

Ketakteraturan Sisi Total Pada Graf Pohon Palem $C_r - B_{r,r}$ dan Graf Pohon Palem $C_{r+1} - B_{r,r}$

Muhammad Syihabuddin* dan Isnaini Rosyida

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 Lt. 1, Kampus Sekaran Gunungpati, Semarang 50229
E-mail: muhammadsyihabuddin06@gmail.com

Diterima 6 Juni 2022

Disetujui 2 September 2022

Dipublikasikan 24 Oktober 2022

Abstrak

Diketahui graf G dengan himpunan titik tak kosong $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Pelabelan f adalah suatu fungsi dari $V(G)$ gabungan $E(G)$ ke suatu himpunan bilangan bulat positif k dikatakan pelabelan- k total tak teratur sisi di G , jika setiap dua sisi berbeda x_1x_2 dan y_1y_2 di E memenuhi bobot sisi yang berbeda bobot e_1 tidak sama dengan bobot e_2 . Bobot sisi uv pada pelabelan total f adalah jumlah dari label sisi uv , label titik u dan label titik v . Nilai total ketakteraturan sisi dari graf G yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur sisi, yang dinotasikan dengan $tes(G)$. Pada artikel ini, dilakukan penyelidikan nilai ketakteraturan sisi total (tes) pada Graf Pohon Palem $C_r - B_{r,r}$ dan Graf Pohon Palem $C_{r+1} - B_{r,r}$. Hasil dari penelitian ini adalah nilai ketakteraturan sisi total dari Graf Pohon Palem $C_r - B_{r,r}$ adalah pembulatan ke atas dari $((3r + 2)/3)$ dan nilai ketakteraturan sisi total dari Graf Pohon Palem $C_{r+1} - B_{r,r}$ adalah pembulatan ke atas dari $((3r + 3)/3)$.

Kata kunci: Pelabelan total tidak beraturan, pelabelan grafik, kekuatan ketidakteraturan, kekuatan ketidakteraturan sisi total, grafik pohon palem

Abstract

Given graph G with a non-empty set of vertices $V(G)$ and an edge set $E(G)$. A total labelling f is a function from $V(G)$ union $E(G)$ to a set of k positive integer is called an edge irregular total labelling in G , if every two different edges e_1 and e_2 on E have different weights, the weight (wt) of e_1 is not equal to the weight (wt) of e_2 . Weight of uv in total labelling f is equal to the sum of edge label uv , vertex label u and vertex label v . Total edge strength irregularity of graph G is the biggest minimum label used for labelling graph G with total edge irregularity labelling, denoted by $tes(G)$. In this paper, author investigate total edge irregularity strength (tes) in Palm Tree Graph $C_r - B_{r,r}$ and Palm Tree Graph $C_{r+1} - B_{r,r}$. The results of this research are total edge irregularity strength of palm tree graph $C_r - B_{r,r}$ is ceil of $((3r + 2)/3)$ and total edge irregularity strength of palm tree graph $C_{r+1} - B_{r,r}$ is ceil of $((3r + 3)/3)$.

Keywords: Irregular total labeling, graph labeling, irregularity strength, total edge irregularity strength, palm tree graphs

How to cite:

Syihabuddin, M., Rosyida, I. (2022). Ketakteraturan sisi total pada graf pohon palem $C_r - B_{r,r}$ dan graf pohon palem $C_{r+1} - B_{r,r}$. *Indonesian Journal of Mathematics and Natural Science*, 45(2), 59-68.

PENDAHULUAN

Banyaknya permasalahan dalam kehidupan sehari-hari mendorong manusia untuk mencari solusi yang secara tidak langsung permasalahan tersebut mendorong berkembangnya ilmu pengetahuan dan teknologi. Matematika merupakan salah satu yang banyak memberikan alternatif dalam menyelesaikan permasalahan di segala bidang. Salah satu cabang matematika yang dapat menyelesaikan suatu permasalahan adalah teori graf (Clipperton, 2005). Teori graf banyak berperan dalam pengembangan matematika, baik dari sisi teori maupun terapannya. Graf G didefinisikan

sebagai pasangan himpunan $V(G)$ dan $E(G)$ di mana $V(G)$ menyatakan himpunan simpul dan $E(G)$ menyatakan himpunan sisi, teori graf memiliki banyak topic untuk dikaji sehingga sampai ini banyak sekali peneliti yang mengkaji bidang-bidang dalam teori graf.

