Jurnal MIPA 37 (2) (2014): 172-177

Jurnal MIPA

http://journal.unnes.ac.id/nju/index.php/JM

ANALISIS EKSISTENSI DAN KARAKTERISASI KONTROL OPTIMAL VAKSINASI DALAM MODEL EPIDEMI SEIR DENGAN DUA WAKTU TUNDA

R Setiawan✉ Soeyono, D Pambudi

Prodi Pendidikan Matematika, FMIPA Universitas Sebelas Maret, Solo, Indonesia

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Agustus 2014
Disetujui September 2014
Dipublikasikan Oktober 2014

Keywords:
S E I R, Optimum Control, Vaccination, Hamiltonian, Pontryagin Minimum Criteria

Abstrak

Dalam makalah ini dibahas eksistensi dan karakterisasi kontrol optimal untuk permasalahan vaksinasi. Model dasar epidemi yang digunakan adalah model penyebaran penyakit *S E I R* (*Susceptible, Exposed*, *Invected Recovered*) untuk populasi yang diasumsikan konstan dan menggunakan laju insidensi bilinear βSI/N. Analisis juga menambahkan dua parameter waktu tunda pada variabel keadaan dan variabel kontrol. Permasalahan optimasi meliputi pendefinisian fungsi tujuan yang melibatkan variabel keadaan dan variabel kontrol serta sistem persamaan diferensial (model penyebaran penyakit) sebagai kendala untuk permasalah optimasi. Analisis karakterisasi dengan menggunakan Kriteria Minimum Pontryagin dilakukan terhadap Augmented Hamiltonian dari permasalahan optimasi yang telah dibentuk untuk menentukan kondisi transversal dan kontrol optimumnya.

Abstract

This paper discusses the existence and characterization of optimal control for vaccination issue. The epidemy basic model used was SEIR (Susceptible,Exposed, Invected Recovered) disease spreading model for population which was assumed to be constant and uses βSI/N bilinear incidence rate. Analysis also adds two parameters of delayed time on condition variable and control variable. Optimalization issue include the definition of objective function which engage condition variable and control variable and differential equation system (disease spreading model) as the constraint of optimalization issue. Charakterization using Pontryagin Minimum Criteria was done against Augmented Hamiltonian from optimalization issue which was formed to determine transversal condition and its optimum control.

✉ Alamat korespondensi:
Jalan Ir. Sutami, No. 36 A Kentingan Jebres Surakarta
E-mail: rubono.matematika@gmail.com

ISSN 0215-9945

PENDAHULUAN

Penyebaran penyakit secara matematika dapat dijelaskan secara matematis lewat analisa kuantitatif dan kualitatif dari model penyebaran penyakit. Model penyebaran penyakit merupakan model berbentuk kompartemen dimana terdapat proses transfer individu. Banyak model dasar penyakit yang telah diteliti seperti *SIR* (Susceptible Invected Recovered), *SEIR (Susceptible Exposed Invected Recovered*), *SI* (*Susceptible Invected*) dan lain sebagainya. Dalam penelitian ini model dasar yang digunakan adalah model penyebaran penyakit *SEIR* dengan beberapa asumsi–asumsi tambahan. Ketika terjadi penyebaran suatu penyakit salah satu tindakan yang dilakukan adalah dengan melakukan vaksinasi. Vaksinasi dilakukan dengan tujuan untuk meminimumkan jumlah individu rentan dan sakit yang selanjutnya akan memaksimumkan jumlah individu yang sembuh. Permasalahan vaksinasi tersebut dapat diformulasikan ke dalam permasalahan kontrol optimal dengan melibatkan variabel kontrol u. Permasalahan kontrol optimal pada model penyebaran penyakit telah dibahas oleh beberapa penulis seperti. Fungsi tujuan dari permasalahan kontrol optimal vaksinasi melibatkan variabel keadaan dan juga variabel kontrol. Sedangkan yang berfungsi sebagai kendala dalam permasalahan kontrol optimal tersebut adalah sistem persamaan diferensial yang (model penyebaran penyakit).

