Jurnal MIPA 38 (1) (2015): 68-78

Jurnal MIPA

http://journal.unnes.ac.id/nju/index.php/JM

APROKSIMASI ANUITAS HIDUP MENGGUNAKAN KOMBINASI EKSPONENSIAL

LJ Sinay [1]✉ S Guritno[2], Gunardi[3]

[1]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura Ambon
[2,3]Jurusan Matematika FMIPA UGM Yogyakarta

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Februari 2015
Disetujui Maret 2015
Dipublikasikan April 2015

Keywords:
Life annuity, the distribution of later life time, distracted Jacobi polynomial, exponential combination, Makeham law

Abstrak

Anuitas hidup adalah suatu rangkaian pembayaran yang dibuat secara kontinu atau dalam interval waktu tertentu (seperti bulanan, kwarter, semester, tahunan, dan lain-lain) yang dipengaruhi oleh faktor kelangsungan hidup seseorang. Penelitian ini bertujuan untuk mengaproksimasi nilai-nilai anuitas hidup. Nilai-nilai tersebut diperoleh dari hasil aproksimasi distribusi waktu hidup yang akan datang (*future lifetime*). Aproksimasi distribusi waktu hidup yang akan datang tersebut didasarkan atas polinomial Jacobi teralihkan, dimana aproksimasi tersebut menghasilkan suatu bentuk kombinasi eksponensial. Selanjutnya, bentuk tersebut digunakan untuk mengaproksimasi distribusi dari anuitas hidup. Dalam studi kasus, hasil numerik yang diperoleh dalam penelitian ini merupakan hasil aproksimasi distribusi waktu hidup yang akan datang dengan menggunakan hukum Makeham, kemudian hasil tersebut digunakan untuk menentukan nilai-nilai anuitas hidup. Hasil-hasil yang diperoleh dalam studi kasus tersebut sangat akurat.

Abstract

Life annuity is a series of payments made continuously or in certain time intervals (such as monthly, quaternary, semester, annual, etc.). it is influenced by a person's survival. This study aims to aproximate life annuity values. Those values are obtained from the approximation of the later life time distribution (future lifetime). Approximation distribution of later life time is based on polynomial Jacobi sidetracked, where approximation produces a combination of exponential form. Furthermore, the form used to aproximate the distribution of life annuity. In the case study, the numerical results obtained in this study were the result of a life time distribution approximation that would come with using the Makeham law; then the results were used to determine the values of life annuity. The results obtained in the case studies are very accurate.

✉ Alamat korespondensi:
E-mail: [1]lj.sinay@staff.unpatti.ac.id, [2]guritno3@yahoo.com, [3]gunardiugm@yahoo.com

ISSN 0215-9945

PENDAHULUAN

Anuitas secara umum diartikan sebagai suatu rangkaian pembayaran yang dibuat dalam interval-interval waktu tertentu dari suatu masa pembayaran. Anuitas ini disebut sebagai anuitas pasti karena tidak dipengaruhi oleh suatu probabilitas. Anuitas yang dipengaruhi oleh peluang hidup seseorang disebut sebagai anuitas hidup. Dengan demikian, anuitas hidup adalah suatu rangkaian pembayaran yang dibuat secara kontinu atau dalam interval waktu tertentu (seperti bulanan, kwarter, semester, tahunan, dan lain-lain) yang dipengaruhi oleh faktor kelangsungan hidup.

Seperti yang diketahui bahwa penghitungan anuitas hidup sangat bergantung pada peluang hidup seseorang. Diketahui bahwa usia hidup seseorang pada waktu yang akan datang tidak dapat diketahui secara pasti. Untuk itu, perlu adanya suatu distribusi peluang yang disesuaikan dengan usia hidup seseorang, sehingga dapat menghitung peluang hidup orang tersebut. Distribusi yang dimaksud adalah distribusi peluang dari waktu hidup yang akan datang (*future lifetime*) atau sering disebut sebagai distribusi waktu hidup yang akan datang. Dalam statistika ada beberapa distribusi khusus yang dapat digunakan untuk membentuk pelunag hidup seseorang seperti distribusi eksponensial, pareto, dan lain-lain. Pada umumnya distribusi-distribusi tersebut menggunakan bentuk eksponensial.

Dalam matematika dan statistika, bentuk eksponensial sangat penting dalam penerapannya. Bentuk eksponensial banyak digunakan dalam membentuk fungsi-fungsi khusus untuk menentukan suatu distribusi peluang. Penggunaan bentuk eksponensial memberikan suatu kemudahan dalam berbagai penghitungan. Penggunaan bentuk eksponensial sering dikombinasikan dengan beberapa fungsi tertentu untuk pengolahan data dan aproksimasi. Dalam penelitian sebelumnya, Dufresne (2006) menggunakan bentuk kombinasi eksponensial untuk fitting distribusi. Kemudian bentuk kombinasi eksponensial digunakan untuk menentukan anuitas hidup stokastik dan hasil yang diperoleh sangat akurat (Dufresne, 2007). Dalam penelitian, Pentury *et al*. (2011) menggunakan kombinasi eksponensial untuk mengaproksimasi distribusi waktu hidup yang akan datang. Di sisi lain, kombinasi eksponesial digunakan untuk aproksimasi tabel mortalita, dan hasil yang diperoleh sangat akurat (Sinay & Satyahadewi 2014).