Beberapa penelitian menunjukkan bahwa pelabelan dapat dilakukan dengan cara mengaitkan jumlah label dengan elemen-elemen graf yaitu titik dan sisi. Jumlah label ini dikenal sebagai bobot (*weight*) dari elemen graf yang dinotasikan dengan w . Baca (2007) mengenalkan beberapa jenis pelabelan yaitu pelabelan- k total tak teratur sisi (*edge irregular total k-labeling*) dan pelabelan- k total tak teratur titik (*vertex irregular total k-labeling*) yang dalam prosesnya juga menghasilkan definisi baru yaitu nilai ketakteraturan sisi total (*total edge irregularity strength*). Misalkan $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,3 \dots k\}$ merupakan pelabelan- k total, maka bobot sisi xy dari elemen-elemen graf $G (V(G), E(G))$ didefinisikan sebagai $w(xy) = f(x) + f(y)$. Pada penelitian terbarunya, Baca (2014) memperkenalkan pelabelan- k total tak teratur sisi (*edge irregular total k-labeling*) dan definisi nilai ketakteraturan sisi total (*total edge irregularity strength*). Suatu pelabelan- k total $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,3 \dots k\}$ disebut pelabelan- k tak teratur sisi total (*edge irregular total k-labeling*) jika untuk setiap dua sisi berbeda e_1 dan e_2 berlaku $w(e_1) \neq w(e_2)$. Nilai k terkecil disebut kekuatan tak teratur sisi total (*total edge irregularity strength*).

Teorema 1

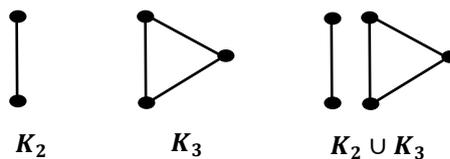
Jika $G(V(G), E(G))$ adalah suatu graf dengan himpunan titik tak kosong $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$, maka

$$\lceil \frac{|E|+2}{3} \rceil \leq \text{tes}(G) \leq |E| \dots \dots \dots (1)$$

(Baca, 2007).

Setelah itu banyak peneliti yang mengkaji tentang nilai ketakteraturan sisi total dari beberapa graf. Seperti kajian tentang graf pohon (Ivančo & Jendrol, 2006), graf *caterpillar* (Imran *et al*, 2017), graf rantai kaktus dengan titik *pendant* (Rosyida & Indriati, 2019) dan banyak lagi penelitian tentang kekuatan tak teratur sisi. Pada tulisan ini akan dibahas tentang nilai ketakteraturan sisi total dari graf Pohon Palem $C_r - B_{r,r}$ dan nilai ketakteraturan sisi total dari graf Pohon Palem $C_{r+1} - B_{r,r}$.

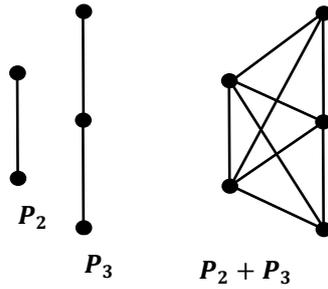
Gabungan dari dua graf sederhana $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ adalah graf sederhana dengan himpunan titik $V_1 \cup V_2$ dan himpunan sisi $E_1 \cup E_2$. Gabungan dari G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$ (Rosen, 2013). Berikut akan diberikan gabungan graf lengkap K_2 dan K_3 . Graf gabungan graf lengkap K_2 dan K_3 disajikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf gabungan

Definisi 2. Join dari dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan dengan G_1+G_2 , adalah graf yang terbentuk dari $V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{\{u, v\} | u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ (Chartrand & Oellermann, 1993).