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian berbasis kajian pustaka dengan melakukan analisis dan pembuktian matematis berdasarkan kaidah, serta referensi-referensi terkait terbaru terhadap permasalahan kontrol optimal pada model penyebaran penyakit *SEIR* yang melibatkan parameter waktu tunda. Analisis matematis meliputi pembuktian eksistensi kontrol optimal dan melakukan karakterisasi dengan prinsip minimum Pontryagin terhadap fungsi Augemented Hamiltonian yang terbentuk berdasarkan permasalahan kontrol optimal yang ada. Dalam penelitian ini juga diasumsikan bahwa penyakit yang dibahas tidak merujuk kepada jenis/nama penyakit tertentu tetapi pada jenis penyakit yang memenuhi asumsi–asumsi dasar model *SEIR* dan beberapa asumsi–asumsi tambahan yang akan dirinci pada bagian formulasi model.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Formulasi Model Matematika

Model dasar yang digunakan sebagai analisis dalam makalah ini adalah model dasar *SEIR* merupakan model dasar penyebaran penyakit yang melibatkan empat kompartemen. Dalam hal ini kita mengasumsikan bahwa jumlah populasi konstan dan terdapat lajua kematian alami pada tiap kelas individu. Laju penyebaran penyakit diasumsikan mengikuti laju insidensi bilinear dengan bentuk $\frac{\beta S(t)I(t)}{N}$. Berdasarkan asumsi–sumsi tersebut didapat model *SEIR* sebagai berikut :

$$\frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \mu_1 S(t)$$
$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - (\varepsilon + \mu_2)E(t)$$
$$\frac{dI(t)}{dt} = \varepsilon E(t) - (\gamma + \mu_3)I(t)$$
$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu_4 R(t)$$
$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$$

[1]

dengan syarat awal $E(0) = E_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0$. Dalam model tersebut $\Lambda, N, \beta, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \varepsilon, \gamma$ adalah konstanta–konstanta positif. Λ merupakan parameter yang merepresentasikan jumlah populasi awal. N merupakan total individu dalam populasi saat t. β merupakan angka kontak infektif. $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ masing–masing menunjukkan laju kematian alami pada tiap kelas. ε merupakan angka transfer dari individu rentan ke individu sakit. Sedangkan γ adalah laju kesembuhan.

Permasalahan kontrol optimal dalam pembahasan ini berkaitan dengan tindakan vaksinasi. Vaksinasi dilakukan dengan tujuan untuk mengurangi jumlah individu yang terinfeksi dan menambah jumlah individu sembuh. Vaksinasi tersebut dapat diasosiasikan dengan suatu variabel kontrol u dan ditambahkan ke dalam model penyebaran penyakit yang bersangkutan. Variabel kontrol $u(t) \in \mathcal{U}$ merupakan persentase dari individu–individu yang telah tervaksinasi per satuan waktu. Kemudian $\mathcal{U}$ didefinisikan dalam bentuk himpunan *admissible control* sebagai berikut :

$$\mathcal{U} = \{u|u(t) \text{ terukur Lebesque}, 0 \le u(t) \le u_{max} < 1, t \in [0, t_{end}]\} \quad [2]$$

Dalam artikel ini diasumsikan adanya penyederhanaan pada variabel kontrol yaitu $0 \le u(t) \le u_{max} < 1$. Hal tersebut menurut Laarabi et al. (2012), dikarenakan tidak mungkin untuk melakukan vaksinasi untuk semua individu yang masuk kelas rentan penyakit dalam satu waktu. Arti fisik dari variabel kontrol dalam masalah ini adalah jika jumlah individu rentan dan terinfeksi mencapai level yang rendah, maka jumlah individu sembuh akan meningkat.

