Jurnal MIPA 38 (1) (2015): 79-88

Jurnal MIPA

http://journal.unnes.ac.id/nju/index.php/JM

KENDALI OPTIMAL DARI SISTEM INVENTORI DENGAN PENINGKATAN DAN PENURUNAN BARANG

P Affandi ✉ Faisal, Y Yulida

Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lambung Mangkurat

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Februari 2015
Disetujui Maret 2015
Dipublikasikan April 2015

Keywords:
increasing inventory, decreasing inventory, optimal control

Abstrak

Terdapat banyak permasalahan yang melibatkan teori sistem dan teori kontrol serta aplikasinya. Contohnya, beberapa referensi teori yang mengaplikasikan teori kontrol ke dalam masalah inventori. Masalah klasik dalam masalah inventori adalah bagaimana mengatur perubahan permintaan konsumen pada sebuah produk barang jadi. Selain mengalami penurunan yang disebabkan kerusakan dan kemerosotan, ternyata inventori juga bisa mengalami peningkatan. Biasanya, inventori yang mengalami peningkatan terjadi pada inventori yang melakukan proses produksi yang berlangsung secara terus menerus; Sedangkan permintaan sedikit juga terjadi pada inventori makhluk hidup yang mengalami perkembangbiakan. Selanjutnya, hal ini mengakibatkan terjadinya peningkatan jumlah inventori. Dapat disimpulkan bahwa secara teori, sistem Inventori dapat mengalami peningkatan dan penurunan. Masalah ini dapat dimodelkan dan diselesaikan dengan menggunakan teknik kontrol optimal, sehingga akan diperoleh nilai optimal tingkat inventori dan rata-rata produksi optimal.

Abstract

There are many problems involving the theory of systems, control theory and its application. For example, some reference theories apply control theory to the inventory problems. The classical problem in the inventory problem was how to manage changes in consumer demand in a finished product. Besides it declines caused by damage and deterioration, evidently inventory can also increase. Typically, inventories that increased were inventories have production process continues over time; While little demand also occurred in inventories of living beings who have breeding. evidently, this led to an increasing in the amount of inventory. It can be concluded that, in theory, inventory system can be increased and decreased. This problem can be modeled and solved using optimal control techniques, so it will be obtained an optimum value of inventory levels and the average optimal production.

✉ Alamat korespondensi:
E-mail: pardi_affandi@yahoo.com

ISSN 0215-9945

PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari banyak permasalahan yang melibatkan teori sistem dan teori kontrol optimal. Salah satunya adalah masalah inventori, yaitu bagaimana menyesuaikan perubahan permintaan konsumen pada sebuah produk barang jadi. Perusahaan tersebut harus membuat perencanaan yang baik dalam memproduksi barang agar sesuai dengan jumlah permintaan. Salah satunya dengan cara produk barang yang sudah jadi harus disimpan dalam sebuah pergudangan sebelum dipesan oleh konsumen. Hal inilah yang menyebabkan munculnya inventori yang sudah tentu akan menambah biaya penyimpanan dalam pergudangan berupa biaya secara fisik untuk menyimpan produk barang atau biaya yang muncul karena modal perusahaan terikat dalam bentuk barang. Selain itu juga bagaimana agar inventori barang produksi tidak mengalami kemerosotan mutu yaitu terjadinya kerusakan barang produksi dalam waktu tertentu (Affandi, 2011). Tadj *et al.* (2008) telah meneliti kontrol optimal dari sistem inventori dengan perbaikan dan barang-barang yang memburuk. Hasil dari penelitian Tadj *et al.* (2008) adalah masalah kontrol optimal dengan kendala ketimpangan campuran, di mana tingkat persediaan variabel keadaan dan tingkat produksi merupakan variabel kontrol. Kondisi optimal yang diperlukan diturunkan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin. Model yang dikembangkan merupakan perumuman beberapa model yang tersedia dalam literatur-literaur yang lain. Masalah ini dapat dimodelkan dengan menggunakan teknik kontrol optimal matematika. Masalah inventori termasuk salah satu masalah yang berkembang secara pesat. Selain mengalami penurunan ternyata inventori juga dapat mengalami peningkatan. Selain itu penelitian tentang kontrol optimal dari sistem inventori produksi dengan memburuknya produk juga telah dilakukan oleh Benhadid *et al*. (2008).