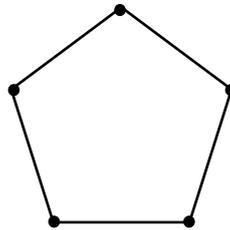
Definisi 3. Graf $P_2 + P_3$ ditunjukkan oleh Gambar 2 setiap titik dari masing-masing graf saling dihubungkan oleh sebuah sisi baru sehingga kedua graf terhubung



Gambar 2. Join pada graf

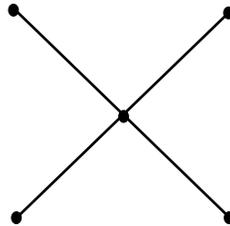
Definisi 4. Graf lintasan adalah graf sederhana yang berupa lintasan tunggal. Graf path dengan n titik dinotasikan dengan P_n . Graf P_n memiliki $n - 1$ sisi (Budayasa, 2007).

Definisi 5. Graf *cycle*, C_n , dengan panjang n adalah graf dengan n titik v_1, v_2, \dots, v_n dan sisi $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$ (Ringel & Hartsfield, 1994). Contoh graf *cycle* disajikan pada Gambar 3.



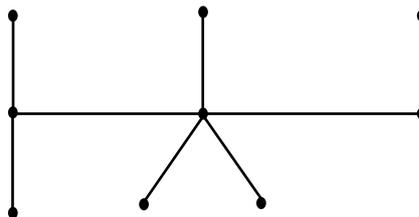
Gambar 3. Graf *cycle* C_5

Definisi 6. Graf bintang, S_n , adalah graf yang dibangun dari satu titik pusat dengan menambahkan sejumlah n pendants pada titik pusat tersebut. Graf bintang memiliki $n + 1$ titik dan n sisi (Choudum *et al.*, 1996). Contoh graf bintang disajikan pada Gambar 4.



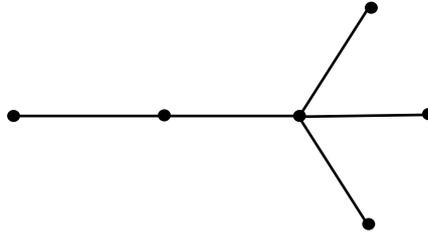
Gambar 4. Graf bintang S_4

Definisi 7. Graf caterpillar S_{n_1, n_2, \dots, n_r} adalah graf yang dibangun dari suatu lintasan disebut tulang belakang (*backbone*) P_n dengan menambahkan sejumlah daun (*pendant*) pada setiap titik pada lintasan, yaitu n_i pendants pada titik c_i dimana $n_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, r$ (Sevenhot & Denny, 2010). Pada Gambar 5 diberikan contoh graf *caterpillar* untuk P_3 .



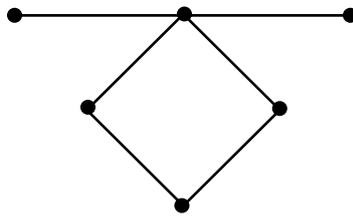
Gambar 5. Graf *caterpillar* $S_{(2,3,1)}$

Definisi 8. Graf sapu $B_{n,n}$ adalah kasus khusus dari graf *caterpillar* dimana sejumlah n titik pendent hanya dihubungkan pada satu titik ujung dari tulang belakang P_m (Sevenhot & Denny, 2010). Contoh graf sapu disajikan pada Gambar 6.



Gambar 6. Graf sapu $B_{3,3}$

Definisi 9. Graf *unicycle* adalah graf yang tepat memuat satu lingkaran (Gallian, 2009). Contoh graf *unicycle* disajikan pada Gambar 7.