Kemudian parameter waktu tunda dimasukkan ke dalam sistem yang berarti bahwa pada waktu t hanya sekian persen dari jumlah seluruh individu rentan yang telah tervaksinasi pada waktu τ yang lampau. Dengan demikian individu dalam kelas rentan yang tervaksinasi akan berpindah dari kelas rentan ke kelas sembuh pada saat waktu $t-\tau$. Dengan demikian akan didapat model *SEIR* sebagai berikut :

$$\frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \mu_1 S(t) - u(t-\tau)s(t-\tau)$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - (\varepsilon + \mu_2)E(t)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \varepsilon E(t) - (\gamma + \mu_3)I(t) \ (3.1.3)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu_4 R(t) + u(t-\tau)s(t-\tau)$$

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$$

[3]

Permasalahan Kontrol Optimal

Dalam subbab ini akan dijelaskan formulasi dari kontrol optimal beserta kelengkapan–kelengkapannya berdasarkan asumsi–asumsi yang ada. Tujuan dari permasalahan kontrol optimal dalam penelitian ini adalah untuk meminimumkan jumlah individu rentan dan juga individu terkena penyakit. Dalam permasalahan optimasi tujuan tersebut dikaitkan dengan meminimumkan fungsi tujuan. Fungsi tujuan dalam makalah ini diasumsikan dibentuk sebagai berikut

$$J(u) = \int_0^{t_{end}} A_1 S(t) + A_2 I(t) + \frac{1}{2} B_1 u_1^2(t) + \frac{1}{2} B_1 u_2^2(t) \qquad (4)$$

Fungsi tujuan $J(u)$ dilengkapi dengan suku kontrol kuadrat yang mencerminkan tingkat keparahan efek samping dari vaksinasi, (Laarabi et al. 2012). Variabel kontrol u merupakan anggota dari himpunan kontrol yang sesuai (*admissible control*) $\mathcal{U}$ yang dalam ini didefinisikan sebagai berikut :

$$\mathcal{U} = \{0 \le u \le u_{maks} < 1,\ t \in [0, t_{end}], \ u \text{ terukur Lebesque}\} \qquad (5)$$

Dengan demikian, secara umum permasalahan kontrol optimal dapat ditulis sebagai berikut :

$$\min\{J(u) : u \in U\} \qquad (6)$$

Dalam hal untuk membuktikan eksistensi kontrol optimal pada (6) rujukan utama yang dipakai untuk membuktikan eksistensi kontrol optimal adalah langkah – langkah pembuktian yang dilakukan oleh Fleming dan Rishel, 1975.

Eksistensi Kontrol Optimal

Kemudian akan dibahas eksistensi dari permasalahan kontrol optimal pada rumus (5). Eksistensi kontrol optimal dapat dijelaskan lewat teorema berikut. Langkah–langkah pembuktiannya berdasarkan langkah–langkah pembuktian oleh Fleming dan Rishel (1975) serta M. Elhia et al (2013)

Teorema 3.2.1. *Diberikan permasalahan kontrol optimal. Terdapat kontrol optimal $u^* \in \mathcal{U}$ sedemikian sehingga*

$$J(u^*) = \min_{u \in \mathcal{U}} J(u)$$

Bukti

Berdasarkan asumsi biologis, maka himpunan variabel kontrol (*admissible control*) $\mathcal{U}$ dan himpunan variabel–variabel keadaan jelas tidak kosong. Himpunan $\mathcal{U}$ merupakan himpunan tertutup dan konveks. Ruas kanan dari sistem persamaan diferensial merupakan fungsi yang terbatas oleh fungsi linear dalam variabel keadaan dan kontrol. Integran dari fungsi tujua konveks pada $\mathcal{U}$. Terdapat konstansta c, k_1 dan k_2 sedemikian sehingga