Berdasarkan uraian di atas, maka masalah yang diangkat dalam penelitian ini adalah bagaimana hasil aproksimasi anuitas hidup menggunakan kombinasi eksponensial. Dengan demikian penelitian ini bertujuan untuk membentuk aproksimasi distribusi waktu hidup yang akan datang (*future lifetime*) dengan menggunakan kombinasi eksponensial. Kemudian, bentuk tersebut digunakan untuk mengaproksimasi distribusi dari anuitas hidup.

Simbol Pochhammer untuk suatu bilangan a dinotasikan dengan $(a)_n$, didefinisikan seperti berikut,

$$(a)_0 = 1, (a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1), \quad n = 1,2,\ldots$$

.

Dengan demikian, fungsi hipergeometri Gauss yang dinotasikan dengan ${}_2F_1(\cdot,\cdot,\cdot;\cdot)$, dapat didefinisikan seperti berikut,

$${}_2F_1(a,b,c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 (1-zt)^{-a} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}$$

dengan $|z|<1$, $\mathrm{Re}(c)>\mathrm{Re}(b)>0$.

Misal X adalah variabel random kontinu yang mengikuti usia hidup seseorang (dari kelahiran sampai kematian). Untuk usia hidup x, diberikan percepatan mortalitas yang didasarkan atas hukum Makeham seperti berikut

$$\mu(x) = A + Bc^x, \ \ x \in \mathrm{R}_+ .$$

Persamaan ini sering disebut sebagai *hazard rate* atau *failure rate*.

Berdasarkan *hazard rate* atau *failure rate* teresbut, dapat diperoleh fungsi *survival* distribusi Makeham seperti persamaan (1)

$$S(x) = \exp\left\{-\int_0^x \mu(y)\,dy\right\} = \exp\left\{-\int_0^x \left(A+Bc^y\right)dy\right\}$$

$$= \exp\left\{-\left[Ay + B\left(\frac{c^y-1}{\log c}\right)\right]_0^x\right\} = \exp\left\{-Ax - B\left(\frac{c^x-1}{\log c}\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{-Ax - m\left(c^x-1\right)\right\}, \text{ dengan } m = \frac{B}{\log c}. \quad (1)$$

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur (pustaka), yaitu mengumpulkan informasi-informasi berupa teori-teori, kemudian menganalisa teori-teori tersebut dan mengaplikasikannya dalam studi kasus. Studi kasus yang digunakan dalam penelitian ini berupa simulasi dan software yang digunakan adalah *Mathematica*.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Distribusi Waktu Hidup yang Akan Datang

Misal variabel random X memiliki distribusi waktu hidup. Dengan demikian, x adalah usia hidup dari seseorang yang dinotasikan dengan (x). Waktu hidup yang akan datang (*future lifetime*) dari (x) adalah $X-x$ yang dinotasikan dengan $T(x)$ atau T_x, atau untuk lebih simpel cukup ditulis dengan notasi T; merupakan variabel random yang bergantung pada (x). Berikut akan diberikan cdf dari T, yaitu

$$F(t) = \mathsf{P}(T \le t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \ (2)$$

Bentuk cdf dari T yang diberikan pada persamaan (2) merupakan peluang (x) meninggal dalam jangka waktu t tahun. Bentuk ini sering dinotasikan dengan ${}_tq_x$. Dengan demikian, peluang (x) untuk hidup selama t tahun adalah

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = \mathsf{P}(T > t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Karena ${}_tq_x$ adalah suatu cdf untuk variabel random T, maka ${}_tp_x$ merupakan ccdf dari T, yang dapat ditulis sebagai $\bar{F}_T(t)$. Perhatikan bahwa $\bar{F}_T(t)$ merupakan peluang (x) dapat hidup mencapai $x+t$ tahun, sehingga dapat diperoleh hubungan antara fungsi *survival* $S(x)$ dan ccdf $\bar{F}_T(t)$ seperti persamaan (3)

$$\bar{F}_T(t) = \mathsf{P}(T > t) = \mathsf{P}(X - x > t \mid X > x)$$

$$= \mathsf{P}(X > x + t \mid X > x)$$

$$= \frac{S(x+t)}{S(x)}, \text{ untuk setiap } x, t \in \mathbb{R}_+. \ (3)$$

Aproksimasi Distribusi menggunakan Kombinasi Eksponensial

Kombinasi Eksponensial

Berikut ini, akan diberikan bentuk umum dari suatu kombinasi ekponensial dengan mendefinisikan sebuah fungsi yang berbentuk

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \lambda_j e^{-\lambda_j t} \mathbf{1}_{\{t>0\}} \quad (4)$$

di mana $\{a_j\}$, $\{\lambda_j\}$ adalah konstan. Fungsi ini adalah fungsi densitas peluang (pdf) jika

(a) $\sum_{j=1}^{n} a_j = 1$;

(b) $\lambda_j > 0$, untuk setiap *j*;

(c) $f(x) \ge 0$, untuk setiap $x \ge 0$.

Kondisi (a) dan (b) menyatakan bahwa fungsi $f(x)$ terintegral untuk 1 atas $\mathbb{R}_+$, namun tidak untuk kondisi (c). Jika $a_j > 0$ untuk semua *j*, maka persamaan (4) disebut sebuah *mixture of exponentials* atau disebut juga sebagai distribusi hiper-eksponensial.

