

## PENYELESAIAN PERSAMAAN *DUFFING OSILATOR* PADA APLIKASI *WEAK SIGNAL DETECTION* MENGGUNAKAN METODE *AVERAGING*

Z A Tamimi ✉ S B Waluya

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia

### Info Artikel

*Sejarah Artikel:*  
Diterima Agustus 2014  
Disetujui September 2014  
Dipublikasikan Oktober 2014

*Keywords:*  
*Duffing Oscillator, weak signal detection, method averaging.*

### Abstrak

Pada persamaan diferensial terdapat klasifikasi yaitu persamaan diferensial linear dan persamaan diferensial tak linear. Salah satu contoh dari persamaan diferensial tak linear yaitu persamaan Duffing. Persamaan Duffing adalah persamaan tak linear yang menggambarkan osilator dengan ketaklinearan pangkat tiga. Persamaan Duffing digunakan oleh banyak peneliti sebagai suatu pendekatan model banyak sistem fisik, persamaan ini memperlihatkan satu jangkauan sangat luas dari perilaku dalam sistem dinamika tak linear. Salah satu aplikasi pada persamaan Duffing tersebut adalah *weak signal detection*. Pada penelitian ini akan dibahas model persamaan Duffing osilator pada aplikasi *weak signal detection* kemudian diselesaikan menggunakan metode aproksimasi salah satunya yaitu metode Averaging. Dari hasil penelitian diperoleh model persamaan Duffing osilator pada aplikasi *weak signal detection* serta solusi aproksimasi dari model persamaan Duffing osilator pada aplikasi *weak signal detection* menggunakan metode Averaging dengan nilai parameter yang berbeda-beda yang solusinya dibandingkan dengan metode numerik yaitu metode Runge Kutta orde empat. Hasil yang diperoleh kemudian divisualisasikan menggunakan program Maple-12.

### Abstract

*On the differential equations there is classificaton i.e linear differential equations and nonlinear differential equations. One example of nonlinear differential equations is Duffing equation. Duffing equation is used by many researchers as a model of physical systems approach, this equation shows a very wide range of behavior in nonlinear dynamics system. One of the applications on the Duffing equation is weak signal detection. This research will be discussed Duffing oscillator equation model in weak signal detection applications then solved using approximation methods one of which is the averaging method. From the research results obtained model equation of Duffing oscillator in weak signal detection applications, and approximate solution of the model equation of Duffing oscillator in weak signal detection applications using the averaging method with varying parameter values and its solution compared with the numerical method that is fourth order of Runge Kutta method. The obtained of results then visualized using Maple-12 program.*

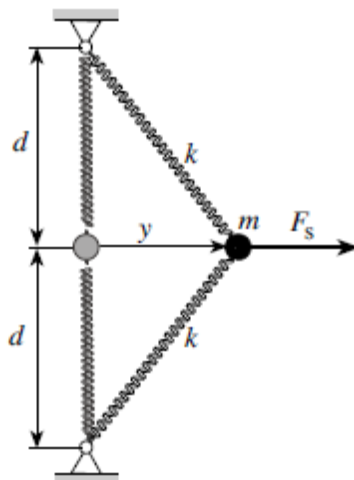
© 2014 Universitas Negeri Semarang

✉ Alamat korespondensi:  
Gedung D7 Lantai 1, Kampus Unnes Sekaran,  
Gunungpati, Semarang, 50229  
E-mail: zahrina8@gmail.com

ISSN 0215-9945

**PENDAHULUAN**

Persamaan non linier yang menggambarkan osilator dengan suku ketaklinieran pangkat tiga termasuk Persamaan Duffing. Persamaan Duffing digunakan oleh banyak peneliti sebagai suatu pendekatan model banyak sistem fisik, persamaan ini memperlihatkan satu jangkauan sangat luas dari perilaku dalam sistem dinamika non linier. Sejak tahun 1970-an, semakin populer dengan penelitian dalam bidang *chaos* (kacau), hal ini mungkin karena merupakan salah satu dari persamaan sederhana yang menggambarkan perilaku *chaos* dari suatu sistem getaran non linier (Dolu 2011). Persamaan Duffing telah ditetapkan sebagai model matematika yang cukup untuk mendeteksi sinyal lemah, dan dikutip oleh banyak literatur (Chunyan dan Zhuwen 2011). Contoh dari persamaan Duffing yaitu sebuah sistem sederhana dimana kekakuan merupakan fungsi dari perpindahan yang ditunjukkan pada Gambar 1 (Kovacic dan Brennan 2001). Dengan  $d$  merupakan panjang dari pegas ketika sistem berhenti, serta  $d_0$  adalah panjang awal pegas.