Permasalahan klasik dalam inventori adalah yang berkaitan dengan perubahan permintaan untuk produk. Selain itu, terdapat masalah lain yaitu bagaimana menyeimbangkan antara kepentingan kelancaran produksi dengan harga penyimpanan inventori. Produksi dapat berjalan lancar apabila biaya penyimpanan inventori bisa diatur sesuai dengan permintaan konsumen dan barang-barang inventori juga tidak mengalami kemerosotan. Untuk menyelesaikan masalah ini, teknik kendali optimal dapat diaplikasikan. Teori kendali optimal, merupakan perpanjangan dari kalkulus variasi, merupakan metode optimasi matematika untuk menurunkan kebijakan pengendalian. Dalam penelitian ini dibahas model matematika dari masalah inventori yang mengalami peningkatan dan penurunan barang serta bagaimana menyelesaikan bentuk model inventori tersebut menggunakan teknik optimal kontrol.

Materi yang disajikan dalam masalah ini adalah Himpunan Konveks dan Fungsi konveks, Persamaan Diferensial Linier nonhomogen dan solusinya, Sistem Persamaan Diferensial, Model inventori dan Kendali Optimal. Pengertian-pengertian konsep dan teorema-teorema yang di berikan bersumber pada buku-buku teks dan jurnal matematika.

Himpunan Konveks dan Fungsi konveks

Konsep fungsi konveks mendasari beberapa bagian dalam bab pembahasan. Berikut definisi dan teorema yang terkait dengan himpunan dan fungsi konveks.

Definisi 1. (Danese, 1965)

Himpunan $\Gamma \subset \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ $\Gamma \subset \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$*dikatakan himpunan konveks jika untuk sebarang* $x_1, x_2 \in \Gamma$ *dan untuk* $\lambda \in \mathbb{R}$ *sedemikian sehingga akan berlaku* $(1-\lambda)(x_1) + \lambda(x_2) \in \Gamma$.

Definisi 2. (Mital, 1994)

Misalkan $x \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ *dengan A adalah himpunan konveks. Suatu fungsi* $\theta(x)$ *disebut fungsi konveks di A jika dan hanya jika untuk sebarang dua titik* $x_1, x_2 \in A$ *dan setiap* $\lambda \in [0,1]$*, berlaku* $\theta\{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\} \leq \lambda\theta(x_1) + (1-\lambda)\theta(x_2)$.

Teorema 3. (Mital, 1994)

Diberikan himpunan terbuka $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$*. Fungsi* $\theta : \Gamma \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *terdifrensial di* $\bar{x} \in \Gamma$*. Jika* θ *konveks* *di $\bar{x} \in \Gamma$ maka $\theta(x) - \theta(\bar{x}) \geq \nabla\theta(\bar{x})(x - \bar{x})$ untuk setiap $x \in \Gamma$.*

Persamaan Diferensial Linear Nonhomogen dan Solusinya

Sebelum mencari solusi umum persamaan diferensial linear nonhomogen, berikut akan diberikan pengertian solusi umum untuk persamaan diferensial linear nonhomogen, yang didahului dengan dua teorema yang akan mengantar ke pengertian solusi umum. Diberikan persamaan diferensial linear nonhomogen

$$a_0 x \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = F(x) \quad (1)$$

dengan persamaan homogen yang berkorespondensi

$$a_0 x \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = 0 \quad (2)$$

Teorema 4. (Ross, 1984)

Jika v sebarang solusi persamaan (1) dan u sebarang solusi persamaan (2) maka $u + v$ juga merupakan solusi persamaan diferensial (1).

Teorema 5 (Ross, 1984)

Diberikan y_p suatu solusi untuk persamaan diferensial linear nonhomogen (1) yang tidak memuat sebarang konstanta. Jika $y_c = (c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n)$ solusi umum persamaan diferensial linear homogen (2) maka setiap solusi persamaan diferensial (1) dapat dinyatakan sebagai $y_c + y_p$ untuk suatu pemilihan konstanta $c_1, c_2, \ldots, c_n$ yang sesuai.