<u>Teorema 1.</u>

(a) Misal T variabel random non negatif. Maka terdapat suatu barisan variabel random $\{T_n\}$ masing-masing dengan suatu pdf yang diberikan oleh suatu kombinasi eksponensial

dan sedemikian sehingga T_n konvergen dalam distribusi ke T.

(b) Jika distribusi T tidak mempunyai atom, maka

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le t<\infty} \left|F_T(t) - F_{T_n}(t)\right| = 0.$$

Bukti

Tujuan dari pembuktian Teorema 1 bagian (a) adalah menemukan suatu barisan dari kombinasi eksponensial yang konvergen dalam distribusi ke suatu variabel random T, katakan barisan variabel random tersebut adalah T_n. Ambil sebarang $t_0 \in \mathrm{R}_+$, sedemikian sehingga dapat dibuat interval $[0, t_0]$. Misalkan bahwa $\{X_n\}$ adalah suatu barisan variabel random yang independen terhadap T dengan densitasnya merupakan kombinasi eksponensial yang konvergen dalam distribusi ke t_0, $n \to \infty$. Maka, terdapat variabel random $T_n \ge 0$, dengan

$$T_n = T + X_n - t_0.$$

Dengan demikian, untuk $n \to \infty$ mengakibatkan T_n konvergen ke T, sehingga

$$\lim_{n\to\infty} F_{T_n}(t) = F_T(t), \text{ untuk setiap } t \in C(F_T).$$

Secara ekuivalen dapat dikatakan bahwa T_n konvergen dalam distribusi ke T.

Berikut ini, akan diperlihatkan bahwa pdf dari T_n merupakan suatu kombinasi eksponensial. Karena diketahui bahwa densitas dari X_n merupakan kombinasi eksponensial, sehingga bentuk densitas dari X_n dapat diberikan seperti berikut:

$$f_{X_n}(x) = \sum_j a_j^{(n)} \lambda_j^{(n)} e^{-\lambda_j^{(n)} x} \mathbf{1}_{\{x>0\}}.$$

Diketahui bahwa bentuk umum densitas T_n adalah

$$f_{T_n}(t) = \int f_{X_n}(t-u)\, dF_{T-t_0}(u)$$

Dengan demikian, untuk setiap variabel random T_n, bentuk densitasnya dapat diperoleh seperti berikut:

$$\begin{aligned} f_{T_n}(t) &= \int f_{X_n}(t-u)\, dF_{T-t_0}(u) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a_j^{(n)} \lambda_j^{(n)} e^{-\lambda_j^{(n)} t} \int e^{\lambda_j^{(n)} u} \mathbf{1}_{\{u<t\}}\, dF_{T-t_0}(u) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a_j^{(n)} \lambda_j^{(n)} e^{-\lambda_j^{(n)} t} e^{-\lambda_j^{(n)} t_0} \int e^{\lambda_j^{(n)} y} \mathbf{1}_{\{y<t+t_0\}}\, dF_T(y) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a_j^{(n)} \lambda_j^{(n)} e^{-\lambda_j^{(n)} (t+t_0)} \int e^{\lambda_j^{(n)} y} \mathbf{1}_{\{y<t+t_0\}}\, dF_T(y) \end{aligned}$$

Integral dalam ekspresi terakhir dari $f_{T_n}(t)$ di atas memiliki kesamaan nilai untuk semua $t \ge 0$ (tapi tidak untuk $t < 0$). Dengan demikian, bentuk kombinasi eksponensial tetap dipertahankan. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa $f_{T_n}(t)$ adalah suatu kombinasi eksponensial untuk semua $t \ge 0$. Dengan kata lain, densitas dari T_n merupakan suatu bentuk kombinasi eksponensial.

Anggap bahwa $F_T(t)$ kontinu, dan misal $\{T_n\}$ suatu barisan variabel random yang konvergen pada T dalam distribusi. Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, karena $F_T(t)$ kontinu mengakibatkan terdapat titik-titik $t_1 < \cdots < t_m$ yang memenuhi

$$F_T(t_1) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$F_T(t_{j+1}) - F_T(t_j) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\forall j = 1, \ldots, m-1),$$

$$1 - F_T(t_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

maka terdapat n_0 sedemikian sehingga untuk $n \ge n_0$ kita miliki

$$\left|F_{T_n}(t_j) - F_T(t_j)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Akan ditunjukkan untuk setiap $t \in \mathrm{R}$ berarti ada tiga interval, yaitu untuk $n \geq n_0$ dapat diperoleh seperti berikut:

Pertama, jika $t_j \leq t < t_{j+1} \left(\forall j = 1, \ldots, m-1\right)$, maka

$$\left|F_{T_n}(t) - F_T(t)\right| < \left|F_{T_n}(t_{j+1}) - F_T(t)\right| \leq \left|F_{T_n}(t_{j+1}) - F_T(t_{j+1})\right| + \left|F_T(t_{j+1}) - F_T(t_j)\right| < \varepsilon$$

.

Kedua, jika $t < t_1$, maka

$$\left|F_{T_n}(t) - F_T(t)\right| \leq \left|F_{T_n}(t_1) - F_T(t_1)\right| + \left|F_T(t_1)\right| < \varepsilon .$$

Ketiga, jika $t \geq t_m$, maka

$$\left|F_{T_n}(t) - F_T(t)\right| \leq \left|F_{T_n}(t) - F_T(t)\right| + \left|1 - F_T(t_m)\right| < \varepsilon$$

.