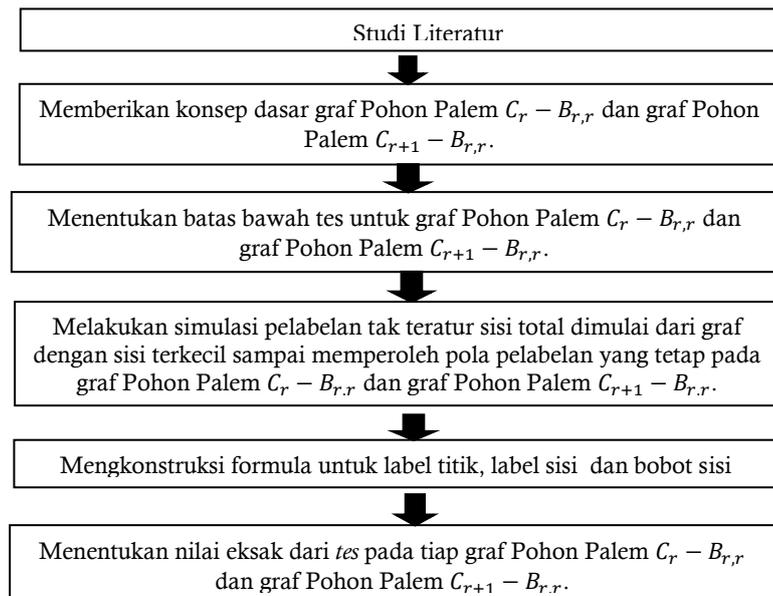


Gambar 7. Graf *unicycle* yang mengandung graf lingkaran C_3

Pada penelitian ini, diselidiki nilai ketakteraturan sisi total (*tes*) pada graf Pohon Palem $C_r - B_{r,r}$ dan graf Pohon Palem $C_{r+1} - B_{r,r}$.

METODE

Pada tahap awal, dilakukan pencarian informasi dan menelaah beberapa sumber pustaka yang relevan, baik berupa buku, jurnal ilmiah, *ebook*, dsb. Dari kajian tersebut, ditemukan permasalahan umum yaitu pelabelan pada graf. Permasalahan ini masih terlalu luas, sehingga diperlukan rumusan masalah yang lebih spesifik. Setelah mengkaji beberapa sumber pustaka, selanjutnya dilakukan langkah-langkah pemecahan masalah seperti pada Gambar 8.

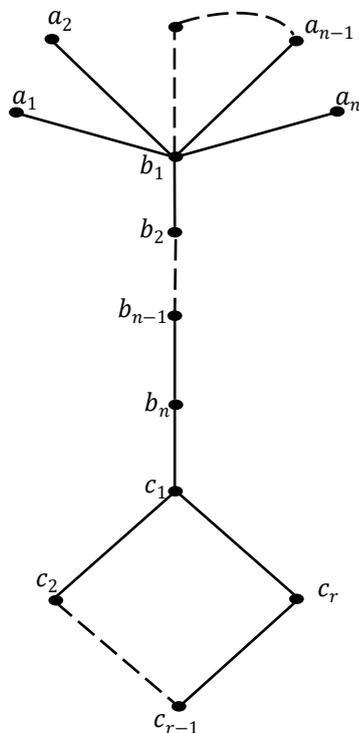


Gambar 8. Diagram metode penelitian

HASIL DAN PEMBAHASAN

Graf Pohon Palem $C_r - B_{r,r}$

Definisi 10. Graf pohon palem $C_r - B_{r,r}$ adalah gabungan graf sapu dan graf lingkaran dengan penambahan satu sisi yang menghubungkan titik ujung graf sapu $B_{r,r}$ dengan salah satu titik pada graf cycle C_r . Contoh Graf Pohon Palem disajikan pada Gambar 9.



Gambar 9. Graf pohon palem $C_r - B_{r,r}$

Teorema 11.

Misalkan $C_r - B_{r,r}$, $r > 2$ adalah graf pohon palem dari gabungan graf sapu $B_{r,r}$ dan graf cycle C_r , maka $tes(C_r - B_{r,r}) = \left\lfloor \frac{3r+2}{3} \right\rfloor$.

Pada graf pohon palem $C_r - B_{r,r}$, ditunjukkan bahwa jumlah sisi pada graf bintang adalah r , jumlah sisi pada graf lintasan adalah r dan jumlah sisi pada graf cycle adalah r . Sehingga diperoleh jumlah sisi pada graf $C_r - B_{r,r}$ adalah $3r$.