$$L(S, I, u) \geq k_1 + k_2(|u|^2)^{\frac{c}{2}}$$

■

Karakterisasi Kontrol Optimal

Selajutnya akan ditentukan kontrol optimal dari sistem persamaan diferensial pada rumus (1) yang selanjutnya akan ditentukan bentuk sistem yang optimal. Penentukan kontrol optimal beserta kelengkapannya akan ditentukan berdasarkan karakterisasi dari sistem persamaan diferensial yang telah dilengkapi kontrol (dalam hal ini sistem pada rumus (3). Karakterisasi dilakukan dengan menerapkan Prinsip–prinsip Minimum Pontryagin pada Hamiltonian dari permasalahan kontrol optimal yaitu :

$$H = A_1S(t) + A_2I(t) + \frac{B_1}{2}u^2(t) + \sum_{i=1}^{4}\lambda_i f_i \quad (7)$$

Teorema 3.2.*2*. *Diketahui kontrol optimal u^* and dan solusi optimal S^*, I^*, R^* dari sistem (1) and (3), Terdapat variabel adjoint , sedemikian sehingga $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ and λ_4 memenuhi*

$$\dot{\lambda_1} = -A_1 + \left(\frac{\beta I^*}{N} + \mu_1\right)\lambda_1 - \left(\frac{\beta I^*}{N}\right)\lambda_2 + (\lambda_1^+ - \lambda_4^+)u^*$$
$$\dot{\lambda_2} = (\varepsilon + \mu_2)\lambda_2 + \varepsilon\lambda_3$$
$$\dot{\lambda_3} = -A_2 - \frac{\beta S^*}{N}\lambda_2 + (\gamma + \mu_3)\lambda_3 - \gamma\lambda_4$$
$$\dot{\lambda_4} = \mu_4\lambda_4$$

dengan kondisi transvesal $\lambda_i(t_{end}) = 0, i =$ 1, 2, 3, 4. Lebih lanjut, kontrol optima u^* diberikan oleh

$$u^* = max\left(min\left(\left(\frac{{\lambda_1}^+ - {\lambda_4}^+}{B_1}\right)\chi_{[0,t_{end}-\tau]}(t)S^*, u^{max}\right), 0\right)$$

Bukti

Dengan menggunakan kriteria minimum Pontryagin yang melibatkan waktu tunda, akan didapat persamaan berikut :

$$\dot{\lambda_1} = -\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial S(t)} - \chi_{[0,t_{end}-\tau]}\frac{\partial\mathcal{H}(t+\tau)}{\partial S(t-\tau)}\ , \quad \lambda_1(t_{end}) = 0 \qquad (3.2.5)$$

$$\dot{\lambda_2} = -\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial E(t)}\ , \quad \lambda_2(t_{end}) = 0 \qquad (8)$$

$$\dot{\lambda_3} = -\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial E(t)}\ , \quad \lambda_3(t_{end}) = 0 \qquad (9)$$

$$\dot{\lambda_4} = -\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial R(t)}, \quad \lambda_4(t_{end}) = 0 \qquad (10)$$

Berdasarkan persamaan (8), (9) dan (10) akan didapat :

$$\dot{\lambda_1} = -A_1 + \left(\frac{\beta I^*}{N} + \mu_1\right)\lambda_1 - \left(\frac{\beta I^*}{N}\right)\lambda_2 + (\lambda_1^+ - \lambda_4^+)u^*$$
$$\dot{\lambda_2} = (\varepsilon + \mu_2)\lambda_2 + \varepsilon\lambda_3$$
$$\dot{\lambda_3} = -A_2 - \frac{\beta S^*}{N}\lambda_2 + (\gamma + \mu_3)\lambda_3 - \gamma\lambda_4$$
$$\dot{\lambda_4} = \mu_4\lambda_4 \qquad (11)$$

Kemudian, kontrol optimal $u^*(t)$ dapat ditentukan dengan menggunakan kondisi optimal untuk kontrol :

$$\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial u_1(t)} + \chi_{[0,t_{end}-\tau_B]}\frac{\partial\mathcal{H}(t+\tau_B)}{\partial u_1(t-\tau_B)} = 0 \qquad (12)$$