Jadi untuk setiap $t \in \mathrm{R}$, dan untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathrm{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$\left|F_{T_n}(t) - F_T(t)\right| < \varepsilon$$

Hal ini ekuivalen dengan

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0 \leq t < \infty} \left|F_T(t) - F_{T_n}(t)\right| = 0 \qquad \square$$

Polinomial Jacobi Teralihkan

Pada umumnya, bentuk polinomial Jacobi dapat didefinisikan seperti berikut

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} {}_2F_1\left(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1; \frac{1-x}{2}\right), \quad n = 0,1,\ldots$$

,

untuk $\alpha, \beta > -1$. Diketahui juga bahwa polinomial Jacobi ortogonal atas interval $[-1, 1]$, untuk fungsi bobot $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$. Kemudian bentuk polinomial Jacobi teralihkan (*shifted Jacobian polynomials*) dapat diturunkan seperti berikut:

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(2x-1) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} {}_2F_1(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1; 1-x) = \sum_{j=0}^{n} \rho_{nj} x^j$$

,

di mana ${}_2F_1$ adalah fungsi hipergeometri Gauss dan

$$\rho_{nj} = \frac{(-1)^n (\beta+1)_n (-n)_j (n+\lambda)_j}{(\beta+1)_j \, n! \, j!} .$$

Dengan demikian, polinomial Jacobi teralihkan ortogonal atas $[0, 1]$, dengan fungsi bobotnya adalah

$$w^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^\alpha x^\beta .$$

Sifat-sifat dari polinomial Jacobi teralihkan dapat diberikan untuk suatu fungsi $\phi(x)$ yang terdefinisi atas $(0, 1)$ (termasuk semua fungsi kontinu dan terbatas) sedemikan sehinga,

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R_n^{(\alpha,\beta)}(x),$$

$$c_n = \frac{1}{h_n} \int_0^1 \phi(x)(1-x)^\alpha x^\beta R_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, dx,$$

$$h_n = \int_0^1 (1-x)^\alpha x^\beta \left[R_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]^2 dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\lambda)n!\Gamma(n+\lambda)}$$

Aproksimasi Distribusi Waktu Hidup Yang Akan Datang

Berdasarkan teori *shifted Jacobi polynomials* yang diberikan pada bagian sebelumnya, maka teori tersebut dapat diterapkan ke dalam suatu distribusi peluang atas R_+ dengan cara seperti berikut ini.

Misal $F(t)$ adalah cdf, dan misal $\bar{F}(t) = 1 - F(t) = \mathrm{P}(T > t)$. $\bar{F}(t)$ merupakan ccdf (komplemen cdf). $\bar{F}(t)$ sering disebut juga sebagai fungsi *survival*. Jika $\bar{F}(0)=1$ dan $\bar{F}(\infty)=1$, untuk $0 \leq t < \infty$. Misal T menyatakan waktu sampai kematian dari usia hidup *x*, maka $\bar{F}(t) = {}_t p_x$.

Diketahui bahwa $r > 0$,

$$g(x) = \bar{F}\left\{-\frac{1}{r}\log(x)\right\}, \; 0 < x \leq 1, \; g(0) = 0.$$

Pemetaan yang terjadi dari bentuk ini merupakan pemetaan $[0, \infty)$ pada $(0, 1]$, yang mana $t = 0$ berkorespondensi dengan $x = 1$, dan $t \to \infty$ berkorespondensi dengan $x \to 0+$. Diketahui juga bahwa $\bar{F}(\infty)=0$, maka dapat diperoleh sedemikian rupa sehingga $g(0)=0$.

Misal parameter-parameter α, β, p dan $\{b_k\}$ diketahui sedemikian sehingga, dengan menerapkan *shifted Jacobi polynomials* dapat diperoleh

$$g(x) = x^p \sum_{k=0}^{\infty} b_k R_k^{(\alpha,\beta)}(x), \quad 0 < x \le 1.$$

Ekuivalen dengan

$$\bar{F}(t) = g\left(e^{-rt}\right) = e^{-prt} \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sum_j \rho_{kj} e^{-jrt} = \sum_j \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \rho_{kj} \right) e^{-(j+p)rt}$$

.

Bentuk di atas memiliki kesamaan dengan bentuk (4), untuk $\lambda_j = (j+p)r$, untuk $j = 0,1,2,\dots$. Jika $p > 0$, suatu kombinasi eksponensial dapat diperoleh dengan cara pemotongan jumlahan dari deret di atas. Berdasarkan bentuk dari deret yang diberikan di atas, maka konstanta $\{b_k\}$ dapat ditemukan seperti berikut:

$$b_k = \frac{1}{h_k} \int_0^1 x^{-p} g(x) R_k^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{\alpha} x^{\beta}\, dx$$

$$= \frac{r}{h_k} \int_0^{\infty} e^{-(\beta-p+1)rt} \left(1-e^{-rt}\right)^{\alpha} R_k^{(\alpha,\beta)}\left(e^{-rt}\right) \bar{F}(t)\, dt \quad (5)$$

Dengan demikian, bentuk (5) merupakan kombinasi dari bentuk

$$\int_0^{\infty} e^{-(\beta-p+j+1)rt} \left(1-e^{-rt}\right)^{\alpha} \bar{F}(t)\, dt, \quad j = 0, 1, \dots, k$$

Jika $\alpha = 0$, maka dapat diperoleh

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \bar{F}(t)\, dt = -\frac{1}{s} \int_0^{\infty} \bar{F}(t)\, d\left(e^{-st}\right) = \frac{1}{s}\left[1 - \mathrm{E} e^{-st}\right], \quad s > 0$$

Hal ini berarti, konstanta $\{b_k\}$ dapat diperoleh dengan menggunakan transformasi Laplace dari distribusi *T*.