**Gambar 1.** Contoh sederhana dari sistem nonlinear geometris yang terdiri dari dua pegas linier dan massa

Ketika massa bergerak ke arah  $y$ , pegas cenderung bergerak dan perubahan panjang ini penyebab dari tak linear. Hubungan antara gaya statis ( $F_s$ ) dan perpindahan  $y$ , diberikan  $F_s = 2ky \left(1 - \frac{d_0}{\sqrt{y^2 + d^2}}\right)$  dimana  $d_0 \leq d$ . Kemudian dengan menggunakan deret Taylor dan gaya harmonik eksitasi digunakan massa pada Gambar

1, maka persamaan yang dihasilkan adalah  $\ddot{y} + y + \alpha y^3 = F \cos \Omega t$  yang disebut dengan persamaan Duffing.

Istilah *weak signal* atau 'sinyal lemah' berarti sinyal makin kecil dibandingkan dengan gangguan kebisingan. *Weak signal detection* memungkinkan pengamat untuk memperhitungkan lingkungannya dalam arti dinamis dan ketelitian. Deteksi sinyal yang lemah cukup menarik bukan hanya karena lebih sulit daripada deteksi sinyal cukup kuat, tetapi juga karena situasi yang realistis untuk dipertimbangkan dalam banyak aplikasi praktis. *The Duffing osilator* sering digunakan untuk mendeteksi sinyal lemah. Dalam hal ini kuncinya adalah untuk mengidentifikasi keadaan osilator (Jalilvand & Fotoohabadi, 2011). Pada prinsip *weak signal detection* persamaan Duffing  $\ddot{y} + c\dot{y} - y + y^3 = F \cos \omega t$  menjadi

$$\begin{cases} \dot{y} = y_1, \\ \dot{y}_1 = -y_2 + \varepsilon(cy_1 - \alpha y_2^3 + F \cos \omega t + s(t)), \end{cases} \quad (1)$$

dimana  $s(t) = \mu \cos(\omega_1 t)$  disebut keadaan luar perturbasi.  $\mu$  adalah amplitudo sinyal periodik yang terdeteksi,  $\omega_1$  adalah frekuensi angular sinyal periodik yang terdeteksi (Wang et al 2012).

Terdapat beberapa metode untuk menyelesaikan persamaan Duffing, salah satunya yaitu metode perturbasi (gangguan). Salah satu metode pada teknik perturbasi ini adalah metode *Averaging*. Metode *Averaging* ini merupakan ide dari matematikawan Lagrange (1788) yang memperkenalkan "metode vareasi dari konstanta". Ide dari metode *Averaging* atau rerata ini adalah mengasumsikan sebuah persamaan osilator yang memuat sebuah parameter kecil  $\varepsilon$ .

Berdasarkan hal tersebut di atas, permasalahan yang dibahas yaitu menentukan persamaan Duffing osilator pada aplikasi *weak signal detection*, mencari solusi dari persamaan tersebut menggunakan metode *Averaging*, serta visualisasinya menggunakan *software* Maple 12. Tujuan dari penelitian ini adalah mengetahui solusi dari persamaan Duffing osilator pada aplikasi *weak signal detection* dan memvisualisasikannya menggunakan *software* Maple 12.

**METODE PENELITIAN**

Langkah-langkah pada penelitian ini, adalah menentukan dan perumusan masalah, studi pustaka, melakukan analisis serta pemecahan masalah dengan menentukan matematika persamaan Duffing osilator pada aplikasi *weak signal detection*, mencari solusi dari persamaan yang telah diperoleh menggunakan metode Averaging.

Langkah-langkah untuk menentukan solusinya adalah sebagai berikut.

- a) Menentukan persamaan Duffing osilator pada aplikasi *weak signal detection*.
- b) Mencari solusi dari persamaan yang telah diperoleh menggunakan metode Averaging.
- c) Kemudian dari solusi tersebut divisualisasikan menggunakan *software* Maple 12.