Bukti. Berdasarkan Baca, diperoleh batas bawah $tes(C_r - B_{r,r}) \geq \left\lfloor \frac{|E(C_r - B_{r,r})| + 2}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3r+2}{3} \right\rfloor$ untuk $r > 2$. Diberikan a_i ($i = 1, 2, \dots, r$) titik *pendant* pada graf bintang di graf Sapu $B_{r,r}$, b_i ($i = 1, 2, \dots, r$) titik pada graf lintasan di graf Sapu $B_{r,r}$ dengan b_1 merupakan titik ujung lintasan graf sapu $B_{r,r}$ yang juga merupakan titik pusat graf bintang dan c_i ($i = 1, 2, \dots, r$) titik pada graf cycle C_r dengan c_1 merupakan titik pada graf cycle C_r yang bertetangga dengan graf sapu $B_{r,r}$.

Perumuman formula label titik dan label sisi pada graf pohon palem $C_r - B_{r,r}$ menghasilkan pola yang sama pada semua graf. Jadi, sisi pada graf bintang, graf lintasan, dan graf cycle memiliki pola pelabelan. Pelabelan titik pada graf bintang dimulai dari titik a_1, a_2, \dots, a_r , pelabelan titik pada graf lintasan dimulai dari titik b_1, b_2, \dots, b_r dan pelabelan titik pada graf cycle dimulai dari titik c_1, c_2, \dots, c_r . Sedangkan pelabelan sisi pada graf bintang dimulai dari sisi $a_1 b_1, a_2 b_1, \dots, a_r b_1$, pelabelan sisi pada graf lintasan dimulai dari sisi $b_1 b_2, b_2 b_3, \dots, b_{r-1} b_r$ dan pelabelan sisi pada graf cycle dimulai dari titik $c_1 c_2, c_2 c_3, \dots, c_r c_1$.

Diperoleh batas atas $tes(C_r - B_{r,r}) \leq \left\lceil \frac{|E(C_r - B_{r,r})| + 2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{3r+2}{3} \right\rceil$ dengan mengkonstruksi pelabelan- k total tak teratur sisi $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ dengan $k = \left\lceil \frac{3r+2}{3} \right\rceil$ sebagai berikut:

$$f(a_i) = i, \forall i = 1, 2, \dots, r$$

$$f(b_i) = i, \forall i = 1, 2, \dots, r$$

$$f(c_i) = \left\lceil \frac{3r+2}{3} \right\rceil, \forall i = 1, 2, \dots, r$$

$$(a_i b_1) = 1, \forall i = 1, 2, \dots, r$$

$$f(b_i b_{i+1}) = \left\lceil \frac{3r+2}{3} \right\rceil - i, \forall i = 1, 2, \dots, r-1$$

$$f(b_r c_1) = 1$$

$$f(c_i c_{i+1}) = i, \forall i = 1, 2, \dots, r-1$$

$$f(c_r c_1) = r$$

Karena label titik dan sisi yang diperoleh kurang dari sama dengan $k = \left\lceil \frac{3r+2}{3} \right\rceil$, maka pelabelan f pelabelan- k total.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa setiap sisi pada graf $(C_r - B_{r,r})$ mempunyai bobot yang berbeda dengan formula bobot dari sisi uv yaitu $(uv) = f(u) + f(uv) + f(v)$