Berdasarkan persamaan (12) didapat :

$$B_1{u_1}^* + \chi_{[0,t_{end}-\tau]}\left({\lambda_4}^+ - {\lambda_1}^+\right)S^* = 0 \qquad (13)$$

Berdasarkan batasan *u* dari himpunan kontrol $\mathcal{U}$

$$u^* = \max\left(\min\left(\left(\frac{{\lambda_1}^+ - {\lambda_4}^+}{B_1}\right)\chi_{[0,t_{end}-\tau]}(t)S^*, u^{max}\right), 0\right) \qquad (14)$$

Dengan demikian pasangan kontrol optimal beserta solusi optimal dapat ditentukan sebagai berikut :

$$\frac{dS^*}{dt} = \Lambda - \frac{\beta S^* I^*}{N} - \mu_1 S^* - u^* S^*$$
$$\frac{dE^*}{dt} = \frac{\beta S^* I^*}{N} - (\varepsilon + \mu_2)E^*$$
$$\frac{dI^*}{dt} = \varepsilon E^* - (\gamma + \mu_3)I^*$$
$$\frac{dR^*}{dt} = \gamma I(t) - \mu_4 R^* + u^* S^*$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -A_1 + \left(\frac{\beta I^*}{N} + \mu_1\right)\lambda_1 - \left(\frac{\beta I^*}{N}\right)\lambda_2 + (\lambda_1^+ - \lambda_4^+)u^*$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = (\varepsilon + \mu_2)\lambda_2 + \varepsilon\lambda_3$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = -A_2 - \frac{\beta S^*}{N}\lambda_2 + (\gamma + \mu_3)\lambda_3 - \gamma\lambda_4$$

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = \mu_4\lambda_4$$

$$\lambda_i(t_{end}) = 0, i = 1,2,3,4 \text{ dan } S(0) = S_0 \geq 0, S(0) = S_0 \geq 0, E(0) = E_0 \geq 0, I(0) = I_0 \geq 0, R(0) = R_0 \geq 0$$

$$u^* = max\left(min\left(\left(\frac{{\lambda_1}^+ - {\lambda_4}^+}{B_1}\right)\chi_{[0,t_{end}-\tau]}(t)S^*, u^{max}\right), \ 0\right)$$

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis berterimakasih kepada LPPM UNS karena Penelitian ini dapat terlaksana berkat hibah Insentif Start – Up UNS 2014 dengan nomor kontrak 858/UN27.11/PN/2014.

PENUTUP

Dalam makalah ini telah dibahas tentang analisis eksistensi dan karakterisasi dari kontrol optimal yang diterapkan pada model penyebaran penyebaran penyakit *SEIR* (*Susceptible Exposed Invected Recovered*) dengan dua waktu tunda. Kontrol optimal yang dimaksud berkaitan dengan tindakan vaksinasi terhadap individu yang rentan terhadap suatu penyakit.. Kontrol yang optimal dari permasalahan pada teorema (3.2.3) berhasil ditentukan dengan menerapkan prinsip minimum Pontryagin yang melibatkan waktu tunda pada Augmented Hamiltonian dari permasalahan kontrol optimal.

DAFTAR PUSTAKA

Anonim. 2012. *IPTEK Mendukung Kelestarian Hutan dan Kesehteraan Masyarakat*. Kumpulan Karya Ilmiah Balai Penelitian Kehutanan Makasar 2012.

Bever JD, Schultz PA, Pringle A, & Morton JB. 2001. Arbuscular mycorrhizal fungi: More diverse than meets the eye, and the ecological tale of why. *BioScience* 51: 923-931.

Bonfante P & Perotto S. 1995. Strategies of arbuscular mycorrhizal fungi when infecting host plants. *New Phytol*. 130:13-21.