Dengan demikian, dapat diberikan Teorema berikut ini yang merupakan konsekuensi langsung dari *shifted Jacobian polynomials*.

<u>Teorema 2.</u>

Misal $\alpha, \beta > -1$, $\bar{F}(t)$ *kontinu atas* $[0,\infty)$ *dan diberikan fungsi beriku ini.*

$$e^{prt} \bar{F}(t)$$

yang memiliki sebuah limit yang berhingga untuk t menuju tak hingga, untuk beberapa $p \in \mathbb{R}$ *(hal ini selalu benar di mana* $p \le 0$ *). Maka*

$$\bar{F}(t) = e^{-prt} \sum_{k=0}^{\infty} b_k R_k^{(\alpha,\beta)}\left(e^{-rt}\right) \quad (6)$$

Untuk setiap $t \in (0,\infty)$ *dan konvergen seragam atas setiap interval* $[a, b]$, *untuk* $0 < a < b < \infty$.

Tidak semua distribusi terkondisi dalam Teorema 2. Hasil dalam teorema berikut tidak membutuhkan asumsi ini.

<u>Teorema 3</u>.

Misal $\alpha, \beta > -1$ *dan untuk beberapa* $p \in \mathbb{R}$ *dan* $r > 0$

$$\int_0^{\infty} e^{-(\beta+1-2p)rt} \left(1-e^{-rt}\right)^{\alpha} \bar{F}(t)^2\, dt < \infty$$

(ini selalu benar jika $p < \frac{\beta+1}{2}$*). Maka*

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{\infty} \left[\bar{F}(t) - e^{-prt} \sum_{k=0}^{N} b_k R_k^{(\alpha,\beta)}\left(e^{-rt}\right) \right]^2 e^{-(\beta+1-2p)rt} \left(1-e^{-rt}\right)^{\alpha} dt = 0$$

Pemotongan jumlahan dari deret yang diperoleh dengan menggunakan metode ini bukanlah fungsi distribusi yang sebenarnya. Ini merupakan suatu aproksimasi dari bentuk ccdf distribusi T. Fungsi yang diperoleh dari metode ini, bisa lebih kecil dari 0 atau lebih besar dari 1, atau fungsi tersebut mungkin saja turun pada beberapa interval.

<u>Distribusi Anuitas Hidup</u>

Misal suatu anuitas yang pembayarannya sebesar 1 yang dilakukan secara kontinu adalah

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = \int_0^n e^{-\delta s}\, ds = \frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}. \quad (7)$$

Di mana $\delta = \log(1+i)$ merupakan percepatan tingkat bunga (*force of interest*), dengan i adalah tingkat bunga (*interest rate*), sehingga $e^{-\delta}$ merupakan suatu nilai sekarang. Dengan demikian, Suatu anuitas seumur hidup dapat dikembangkan untuk suatu pembayaran sampai kematian dengan menggunakan nilai sekarang dari suatu anuitas pasti kontinu, yang diberikan dalam persamaan (6).

Misal T menyatakan waktu hidup yang akan datang dari seseorang yang berusia x; orang berusia x dapat dinotasikan dengan (x). Dengan demikian, T merupakan suatu variabel random yang memiliki distribusi waktu hidup akan datang. Misal Y adalah suatu variabel random yang menyatakan nilai sekarang dari suatu pembayaran secara kontinu, maka dapat dinyatakan sebagai

$$Y = \bar{a}_{\overline{T}|}, \text{ untuk setiap } T \geq 0 .$$

Berdasarkan hubungan di atas, maka fungsi distribusi dari Y dapat diperoleh seperti berikut:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathsf{P}(Y \leq y) = \mathsf{P}\left(\bar{a}_{\overline{T}|} \leq y\right) = \mathsf{P}\left(\frac{1-e^{-\delta T}}{\delta} \leq y\right) \\ &= \mathsf{P}\left(e^{-\delta T} \geq 1-\delta y\right) = \mathsf{P}\left[T \geq -\frac{\log(1-\delta y)}{\delta}\right] \\ &= F_T\left(-\frac{\log(1-\delta y)}{\delta}\right), \quad \text{untuk} \quad 0 < y < \frac{1}{\delta}. \end{aligned}$$

(8)

Jelas bahwa fungsi distribusi dari Y didasarkan atas fungsi distribusi T. Dengan demikian, pdf dari Y dapat diperoleh

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}F_T\left(-\frac{\log(1-\delta y)}{\delta}\right) = \frac{1}{1-\delta y} f_T\left(-\frac{\log(1-\delta y)}{\delta}\right)$$

,

untuk $0 < y < \frac{1}{\delta}$.