$$w(a_i b_1) = f(a_i) + f(a_i b_1) + f(b_1)$$

$$= i + 1 + 1$$

$$= 2 + i$$

$$w(b_i b_{i+1}) = f(b_i) + f(b_i b_{i+1}) + f(b_{i+1})$$

$$= i + (r - i + 1) + (i + 1)$$

$$= r + 2 + i$$

$$w(b_r c_1) = f(b_r) + f(b_r c_1) + f(c_1)$$

$$= r + 1 + r + 1$$

$$= 2r + 2$$

$$w(c_i c_{i+1}) = f(c_i) + f(c_i c_{i+1}) + f(c_{i+1})$$

$$= (r + 1) + i + (r + 1)$$

$$= 2r + 2 + i$$

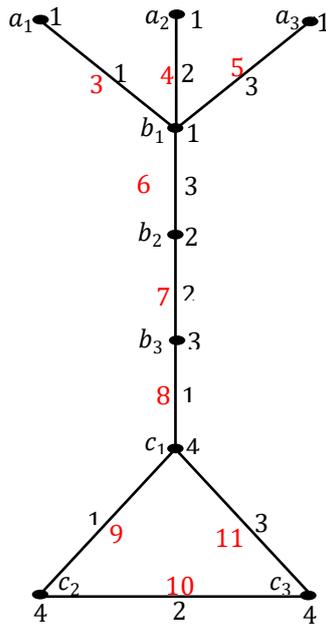
$$w(c_r c_1) = f(c_r) + f(c_r c_1) + f(c_1)$$

$$= (r + 1) + r + (r + 1)$$

$$= 3r + 2$$

Oleh karena f merupakan pelabelan- k total dan untuk setiap dua sisi berbeda, bobot sisinya juga berbeda, artinya f merupakan pelabelan- k total tak teratur sisi, dengan label terbesarnya adalah $k = \left\lceil \frac{3r+2}{3} \right\rceil$. Jadi, terbukti bahwa untuk $r > 2$, $tes(C_r - B_{r,r}) = \left\lceil \frac{3r+2}{3} \right\rceil$.

Pelabelan-4 total tak teratur sisi pada graf Pohon Palem $C_3 - B_{3,3}$ disajikan pada Gambar 10.



Gambar 10. Pelabelan graf pohon palem $C_3 - B_{3,3}$

Keterangan warna label:

- = bobot sisi
- = label titik dan label sisi

Graf Pohon Palem $C_{r+1} - B_{r,r}$

Definisi 12. Graf pohon palem $C_{r+1} - B_{r,r}$ adalah gabungan graf sapu dan graf lingkaran dengan penambahan satu sisi yang menghubungkan titik ujung graf sapu $B_{r,r}$ dengan salah satu titik pada graf cycle C_{r+1} . Contoh Graf Pohon Palem $C_{r+1} - B_{r,r}$ disajikan pada Gambar 11.

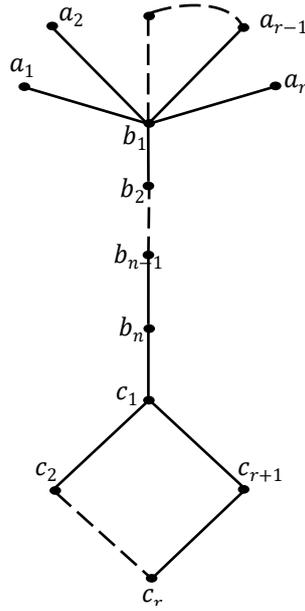
Teorema 13

Misalkan $C_{r+1} - B_{r,r}, r > 2$ adalah graf pohon palem dari gabungan graf sapu $B_{r,r}$ dan graf cycle C_{r+1} , maka $tes(C_{r+1} - B_{r,r}) = \left\lceil \frac{3r+3}{3} \right\rceil$.

Pada graf pohon palem $C_{r+1} - B_{r,r}$, ditunjukkan bahwa jumlah sisi pada graf bintang adalah r , jumlah sisi pada graf lintasan adalah r dan jumlah sisi pada graf cycle adalah $r + 1$. Sehingga diperoleh jumlah sisi pada graf $C_{r+1} - B_{r,r}$ adalah $3r+1$.

Bukti. Berdasarkan Baca (2007), diperoleh batas bawah $tes(C_{r+1} - B_{r,r}) \geq \left\lceil \frac{|E(C_{r+1} - B_{r,r})| + 2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{3r+2}{3} \right\rceil$ untuk $r > 2$. Diberikan $a_i (i = 1, 2, \dots, r)$ titik *pendant* pada graf bintang di graf Sapu $B_{r,r}$, $b_i (i = 1, 2, \dots, r)$ titik pada graf lintasan di graf Sapu $B_{r,r}$ dengan b_1 merupakan titik ujung lintasan graf sapu $B_{r,r}$ yang juga merupakan titik pusat graf bintang dan $c_i (i = 1, 2, \dots, r)$ titik pada graf cycle C_{r+1} dengan c_1 merupakan titik pada graf cycle C_{r+1} yang bertetangga dengan graf sapu $B_{r,r}$.

