} + 7353600\delta_{23} + 17964240\delta_{24}] + [171682\delta_{31} + 2575134\delta_{32} + 5967760\delta_{33} + 13848464\delta_{34}] + [234349{,}5\delta_{41} + 2958106{,}5\delta_{42} + 6792285\delta_{43} + 15708399\delta_{44}]$$

dengan kendala

$\sum_{j \notin L} \sum_{v=1}^{4} \hat{g}_{ij}(x_{vj})\delta_{vj} = [500\delta_{11} + 500\delta_{12} + 500\delta_{13} + 500\delta_{14}] + [500\delta_{12} + 500\delta_{22} + 500\delta_{32} + 500\delta_{42}] + [500\delta_{13} + 500\delta_{23} + 500\delta_{33} + 500\delta_{43}] + [500\delta_{14} + 500\delta_{24} + 500\delta_{34} + 500\delta_{44}] = 2000$

Kemudian kita menggunakan *software* WinQsb untuk mempermudah perhitungan.

	20:13:02		05/11/2017 20:13:02 PM	05/11/2017 20:13:02 PM	05/11/2017 20:13:02 PM	05/11/2017 20:13:02 PM		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	1.0000	-918,690.0000	-918,690.0000	0	basic	-M	888,285.0000
2	X2	0	4,941,310.0000	0	5,860,000.0000	at bound	-918,690.0000	M
3	X3	0	10,801,310.0000	0	11,720,000.0000	at bound	-918,690.0000	M
4	X4	0	16,661,310.0000	0	17,580,000.0000	at bound	-918,690.0000	M
5	X5	1.0000	49,600.0000	49,600.0000	0	basic	-M	888,285.0000
6	X6	0	4,614,600.0000	0	4,565,000.0000	at bound	49,600.0000	M
7	X7	0	9,179,600.0000	0	9,130,000.0000	at bound	49,600.0000	M
8	X8	0	13,744,600.0000	0	13,695,000.0000	at bound	49,600.0000	M
9	X9	1.0000	735,760.0000	735,760.0000	0	basic	-M	888,285.0000
10	X10	0	4,005,760.0000	0	3,270,000.0000	at bound	735,760.0000	M
11	X11	0	7,275,760.0000	0	6,540,000.0000	at bound	735,760.0000	M
12	X12	0	10,545,760.0000	0	9,810,000.0000	at bound	735,760.0000	M
13	X13	1.0000	888,285.0000	888,285.0000	0	basic	735,760.0000	4,578,285.0000
14	X14	0	4,578,285.0000	0	3,690,000.0000	at bound	888,285.0000	M
15	X15	0	8,268,285.0000	0	7,380,000.0000	at bound	888,285.0000	M
16	X16	0	11,958,290.0000	0	11,070,000.0000	at bound	888,285.0000	M
	Objective	Function	(Min.) =	754,955.0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	2,000.0000	=	2,000.0000	0	1,776.5700	1,500.0000	2,000.0000
2	C2	1.0000	<=	1.0000	0	-1,806,975.0000	1.0000	2.0000
3	C3	1.0000	<=	1.0000	0	-838,685.0000	1.0000	2.0000
4	C4	1.0000	<=	1.0000	0	-152,525.0000	1.0000	2.0000
5	C5	1.0000	<=	1.0000	0	0	1.0000	M

Gambar 5. Hasil output WinQsb

Hasil output (Gambar 5) dari *software* WinQsb diperoleh nilai $\delta_{11} = 1, \delta_{21} = 1, \delta_{31} = 1, \delta_{41} = 1$. Maka diperoleh nilai x_1, x_2, x_3, x_4 sebagai berikut.

$$x_1 = 0 + [500\delta_{11} + 500\delta_{12} + 500\delta_{13} + 500\delta_{14}] = 500(1) = 500$$

$$x_2 = 0 + [500\delta_{21} + 500\delta_{22} + 500\delta_{23} + 500\delta_{24}] = 500(1) = 500$$

$$x_3 = 0 + [500\delta_{31} + 500\delta_{32} + 400\delta_{33} + 500\delta_{34}] = 500(1) = 500$$

$$x_4 = 0 + [500\delta_{41} + 500\delta_{42} + 500\delta_{43} + 500\delta_{44}] = 500(1) = 500$$

sehingga diperoleh jumlah produksi lanting rasa bawang sebanyak 500 kemasan, lanting rasa keju sebanyak 500 kemasan, lanting rasa pedas manis sebanyak 500 kemasan, dan lanting rasa jagung sebanyak 500 kemasan, dengan biaya total yang diperoleh sebesar

$$\sum_{j=1}^{4} f_j(x_j) = 11{,}72(500)^2 - 7697{,}38(500) + 9{,}13(500)^2 - 4465{,}8(500) + 6{,}54(500)^2 - 1798{,}48(500) + 7{,}38(500)^2 - 1913{,}43(500) + 10487562{,}29 = 11.242.517{,}3$$