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

Persamaan Duffing secara umum dapat diberikan sebagai berikut

$$\ddot{y} + c\dot{y} + y + \alpha y^3 = F \cos \omega t \quad (1)$$

dimana  $c$  adalah koefisien damping,  $F$  adalah amplitudo gaya periodik,  $\omega$  adalah sudut frekuensi dari gaya periodik ( $\omega = 1 \text{ rad/s}$ ),

Dari persamaan (1) diasumsikan  $y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$  sehingga diperoleh

$$\begin{cases} \dot{y} = y_1 \\ \dot{y}_1 = -cy_1 - y_2 - \alpha y_2^3 + F \cos \omega t \end{cases} \quad (2)$$

Dengan mendefinisikan  $t = \varepsilon\tau$ , maka dari persamaan (2) diperoleh

$$x(t) = x(\varepsilon t) = x^*(t) \quad (3)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{dx(\varepsilon\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{dx^*(t)}{d\tau}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d^2x(\varepsilon\tau)}{d\tau^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d^2x^*(t)}{d\tau^2}$$

Substitusikan (3) pada persamaan (2), maka diperoleh persamaan

$$\begin{cases} \dot{y} = y_1 \\ \dot{y}_1 = -y_2 + \varepsilon(-cy_1 - \alpha y_2^3 + F \cos \omega t + s(t)) \end{cases} \quad (4)$$

dimana  $s(t) = \mu \cos(\omega t)$  disebut keadaan luar perturbasi.  $\mu$  adalah amplitudo sinyal periodik yang terdeteksi,  $\omega$  adalah frekuensi angular sinyal periodik yang terdeteksi. Dari persamaan (4) diperoleh

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \varepsilon \left( -\beta \frac{dy}{dt} - \alpha y^3 + F \cos \omega t + \mu \cos(\omega t) \right) \quad (5)$$

Untuk solusi persamaan (5) terdapat beberapa nilai parameter yang berbeda, yaitu  $F = 0,1$  dan  $\mu = 0$ ,  $F = 0$  dan  $\mu = 1$ ,  $F = 0$  dan  $\mu = 0,01$  serta  $F = 0,1$  dan  $\mu = 0,01$  dengan nilai epsilon masing-masing  $\varepsilon = 0,1$ , dan  $\varepsilon = 0,01$ .

Untuk kasus  $F = 0,1$  dan  $\mu = 0$  maka persamaan (5) menjadi

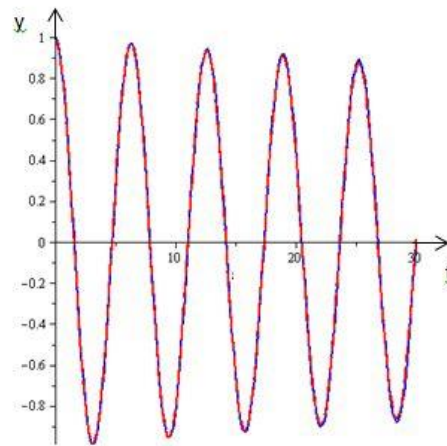
$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \varepsilon \left( 0,1 \frac{dy}{dt} - 0,01y^3 + 0,1 \cos(t) \right) \quad (6)$$

Solusi dari persamaan (6) dengan  $\varepsilon = 0,1$  dan kondisi awal  $y(0) = 0, \frac{dy}{dt}(0) = 1$  yaitu

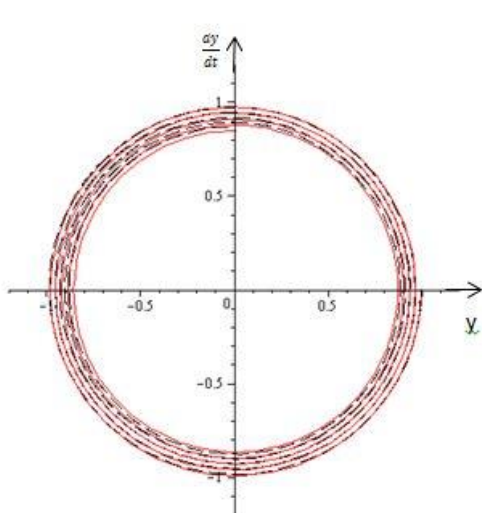
$$y = (-0,009t + 1) \cos(0,991)$$

$$\dot{y} = -(-0,009t + 1) \sin(0,991)$$

Gambar 2 berikut ini menunjukkan perbandingan plot solusi dan *phaseportrait* dari persamaan di atas menggunakan metode Averaging dengan metode Runge Kutta orde empat.