Perumuman formula label titik dan label sisi pada graf pohon palem $C_{r+1} - B_{r,r}$ menghasilkan pola yang sama pada semua graf. Jadi, sisi pada graf bintang, graf lintasan, dan graf cycle memiliki pola pelabelan. Pelabelan titik pada graf bintang dimulai dari titik a_1, a_2, \dots, a_r , pelabelan titik pada graf lintasan dimulai dari titik b_1, b_2, \dots, b_r dan pelabelan titik pada graf cycle dimulai dari titik c_1, c_2, \dots, c_{r+1} . Sementara pelabelan sisi pada graf bintang dimulai dari sisi $a_1 b_1, a_2 b_1, \dots, a_r b_1$, pelabelan sisi pada graf lintasan dimulai dari sisi $b_1 b_2, b_2 b_3, \dots, b_{r-1} b_r$ dan pelabelan sisi pada graf cycle dimulai dari titik $c_1 c_2, c_2 c_3, \dots, c_{r+1} c_1$.



Gambar 11. Graf pohon palem $C_{r+1} - B_{r,r}$

Diperoleh batas atas $tes(C_{r+1} - B_{r,r}) \leq \left\lfloor \frac{|E(C_{r+1} - B_{r,r})| + 2}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3r+3}{3} \right\rfloor$ dengan mengkonstruksi pelabelan- k total tak teratur sisi $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ dengan $k = \left\lfloor \frac{3r+3}{3} \right\rfloor$ sebagai berikut:

$$f(a_i) = i, \forall i = 1, 2, \dots, r$$

$$f(b_i) = i, \forall i = 1, 2, \dots, r$$

$$f(c_i) = \left\lfloor \frac{3r+3}{3} \right\rfloor, \forall i = 1, 2, \dots, r$$

$$(a_i b_1) = 1, \forall i = 1, 2, \dots, r$$

$$f(b_i b_{i+1}) = \left\lfloor \frac{3r+3}{3} \right\rfloor - i, \forall i = 1, 2, \dots, r-1$$

$$f(b_r c_1) = 1$$

$$f(c_i c_{i+1}) = i, \forall i = 1, 2, \dots, r-1$$

$$f(c_r c_1) = r$$

Karena label titik dan sisi yang diperoleh kurang dari sama dengan $k = \left\lfloor \frac{3r+3}{3} \right\rfloor$, maka pelabelan f pelabelan- k total. Kemudian akan ditunjukkan bahwa setiap sisi pada graf $(C_{r+1} - B_{r,r})$ mempunyai bobot yang berbeda dengan formula bobot dari sisi uv yaitu $w(uv) = f(u) + f(v) + f(uv)$

$$\begin{aligned} w(a_i b_1) &= f(a_i) + f(a_i b_1) + f(b_1) \\ &= i + 1 + 1 \\ &= 2 + i \end{aligned}$$

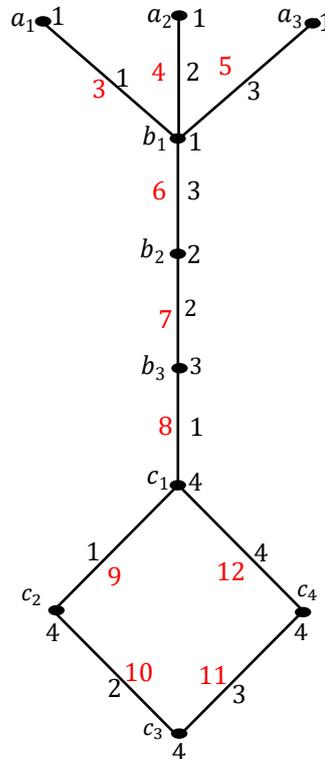
$$\begin{aligned} w(b_i b_{i+1}) &= f(b_i) + f(b_i b_{i+1}) + f(b_{i+1}) \\ &= i + (r - i + 1) + (i + 1) \\ &= r + 2 + i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(b_r c_1) &= f(b_r) + f(b_r c_1) + f(c_1) \\ &= r + 1 + r + 1 \\ &= 2r + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(c_i c_{i+1}) &= f(c_i) + f(c_i c_{i+1}) + f(c_{i+1}) \\ &= (r + 1) + i + (r + 1) \\ &= 2r + 2 + i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(c_{r+1} c_1) &= f(c_{r+1}) + f(c_{r+1} c_1) + f(c_1) \\ &= (r + 1) + (r + 1) + (r + 1) \\ &= 3r + 3 \end{aligned}$$