5. Penyelesaian masalah nonlinear dengan Lagrage Multiplier
   Membentuk fungsi baru Lagrange

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda) = 11{,}72x_1^2 - 7697{,}38x_1 + 9{,}13x_2^2 - 4465{,}8x_2 + 6{,}54x_3^2 - 1798{,}48x_3 + 7{,}38x_4^2 - 1913{,}43x_4 + 10487562{,}29 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2000)$$

   Menentukan syarat perlu untuk mendapatkan titik ekstrem

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 11{,}72x_1 - 7697{,}38 + \lambda = 0 \leftrightarrow 11{,}72x_1 + \lambda = 7697{,}38$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 9{,}13x_2 - 4465{,}8 + \lambda = 0 \leftrightarrow 9{,}13x_2 + \lambda = 4465{,}8$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 6{,}54x_3 - 1798{,}48 + \lambda = 0 \leftrightarrow 6{,}54x_3 + \lambda = 1798{,}48$$
$$\frac{\partial L}{\partial_{x_4}} = 7{,}38x_4 - 1913{,}43 + \lambda = 0 \leftrightarrow 7{,}38x_4 + \lambda = 1913{,}43$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2000 = 0 \leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2000$$

Selanjutnya kita akan mencari nilai $x_1, x_2, x_3, x_4,$ dan dengan menggunakan batuan *software* Maple. Diperoleh nilai $x_1 = 533{,}2; x_2 = 507{,}5; x_3 = 504{,}5; x_4 = 454{,}9; \lambda = 4800{,}363881$. Pada permasalahan ini membahas tentang banyaknya kemasan, sehingga hasil yang diperoleh dibulatkan menjadi satuan kemasan, maka diperoleh jumlah produksi lanting rasa bawang sebanyak 533 kemasan, lanting rasa keju sebanyak 507 kemasan, lanting rasa pedas manis sebanyak 505 kemasan, dan lanting rasa jagung sebanyak 455 kemasan. Biaya total yang diperoleh sebesar

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda) = 11{,}72(533)^2 - 7697{,}38(533) + 9{,}13(507)^2 - 4465{,}8(507) + 6{,}54(505)^2 - 1798{,}48(505) + 7{,}38(455)^2 - 1913{,}43(455) + 10487562{,}29 + 4800{,}363881(533 + 507 + 505 + 455 - 2000) = 11.213.943{,}6$$

Tabel 5. Hasil perhitungan dengan pendekatan Separable Programming dan Lagrange Multiplier

		Metode	
		Separable Programming	Lagrange Multiplier
Jumlah Produksi Lanting	Lanting rasa bawang	500	533
	Lanting rasa keju	500	507
	Lanting rasa pedas manis	500	505
	Lanting rasa jagung	500	455
	Biaya total yang diperoleh	11.242.517,3	11.213.943,6

SIMPULAN

Berdasarkan penelitian dapat disimpulkan bahwa model untuk masalah pemrograman nonlinear untuk mengoptimalkan biaya produksi lanting di "Lanting Bumbu An-Nisa" dapat dituliskan sebagai berikut:

Meminimumkan

$\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) = 11{,}72x_1^2 - 7697{,}38x_1 + 9{,}13x_2^2 - 4465{,}8x_2 + 6{,}54x_3^2 - 1798{,}48x_3 + 7{,}38x_4^2 - 1913{,}43x_4 + 10487562{,}29$

dengan kendala

$\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2000$

$0 \le x_j \le 2000$

di mana variabel x_1 merupakan jumlah produksi lanting rasa bawang, x_2 merupakan jumlah produksi lanting rasa keju, x_3 merupakan jumlah produksi lanting rasa pedas manis, dan x_4 merupakan jumlah produksi lanting rasa jagung.