**Gambar 2.** Plot perbandingan persamaan Duffing pada aplikasi *weak signal detection* dengan  $F = 0,1$ ,  $\mu = 0$  dan  $\varepsilon = 0,1$  menggunakan metode averaging dan metode Runge Kutta orde 4



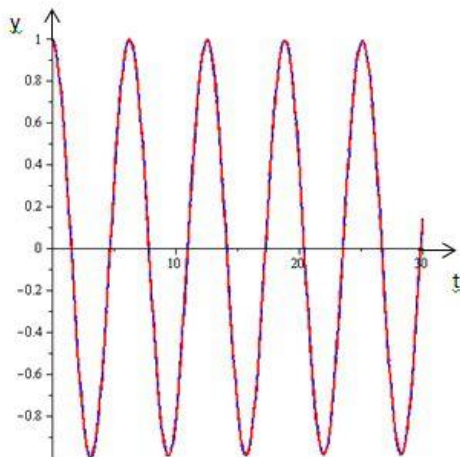
**Gambar 3.** Phaseportrait perbandingan solusi persamaan Duffing pada aplikasi *weak signal detection* dengan  $F = 0,1$ ,  $\mu = 0$  dan  $\varepsilon = 0,1$  menggunakan metode *averaging* dan metode *Runge Kutta* orde 4

Sedangkan solusi persamaan (6) dengan  $\varepsilon = 0,01$  dan kondisi awal  $y(0) = 0, \frac{dy}{dt}(0) = 1$  yaitu

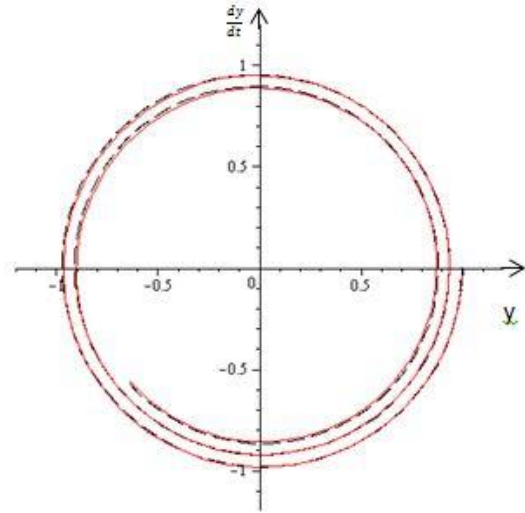
$$y = (-4,999 \cdot 10^{-4}t + 1) \cos(0,9995)$$

$$\dot{y} = -(-4,999 \cdot 10^{-4}t + 1) \sin(0,9995)$$

Gambar 4 berikut ini menunjukkan perbandingan plot solusi dan *phaseportrait* dari persamaan di atas menggunakan metode *Averaging* dengan metode *Runge Kutta* orde empat.



**Gambar 4.** Plot perbandingan solusi persamaan Duffing pada aplikasi *weak signal detection* dengan  $F = 0,1$ ,  $\mu = 0$  dan  $\varepsilon = 0,01$  menggunakan metode *averaging* dan metode *Runge Kutta* orde 4



**Gambar 5.** Phaseportrait solusi persamaan Duffing pada aplikasi *weak signal detection* dengan  $F = 0,1$ ,  $\mu = 0$  dan  $\varepsilon = 0,01$  menggunakan metode *averaging* dan metode *Runge Kutta* orde 4

Untuk kasus  $F = 0$  dan  $\mu = 1$  maka persamaan (5) menjadi

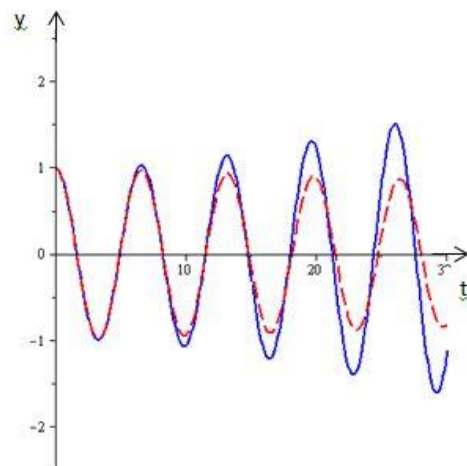
$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \varepsilon \left( 0,1 \frac{dy}{dt} - 0,01y^3 + 1 \cos(t) \right) \quad (7)$$

Solusi dari persamaan (7) dengan  $\varepsilon = 0,1$  dan kondisi awal  $y(0) = 0, \frac{dy}{dt}(0) = 1$  yaitu