Ekpektasi Y dapat diperoleh seperti berikut:

$$\mathsf{E}[Y] = \mathsf{E}\left[\bar{a}_{\overline{T}|}\right] = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{T}|}\, \bar{F}(t)\mu(x+t)dt = \int_0^\infty e^{-\delta t}\bar{F}(t)dt$$

, $t \in \mathrm{R}_+$, (9)

di mana $\mu(x+t)$ adalah percepatan mortalitas dari (x). Nilai $\mathsf{E}[Y]$ sering disebut juga sebagai nilai sekarang aktuaria (*actuarial present value* disingkat APV) untuk suatu anuitas seumur hidup kontinu dari usia hidup (x), dinotasikan dengan $\bar{a}_x$.

Kemudian, untuk memberi ukuran tingkat resiko kematian dari suatu anuitas hidup kontinu, variansi dari Y sangat diperlukan. Sebelum itu, dimisalkan bahwa $Z = e^{-\delta T}$, maka momen ke-n dari Z dapat diberikan dalam sebagai berikut:

$$\mathsf{E}\left[Z^n\right] = \mathsf{E}\left[\left(e^{-\delta T}\right)^n\right] = \int_0^\infty \left(e^{-\delta T}\right)^n f_T(t)dt .$$

Berdasarkan hasil tersebut, maka dapat diperoleh

$$\mathsf{V}[Z] = \mathsf{E}\left[Z^2\right] - \left(\mathsf{E}[Z]\right)^2 = \mathsf{E}\left[e^{-2\delta T}\right] - \left(\mathsf{E}\left[e^{-\delta T}\right]\right)^2$$

.

Dalam aktuaria, $\mathsf{E}[Z] = \mathsf{E}\left[e^{-\delta T}\right]$ sering dinotasikan dengan $\bar{A}_x$. Berikut ini, dapat diberikan bentuk dari variansi Y sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathsf{V}[Y] &= \mathsf{V}\left[\bar{a}_{\overline{T}|}\right] = \mathsf{V}\left[\frac{1-e^{-\delta T}}{\delta}\right] = \frac{1}{\delta^2}\mathsf{V}\left[e^{-\delta T}\right] \\ &= \frac{1}{\delta^2}\left\{\mathsf{E}\left[e^{-2\delta T}\right] - \left(\mathsf{E}\left[e^{-\delta T}\right]\right)^2\right\} = \frac{1}{\delta^2}\left\{{}^2\bar{A}_x - \left(\bar{A}_x\right)^2\right\} \end{aligned}$$

. (10)

Perhatikan bahwa $1 = \delta \bar{a}_{\overline{T}|} + e^{-\delta T}$, sehingga $\mathsf{V}\left[\delta \bar{a}_{\overline{T}|} + e^{-\delta T}\right] = 0$. Ini artinya bahwa tidak terdapat tingkat resiko kematian untuk kombinasi dari suatu anuitas hidup kontinu terhadap δ tiap tahun dan suatu asuransi jiwa sebesar 1 dapat dibayarkan pada saat kematian.

Studi Kasus

Hasil-hasil yang diperoleh pada bagian ini didasarkan atas hukum Makeham seperti yang diberikan pada bagian sebelumnya, dengan parameter-parameter seperti berikut:

$$A = 0{,}0007 ; \quad B = 5 \times 10^{-5}; \quad c = 10^{0{,}04},$$

yang mengikuti Bowers *et al*. (1997)

Berdasarkan persamaan (1), maka dapat diperoleh

$$\bar{F}(t) = \frac{S(x+t)}{S(x)} = e^{1{,}09648^x\left[0{,}0005429 - 0{,}0005429\left(1{,}09648^t\right)\right] - 0{,}0007t}$$

, $t \in \mathrm{R}_+$

Hasil ini dapat diterapkan untuk usia hidup $x = 30$ dan $x = 65$, maka diperoleh

$$\bar{F}(t) = P(T_{30} > t) = 1.00864e^{0.0086(1.09648^t)-0.0007t},$$

dan

$$\bar{F}(t) = P(T_{65} > t) = 1.24125e^{-2.216121(1.09648^t)-0.0007t}.$$

Ini merupakan bentuk eksak dari ccdf (30) dan (65) secara berturut-turut.

Aproksimasi Distribusi Waktu Hidup yang Akan Datang

Hasil aproksimasi yang diperoleh pada bagian ini didasarkan atas persamaan (f), dengan menggunakan parameter-parameter berikut $\alpha = \beta = 0$, $p = 0{,}2$, $r = 0{,}08$ (Dufresne, 2007). Secara singkat, hasil aproksimasi ccdf dapat ditulis seperti berikut:

$$\bar{F}(t) \approx \sum_{j=0}^{N} c_j e^{-\lambda_j t} \quad \text{dengan} \quad \lambda_j = (p+j)r,$$

$j = 0,1,\ldots,N$.