Berdasarkan hasil perhitungan pada pembahasan yang diselesaikan dengan menggunakan pendekatan Separable programming "Lanting Bumbu An-Nisa" harus memproduksi lanting sebanyak 500 kemasan untuk masing-masing keempat rasa sehingga memenuhi 2000 pesanan, dengan biaya sebesar Rp 11.242.517,3. Sedangkan untuk peritungan menggunakan Lagrange Multiplier "Lanting Bumbu An-Nisa" harus memproduksi lanting lanting rasa bawang sebanyak 533 kemasan, lanting rasa keju sebanyak 507 kemasan, lanting rasa pedas manis sebanyak 505 kemasan, dan lanting rasa jagung sebanyak 455 kemasan. Biaya total yang diperoleh sebesar Rp 11.213.943,6. Analisa yang diperoleh menunjukkan bahwa peyelesaian model nonlinear dengan Lagrange Multiplier pada penentuan produksi lanting lebih optimal dibandingkan dengan pendekatan Separable Programming.

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, ada beberapa saran yaitu: hasil yang diperoleh dari penelitian menunjukan bahwa penggunaan metode Lagrange Multiplier menghasilkan jumlah produksi yang lebih optimal, untuk itu penulis mengharapkan "Lanting Bumbu An-Nisa" dapat menggunakan metode Lagrange Multiplier dalam menentukan jumlah produksi untuk memenuhi pesanan sehingga dapat meminimalkan biaya produksinya. Permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini masih terbatas pada penyelesaian optimum produksi nonlinear dengan Separable Programming dan Lagrange Multiplier. Bagi pembaca yang ingin mengembangkan lebih lanjut mengenai program nonlinear dapat mengkaji perbandingan penyelesaian pemrograman nonlinear dengan bentuk dan metode lain. Metode penyelesaian nonlinear yang lain seperti *Convex Programming Nonconvex Programming, Quadratic Programming,* dan *The Karush-Kuhn-Tucker.*

DAFTAR PUSTAKA

Marpaung, B. (2012). Perbandingan pendekatan separable *programming* dengan *The Kuhn-Tucker conditions* dalam pemecahan masalah nonlinear. *Jurnal Teknik dan Ilmu Komputer,* 1(2), 153-161.

Mariani, D. (2003). Pemrograman terpisahkan (*separable programming*). Bogor: *Skripsi* : IPB.

Kurniati, E. (2014). Menentukan proporsi saham portofolio dengan metode Lagrange. *Prosiding Seminar Nasional Penelitian dan PKM Sains Teknologi dan Kesehatan*, 4(1), 155-162.

Febriani, L. (2015). Penyelesaian pemrograman nonlinear dengan pendekatan *separable programming* untuk produksi Bakpia Eny. *Skripsi*: UNY.

Ridwan, M. (2007). Optimasi bersyarat dengan menggunakan multiplier Lagrange dan aplikasinya pada berbagai kasus dalam bidang ekonomi Semarang. *Skripsi* : Universitas Negeri Semarang.

Muhammad, C.H., Dwijanto, & Abidin, Z. (2013). Optimalisasi model transshipment di PT. Primatexco menggunakan program solver. *Unnes Journal of Mathematics,* 2(1), 64-69

Niederhoff, J. (2007). Using separable programming to solve the multi-product multiple ex-ante constraint newsvendor problem and extensions. *Europe Journal of Operation Research,* 176, 941-955.

Nurcahyani, R. (2014). Penyelesaian model nonlinear menggunakan *separable programming* pada portofolio optimal. *Skripsi* : UNY.

Sasongko, A., Dwijanto & Arifudin, R. (2012). Optimalisasi masalah transportasi solver di bagian distribusi frozen vedgeentgaabnleprogram. *Unnes Journal of Mathematics.* 1(1), 40-47

Segal, U. (1994). A sufficient condition for additively separable function. *Jurnal of Mathematical Economics,* 23, 295-303.

Syaripuddin. (2010). Aplikasi metode Lagrange pada fungsi produksi Cobb-Douglass. *Jurnal Eksponensial,* 1(2), 22-25.

Utami, Y. E. W. (2015). Efektivitas penyelesaian model nonlinear menggunakan pendekatan quadratic programming dan separable programming untuk optimasi biaya produksi pada industri Bakpia 716. *Thesis*, UNY.