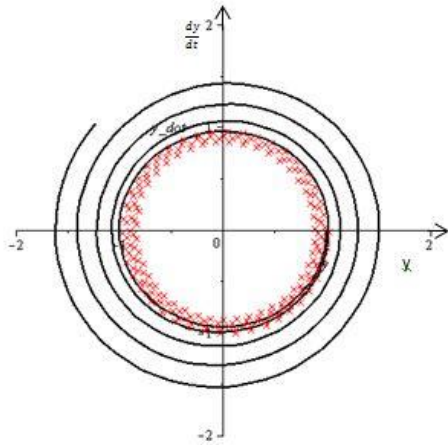
$$y = (-0,005t + 1) \cos(0,95)$$

$$\dot{y} = -(-0,005t + 1) \sin(0,95)$$

Gambar 6 berikut ini menunjukkan perbandingan plot solusi dan *phaseportrait* dari persamaan di atas menggunakan metode *Averaging* dengan metode *Runge Kutta* orde empat.



**Gambar 6.** Plot perbandingan solusi persamaan Duffing pada aplikasi *weak signal detection* dengan  $F = 0$ ,  $\mu = 1$  dan  $\varepsilon = 0,1$  menggunakan metode *averaging* dan metode *Runge Kutta* orde 4



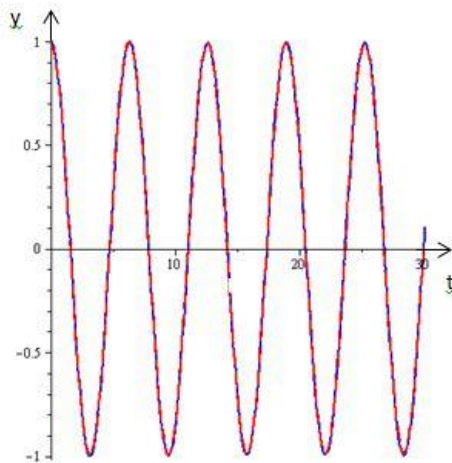
**Gambar 7.** Phaseportrait solusi persamaan Duffing pada aplikasi *weak signal detection* dengan  $F=0$ ,  $\mu=1$  dan  $\epsilon=0,1$  menggunakan metode *averaging* dan metode *Runge Kutta* orde empat

Sedangkan solusi persamaan (7) dengan  $\epsilon=0,01$  dan kondisi awal  $y(0)=0, \frac{dy}{dt}(0)=1$  yaitu

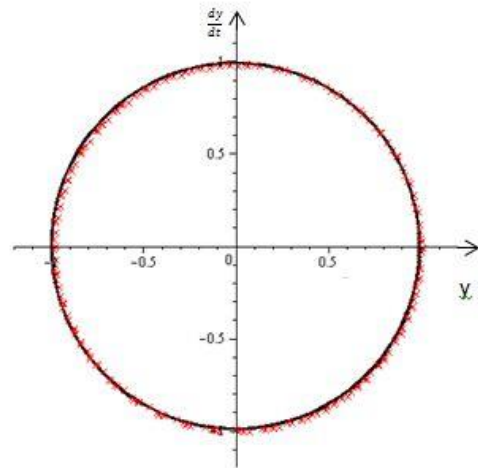
$$y = (-4,99 \cdot 10^{-4}t + 1) \cos(0,995)$$

$$\dot{y} = -(-4,99 \cdot 10^{-4}t + 1) \sin(0,995)$$

Gambar 8 berikut ini menunjukkan perbandingan plot solusi dan *phaseportrait* dari persamaan di atas menggunakan metode *Averaging* dengan metode *Runge Kutta* orde empat.



**Gambar 8.** Plot solusi persamaan Duffing pada aplikasi *weak signal detection* dengan  $F=0$ ,  $\mu=1$  dan  $\epsilon=0,01$  menggunakan metode *averaging* dan metode *Runge Kutta* orde 4



**Gambar 9.** Phaseportrait solusi persamaan Duffing pada aplikasi *weak signal detection* dengan  $F=0$ ,  $\mu=1$  dan  $\epsilon=0,01$  menggunakan metode *averaging* dan metode *Runge Kutta* orde empat

Untuk kasus  $F=0$  dan  $\mu=0,01$  maka persamaan (5) menjadi

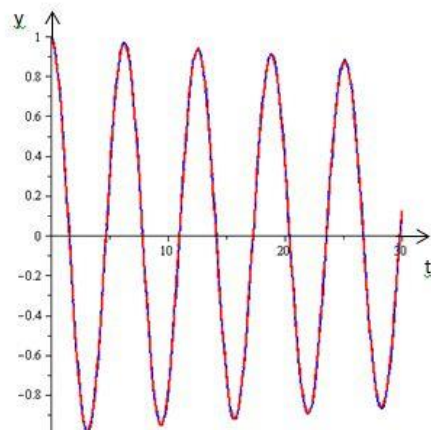
$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \epsilon \left( 0,1 \frac{dy}{dt} - 0,01y^3 + 0,01 \cos(t) \right) \quad (8)$$