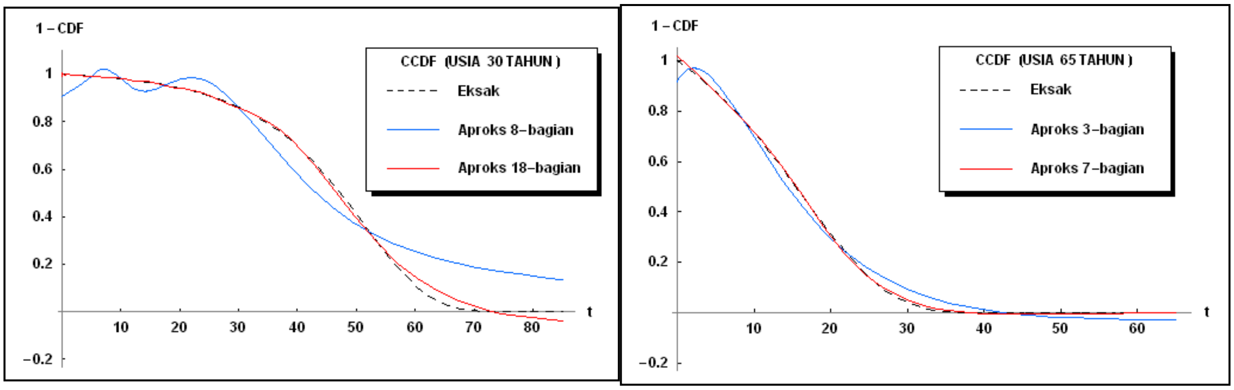
Bentuk ini disebut juga sebagai aproksimasi N - bagian dari $\bar{F}(t)$. Untuk hasil aproksimasi 18-bagian dari $\bar{F}(t)$, dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1 Hasil aproksimasi 18-bagian dari $\bar{F}(t)$

j	λ_j	c_j	
		(30)	**(65)**
0	0.016	−0.239963	−0.000330113
1	0.096	90.0016	−0.0816036
2	0.176	−1903.58	27.2145
3	0.256	18100.1	−1750.11
4	0.336	−29834.7	44782.
5	0.416	-1.14793×10^6	−560749.
6	0.496	1.42322×10^7	4.29369×10^6
7	0.576	-9.13906×10^7	-2.22967×10^7
8	0.656	3.86341×10^8	8.28543×10^7
9	0.736	-1.15797×10^9	-2.26913×10^8
10	0.816	2.54047×10^9	4.65014×10^8
11	0.896	-4.13144×10^9	-7.16511×10^8
12	0.976	4.97883×10^9	8.26280×10^8
13	1.056	-4.39031×10^9	-7.02340×10^8
14	1.136	2.75329×10^9	4.26957×10^8
15	1.216	-1.16302×10^9	-1.75592×10^8
16	1.296	2.96656×10^8	4.37617×10^7
17	1.376	-3.45210×10^7	-4.98999×10^6

Sumber: Pengolahan Data menggunakan software Mathematica

Tingkat ketelitian dari hasil aproksimasi dari distribusi waktu hidup yang akan datang untuk N bagian yang berbeda dapat dilihat pada Tabel 2. Berdasarkan Tabel 2, dapat dilihat bahwa aproksimasi 18-bagian dari $\bar{F}(t)$ lebih akurat, karena memiliki nilai yang paling kecil baik itu untuk usia 30 tahun ataupun 65 tahun. Secara visual, dapat dilihat bahwa hasil aproksimasi 18-bagian lebih baik karena pola grafiknya hampir sama dengan bentuk eksaknya baik itu untuk usia 30 tahun ataupun 65 tahun. Grafik distribusi waktu hidup yang akan datang dapat dilihat pada Gambar 1



Sumber: Pengolahan Data menggunakan software Mathematica

Gambar 1. Distribusi waktu hidup yang akan datang

Tabel 2. Estimasi tingkat ketelitian dari N - bagian aproksimasi $\bar{F}(t)$

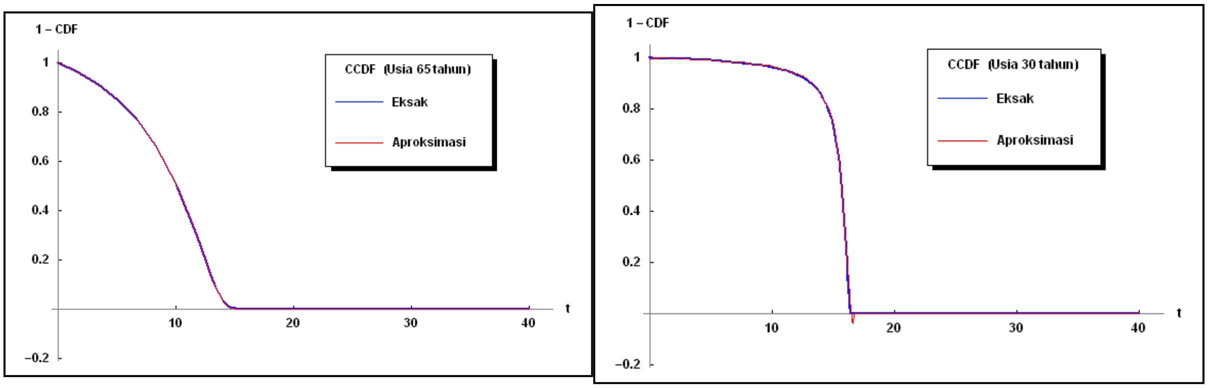
N	$\lVert F - \widehat{F}_N \rVert$	
	(30)	(65)
3	0.41	0.082
5	0.3	0.043
7	0.198	0.0198
10	0.0798	0.0065
18	0.043	0.001

Sumber: Pengolahan Data menggunakan software Mathematica

Aproksimasi Anuitas Hidup

Berdasarkan hasil sebelumnya, diperoleh bahwa hasil aproksimasi 18-bagian dari $\bar{F}(t)$ lebih baik. Dengan demikian, maka menghitung nilai aproksimasi anuita hidup pada bagian ini, menggunakan aproksimasi 18-bagian dari distribusi waktu hidup yang akan datang dengan parameter-parameter yang diberikan pada bagian sebelumnya.