Oleh karena f merupakan pelabelan- k total dan untuk setiap dua sisi berbeda, bobot sisinya juga berbeda, artinya f merupakan pelabelan- k total tak teratur sisi, dengan label terbesarnya adalah $k = \left\lceil \frac{3r+3}{3} \right\rceil$. Jadi, terbukti bahwa untuk $r > 2$, $tes(C_{r+1} - B_{r,r}) = \left\lceil \frac{3r+3}{3} \right\rceil$. Pelabelan-4 total tak teratur sisi pada Graf Pohon Palem $C_4 - B_{3,3}$ disajikan pada Gambar 12.



Gambar 12. Pelabelan graf pohon palem $C_4 - B_{3,3}$

Keterangan warna label:

- = bobot sisi
- = label titik dan label sisi

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan maka dapat disimpulkan nilai ketakteraturan sisi total dari graf Pohon Palem $C_r - B_{r,r}$ adalah $tes(C_r - B_{r,r}) = \left\lceil \frac{3r+2}{3} \right\rceil$ untuk $r \geq 3$ dan nilai ketakteraturan sisi total dari graf Pohon Palem $C_{r+1} - B_{r,r}$ adalah $tes(C_{r+1} - B_{r,r}) = \left\lceil \frac{3r+3}{3} \right\rceil$ untuk $r \geq 3$.

DAFTAR PUSTAKA

- Baca M., Jendrol S., Miller M., and Ryan J. (2007). On irregular total labeling. *Discrete Mathematics*, 307, 1378-1388. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2005.11.075>
- Budayasa, I. K. 2007. *Teori graph dan aplikasinya*. Surabaya : Unesa University Press.
- Chartrand, G., & Oellermann, O. R. 1993. *Applied and algorithmic graph theory*. Mcgraw-Hill College.
- Choudum, S. A., Pitchai, S., & Kishore, M. 1996. All 5-stars are skolem graceful. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 27, 1101-1106.
- Clipperton, J. 2005. $L(3,2,1)$ Labelling of simple graph. *REU Paper, Valparais Universit*.
- Gallian, J. A. 2009. A dynamic survey of graph labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 16(6), 1-219.
- Imran, M., Aslam, A., Zafar, S., & Nazeer, W. 2017. Further results on edge irregularity strength of graphs. *Indonesian Journal of Combinatorics*, 1(2), 82-91. <http://doi.org/10.19184/ijc.2017.1.2.5>

- Ivančo, J., & Jendrol, S. (2006). Total edge irregularity strength of trees. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 26(3), 449-456. <http://doi.org/10.7151/dmgt.1337>
- Ringel, G., & Hartsfield, N. (1994). *Pearls in Graph Theory*. Cambridge, Massachusetts, United States : Academic Press, Inc.
- Rosen, K.H. (2013). *Discrete Mathematics and Its Applications Seventh Edition*. New York: McGraw-Hill.
- Rosyida, I., & Indriati, D. 2019. On total edge irregularity strength of some cactus chain graphs with pendant vertices. *Journal of Physics: Conference Series*, 1211(1), 012016. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1211/1/012016>
- Sevenhot, S. K., & Denny, R. S. 2010. Pelabelan skolem graceful dan pelabelan pada gabungan dua graf. *Prosiding Seminar Nasional UNPAR*, Bandung.