Solusi dari persamaan (8) dengan  $\epsilon=0,1$  dan kondisi awal  $y(0)=0, \frac{dy}{dt}(0)=1$  yaitu

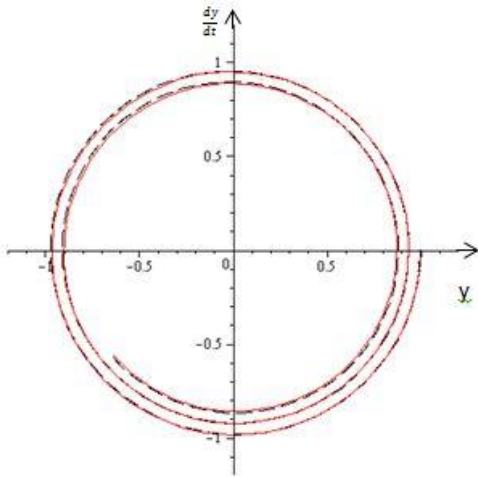
$$y = (-0,009t + 1) \cos(0,9997)$$

$$\dot{y} = -(-0,009t + 1) \sin(0,9997)$$

Gambar 10 berikut ini menunjukkan perbandingan plot solusi dan *phaseportrait* dari persamaan di atas menggunakan metode *Averaging* dengan metode *Runge Kutta* orde empat.



**Gambar 10.** Plot solusi persamaan Duffing pada aplikasi *weak signal detection* dengan  $F=0$ ,  $\mu=0,01$  dan  $\epsilon=0,1$  menggunakan metode *averaging* dan metode *Runge Kutta* orde empat



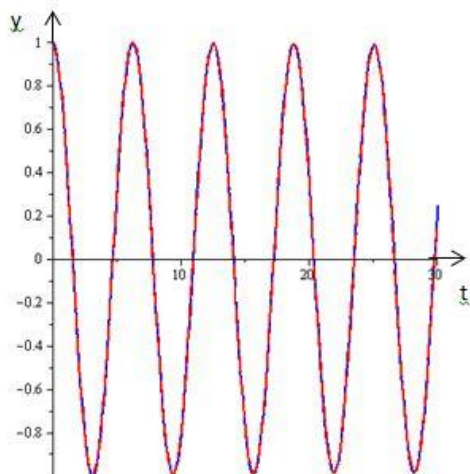
**Gambar 11.** Phaseportrait solusi persamaan Duffing pada aplikasi *weak signal detection* dengan  $F=0$ ,  $\mu=0,01$  dan  $\epsilon=0,1$  menggunakan metode *averaging* dan metode *Runge Kutta* orde empat

Sedangkan solusi persamaan (8) dengan  $\epsilon=0,01$  dan kondisi awal  $y(0)=0, \frac{dy}{dt}(0)=1$  yaitu

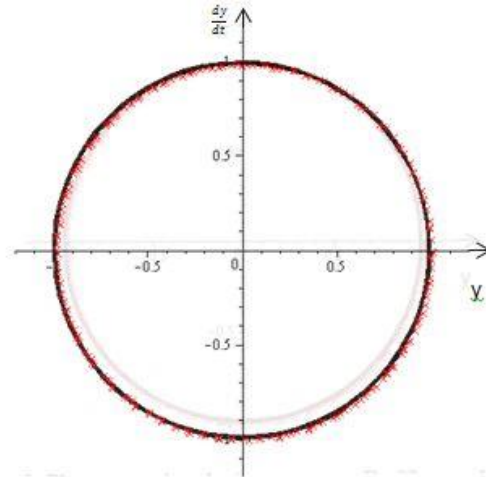
$$y = (-4,99 \cdot 10^{-4}t + 1) \cos(0,999)$$

$$\dot{y} = -(-4,99 \cdot 10^{-4}t + 1) \sin(0,999)$$

Gambar 12 berikut ini menunjukkan perbandingan plot solusi dan phaseportrait dari persamaan di atas menggunakan metode *Averaging* dengan metode *Runge Kutta* orde empat.