Bevan & Chilton. 2003. *Interactions of plants with Agrobacteria and Rhizogenes http://www.uky.edu* . (Diakses *28* Agustus *2003).*

Chalimah S. 2007. *Pemanfaatan Teknologi in vitro untuk Perkembangan Gigaspora margarita dan Acaulospora tuberculata*. Disertasi. Sekolah Pascasarjana IPB, Bogor. (Unpublished).

-------------2010. Produksi *Gigaspora margarita* dan *acaulospora tuberculosa* secara *in vivo*. *J Biosmart*, 7: 27-29.

De Souza FA. 2005. *Biology, Ecology and evolusion of the family Gigasporaceae arbuscular*. Nederlands Institut Mycorrhizal of Ecology, p 121-158.

Jakobsen J. 2004. Transport of phosphorus and carbon in arbuscular mycorrhizas. *In* A. Varma B. Hock (Ed.). *Mycorrhiza: Structure, Function, Molecular Biology and Biotechnology*. 2nd ed. Springer Verlag Berlin Heidelberg.

Jeffries P & Barea JM. 2001. Arbuscular mycorrhiza—a key component of sustainable plant–soil ecosystems. In: Hock B. (Ed.). *The Mycota. IX Fungal Associations*. Springer–Verlag, Berlin, pp. 95–113.

Jeffries P, Gianinzzi S, Perotto S, Turnau KK, & Barea JM. 2010. The contribution of arbuscular mycorrhizal fungi in sustainable maintenance of plant health and soil fertility. *Biol and Fertili Soils*. 37:1-16.

Kloepper JW. 1993. Plant growth-promoting rhizobacteria as biological control agents. Pages 255-274. In: *Soil Microbial Ecology: Applications in Agricultural and Environmental Management.* F. B. Metting, Jr. (Ed.) Marcel Dekker Inc., New York.

Lucia Y. 2005. *Cendawan mikoriza arbuskula di bawah tegakan tanaman manggis dan peranannya dalam pertumbuhan bibit manggis (Garcinia mangostana).* Tesis*.* Sekolah Pascasarjana IPB. Bogor.

Mangisah I, Suthama N, & Wahyuni HI. 2009. *Pengaruh Penambahan Starbio dalam ransum berserat kasar tinggi terhadap performa itik*. Makalah disajikan dalam Seminar Nasional Kebangkitan Peternakan Universitas Diponegoro, Semarang.

Orcutt DM. & Nilsen ET. 2000. *The Physiology of Plants Under Stress: Soil and biotic factors*. John Wiley & Sons, Inc. New York.

Redecker D, Morton JB, & Bruns TD. 2000. Ancestral lineages of arbuscular mycorrhizal fungi (*Glomales*). *Molec Phylogenet Evol.* 14: 276–284.

Sallata MK. 2011. *Pengembangan partisipasi masyarakat dalam kegiatan konservasi tanah dan air*. Makalah disajikan pada Seminar Hasil Penelitian BPK Makassar 6 Oktober 2011, Makassar (Belum dipublikasikan).

Simanungkalit RDM, Suriadikarta DA, Saraswati R, Setyorini D, & Hartatik W. 2006. *Pupuk Organik dan Pupuk Hayati*. Jawa Barat: Balai Besar Penelitian dan Pengembangan Sumberdaya Lahan Pertanian. Hal 2. ISBN 978-979-9474-57-5.

Smith SE, & Read DJ. (Eds.), 1997. *Mycorrhizal Symbiosis*. Academic Press, London, etc.

Smith SE, Smith FA, & Jacobsen I. 2003. Mycorrhizal fungi can dominate phosphate supply to pints irrespective of growth responses. *Plant Physiol*. 133:16-20.

Widiastuti H. 2004. *Biologi interaksi cendawan mikoriza arbuskula kelapa sawit pada tanah asam sebagai dasar pengembangan teknologi aplikasi dini*. Disertasi*.* Sekolah Pascasarjana, IPB. Bogor.