Dengan demikian, untuk $\delta = 0.06$, ccdf distribusi anuitas hidup dari usia 30 tahun dan 65 tahun dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (8). Secara visual ccdf distribusi anuitas dapat diperlihatkan seperti Gambar 2. Berdasarkan Gambar 2, dapat dilihat bahwa aproksimasi distribusi anuitas hidup untuk usia hidup 30 tahun dan 65 tahun sangat baik, karena grafik aproksimasi dan grafik eksak tidak ada perbedaan yang signifikan. Hanya pada usia 30 tahun, grafik eksak agak sedikit berbeda. Hal ini dikarenakan Hal ini dikarenakan *error* yang diberikan oleh hasil aproksimasi 18-bagian dari distribusi waktu hidup yang akan datang untuk usia hidup 65 tahun lebih baik dibandingkan usis hidup 30 tahun.



Sumber: Pengolahan Data menggunakan software Mathematica

Gambar 2. ccdf distribusi anuitas hidup

Kemudian mean dan variansi distribusi anuitas hidup untuk $\delta = 0.06$ secara berturut-turut dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (9) dan (10) diperlihatkan pada Tabel 3. Pada tabel 3 dapat dilihat bahwa hasil aproksimasi sangat akurat.

Tabel 3 Hasil dari distribusi anuitas hidup untuk $\delta = 0.06$

	Usia 30 Tahun		Usia 65 Tahun	
	Eksak	Aproksimasi	Eksak	Aproksimasi
Mean	14.9999	14.9994	9.2709	9.2709
Variansi	4.2631	2.1124	12.7695	12.7296
Deviasi Baku	2.0647	1.4534	3.5725	3.5679

Sumber: Pengolahan Data menggunakan software Mathematica

Hasil penghitungangan nilai-nilai anuitas hidup yang dihasilkan oleh usia 30 tahun dan 65 baik secara eksak ataupun aproksimasi dapat dilihat pata Tabel 4. Secara keseluruhan, nilai-nilai anuitas yang diperoleh dari aproksimasi distribusi waktu hidup yang akan oleh suatu kombinasi eksponensial sangat baik dan mendekati nilai sebenarnya.

Tabel 4. Nilai-nilai anuitas hidup

δ	$\bar{a}_{30}$		$\bar{a}_{65}$	
	Eksak	Aproksimasi	Eksak	Aproksimasi
0.00	45.0669	41.5865	15.5200	15.5135
0.01	35.6692	34.8277	14.0838	14.0819
0.02	28.8808	28.6495	12.8424	12.8418
0.03	23.8791	23.8138	11.7641	11.7639
0.04	20.1212	20.1036	10.8230	10.8229
0.05	17.2437	17.2397	9.9978	9.9978
0.06	14.9999	14.9994	9.2709	9.2709
0.07	13.2199	13.2201	8.6278	8.6278
0.08	11.7848	11.7851	8.0565	8.0565
0.09	10.6105	10.6107	7.5468	7.5468
0.10	9.6362	9.6363	7.0903	7.0903
0.11	8.8177	8.8177	6.6799	6.6799
0.12	8.1221	8.1221	6.3095	6.3095
0.13	7.5248	7.5248	5.9742	5.9742
0.14	7.0071	7.0071	5.6696	5.6696
0.15	6.5546	6.5546	5.3919	5.3919

Sumber: Pengolahan Data menggunakan software Mathematica

SIMPULAN

Berdasarkan hasil-hasil penelitian yang diberikan dalam penulisan ini, maka dapat disimpulkan bahwa anuitas hidup dapat diproksimasi dengan menggunakan aproksimasi ccdf dari distribusi waktu hidup yang akan datang oleh persamaan

$$\bar{F}(t) = e^{-prt} \sum_{k=0}^{\infty} b_k R_k^{(\alpha,\beta)}\left(e^{-rt}\right),$$

yaitu dengan melakukan pemotongan terhadap jumlahan dari deret tersebut. Misal pemotongan deret di atas dalam N bagian, maka hasil dari aproksimasi tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\bar{F}(t) \approx \sum_{j=0}^{N} c_j e^{-\lambda_j t}$$

dengan $\lambda_j = (p+j)r$, $j = 0,1,\ldots,N$. Secara numerik, hasil aproksimasi anuitas hidup menggunakan kombinasi eksponensial atas aproksimasi distribusi waktu hidup yang akan datang sangat akurat.

DAFTAR PUSTAKA

Bowers NL, Gerber HU, Hickman JC, Jones DA, & Nesbitt CJ. 1997. *Actuarial Mathematics*. Second edition. Society of Actuaries. Schaumburg, Illinois

Dufresne D. 2006. *Fitting Combinations of Exponentials to Probability Distributions*. To appear in Applied Stochastic Models in Business and Industry

Dufresne D. 2007. Stochastic Life Annuities. *North American Actuarial Journal* Volume 11 Number 1: 136-157

Pentury T, Matakupan RW & Sinay LJ. 2011. Aproksimasi Distribusi Waktu Hidup Yang Akan Datang. *Jurnal Barekeng* Volume 5 Nomor 1: 47-51

Sinay LJ & Satyahadewi N. 2014. *Aproksimasi Tabel Mortalita Menggunakan Persamaan Dufresne*. Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Statistika. Pontianak: 445-453