**Gambar 12.** Plot solusi persamaan Duffing pada aplikasi *weak signal detection* dengan  $F=0$ ,  $\mu=0,01$  dan  $\epsilon=0,01$  menggunakan metode *averaging* dan metode *Runge Kutta* orde empat



**Gambar 13.** Phaseportrait solusi persamaan Duffing pada aplikasi *weak signal detection* dengan  $F=0$ ,  $\mu=0,01$  dan  $\epsilon=0,01$  menggunakan metode *averaging* dan metode *Runge Kutta* orde 4

Untuk kasus  $F=0$  dan  $\mu=0,01$  maka persamaan (5) menjadi

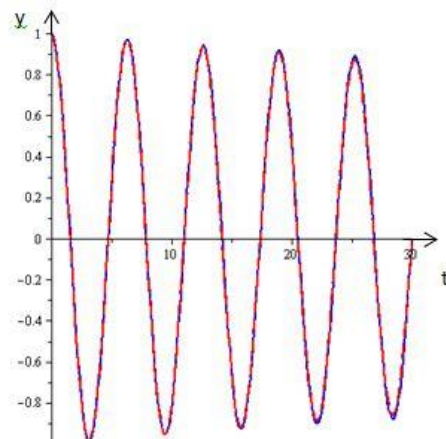
$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \epsilon \left( 0,1 \frac{dy}{dt} - 0,01y^3 + 0,1 \cos(t) + 0,01 \cos(t) \right) \quad (9)$$

Solusi dari persamaan (9) dengan  $\epsilon=0,1$  dan kondisi awal  $y(0)=0, \frac{dy}{dt}(0)=1$  yaitu

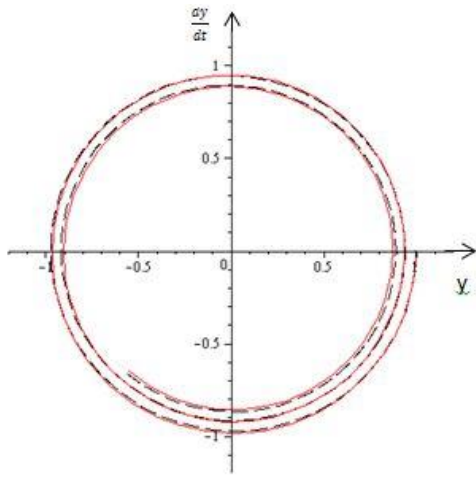
$$y = (-0,005t + 1) \cos(0,995)$$

$$\dot{y} = -(-0,005t + 1) \sin(0,995)$$

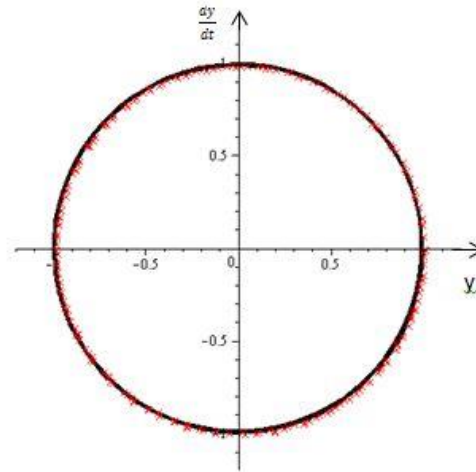
Gambar 14 berikut ini menunjukkan perbandingan plot solusi dan *phaseportrait* dari persamaan di atas menggunakan metode *Averaging* dengan metode *Runge Kutta* orde empat.



**Gambar 14.** Plot solusi persamaan Duffing pada aplikasi *weak signal detection* dengan  $F=0,1$ ,  $\mu=0,01$  dan  $\epsilon=0,1$  menggunakan metode *averaging* dan metode *Runge Kutta* orde empat



**Gambar 15.** Phaseportrait solusi persamaan Duffing pada aplikasi *weak signal detection* dengan  $F=0,1$ ,  $\mu=0,01$  dan  $\varepsilon=0,1$  menggunakan metode *averaging* dan metode *Runge Kutta* orde 4



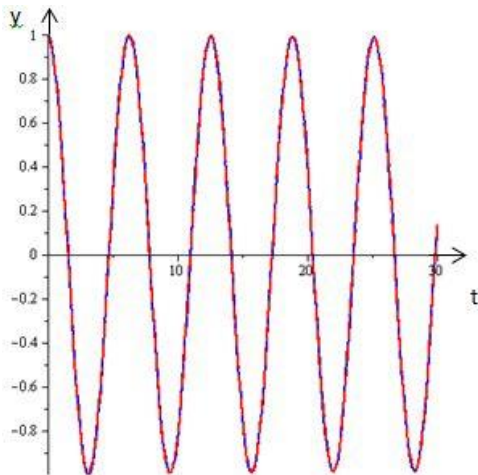
**Gambar 17.** Phaseportrait solusi persamaan Duffing pada aplikasi *weak signal detection* dengan  $F=0,1$ ,  $\mu=0,01$  dan  $\varepsilon=0,01$  menggunakan metode *averaging* dan metode *Runge Kutta* orde empat

Solusi persamaan (9) dengan  $\varepsilon=0,01$  dan kondisi awal  $y(0)=0, \frac{dy}{dt}(0)=1$  yaitu

$$y = (-4,99 \cdot 10^{-4}t + 1) \cos(0,999)$$

$$\dot{y} = -(-4,99 \cdot 10^{-4}t + 1) \sin(0,999)$$

Gambar 16 berikut ini menunjukkan perbandingan plot solusi dan *phaseportrait* dari persamaan di atas menggunakan metode *Averaging* dengan metode *Runge Kutta* orde empat.



**Gambar 16.** Plot solusi persamaan Duffing pada aplikasi *weak signal detection* dengan  $F=0,1$ ,  $\mu=0,01$  dan  $\varepsilon=0,01$  menggunakan metode *averaging* dan metode *Runge Kutta* orde empat

### SIMPULAN

Persamaan Duffing pada aplikasi *weak signal detection* adalah sebagai berikut

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \varepsilon \left( -\beta \frac{dy}{dt} - \alpha y^3 + F \cos \omega t + \mu \cos(\omega t) \right)$$

Untuk kasus  $F=0,1$  dan  $\mu=0$  dengan nilai epsilon  $\varepsilon=0,1$  dan  $\varepsilon=0,01$  diperoleh solusi aproksimasi dari metode *averaging* kemudian divisualisasikan menggunakan Maple dan dibandingkan dengan menggunakan metode *Runge Kutta* orde empat yang hasilnya sesuai. Sedangkan untuk kasus  $F=0$  dan  $\mu=1$  dengan nilai epsilon  $\varepsilon=0,1$ , dan  $\varepsilon=0,01$  diperoleh solusi aproksimasi dari metode *averaging* kemudian divisualisasikan menggunakan Maple dan dibandingkan dengan menggunakan metode *Runge Kutta* orde empat yang hasilnya kurang sesuai dikarenakan nilai  $\mu$  yang besar. Untuk kasus selanjutnya  $F=0$  dan  $\mu=0,01$  dengan nilai epsilon  $\varepsilon=0,1$ , dan  $\varepsilon=0,01$  diperoleh solusi aproksimasi dari metode *averaging* kemudian divisualisasikan menggunakan Maple dan dibandingkan dengan menggunakan metode *Runge Kutta* orde empat dan hasilnya sesuai. Untuk kasus yang terakhir yaitu  $F=0,1$  dan  $\mu=0,01$  dengan nilai epsilon  $\varepsilon=0,1$ , dan  $\varepsilon=0,01$  diperoleh solusi aproksimasi dari metode *averaging* kemudian divisualisasikan menggunakan Maple dan

dibandingkan dengan metode *Runge Kutta* orde empat dengan hasil yang sesuai.

#### DAFTAR PUSTAKA

- Chunyan N., & Zhuwen W. 2011. Application of Chaos in Weak Signal Detection. Third International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation.
- Jalilvand A. & Fotoohabadi H. 2011. The Application of Duffing Oscillator in Weak Signal Detection. Ecti Transactions on Electrical Eng., Electronics, and Communications. (9):1.
- Kovacic I., & Brennan MJ. 2001. The Duffing Equation. United Kingdom: Wiley.
- Li-xin MA. 2008. Weak Signal Detection Based on Duffing Oscillator. International Conference on Information Management, Innovation Management and Industrial Engineering.
- Liu-Xuanchao, & Liu-Xiaolong. 2011. Weak Signal Detection Research Based on Duffing Oscillator used for Downhole Communication. Journal of Computers. 6(2).
- Wang Jian-xiong & Hou Chulin. 2010. A Method of Weak Signal Detection Based on Duffing Oscillator. International Conference on e-Education, e-Bussiness, e-Management and e-Learning.
- Wang F., Xing H., Duan S., & Yu H.. 2012. Study on Chaos-Based Weak Signal Detection Method with Duffing Oscillator. *Advances in Computer Science and Information Engineering*, 2(169):21-26.