Sistem Persamaan Diferensial

Berikut ini akan dibahas solusi sistem persamaan diferensial homogen tanpa kendali (yaitu dengan kendali *u = 0*) *time vary*

$$\acute{x}(t) = A(t)x(t) \quad (3)$$

Persamaan diferensial (3) mempunyai n solusi bebas linear yaitu $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, dengan $x_i(t)$ merupakan vektor. Dibentuk matriks Y yang kolom-kolomnya adalah $x_i(t)$ yaitu

$y(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, yang dinamakan matriks fundamental. Karena $x_i(t)$ bebas linear berarti Y mempunyai invers. Selanjutnya dibentuk matriks

$$\phi(t,s) = Y(t)Y^{-1}(s) \quad (4)$$

yang dinamakan matriks transisi. Matriks transisi merupakan solusi tunggal untuk persamaan diferensial

$$\frac{d}{dt}\phi(t,s) = A(t)\phi(t,s), \phi(s,s) = I \quad (5)$$

dengan I adalah matriks identitas.

Matriks $\phi(t,s)$ akan merupakan solusi tunggal dari persamaan diferensial (3) dengan nilai awal I. Bukti persamaan (5) dapat diperoleh langsung dengan mensubsitusikan persamaan (4) ke persamaan (5). Selanjutnya solusi persamaan (3) dapat dinyatakan secara eksplisit sebagai fungsi dari nilai awal yaitu

$$x(t) = \phi(t, t_0)x_0. \quad (6)$$

atau secara umum dipenuhi

$$x(t) = \phi(t,s)x(s) \quad (7)$$

Persamaan (7) (dan (6) dapat dibuktikan dengan mensubstitusikan persamaan (4) ke persamaan (7). Matriks transisi memenuhi sifat-sifat

$\phi(t_2, t_0) = \phi(t_2, t_1)\phi(t_1, t_0)$ untuk semua $t_0, t_1, t_2 \in \Re$.

$\phi^{-1}(t,s) = \phi(s,t)$, untuk semua $s, t \in \Re$

$\phi(s,s) = I$, untuk semua $s \in \Re$.

Selanjutnya akan dibentuk $\phi(t,s)$ untuk sistem linear (3).

Didefinisikan $e^{at} = I + At + \frac{1}{2!}A^2 t^2 + \frac{1}{3!}A^3 t^3 + \cdots$

Diberikan teorema tentang matriks transisi untuk sistem (3).

Teorema 6.

Matriks transisi sistem linear homogen $\acute{x} = Ax$ adalah $e^{At(t-s)}$.

Solusi sistem $\acute{x} = Ax$ dengan $x(0) = x_0$ dapat dinyatakan dengan $\acute{x}(t) = e^{At}x_0$.

Berikut ini akan dilanjutkan dengan solusi solusi sistem nonlinear yang mengandung vektor kendali berbentuk $\dot{x}_i(t) = Ax + Bu \quad x(t_0) = x_0$.
(8)

Teorema 7. (Chen, 1984)

Solusi dari persamaan $\dot{x}_\iota(t) = A(t)x + B(t)u$, $x(t_0) = x_0$ *diberikan dengan*

$$x(t) = \Phi[t; t_{0,}x_0, u] = \Phi(t; t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t;\tau)\, B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (9)$$

$$= \Phi(t; t_0)[x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t;\tau)\, B(\tau)u(\tau)d\tau]$$

di mana $\Phi(t,\tau)$ *adalah matriks transisi dari* $\dot{x} = A(t)x$ *atau ekuivalen dengan solusi unik dari*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\tau) = A(t)\Phi(t,\tau) \quad \Phi(\tau,\tau) = I.$$

Sehingga solusi sistem $\dot{x}_\iota(t) = A(t)x + B(t)u$ *dengan* $x(t_0) = x_0$ *dapat dinyatakan dengan*

$$\Phi[t; t_{0,}x_0, u] = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\, Bu(\tau)d\tau.$$

Definisi 8 (Athans & Falb 1966)

Masalah Kendali Optimal untuk sistem inventori dengan target set S, fungsi tujuan $J(x_{0,}t_{0,}u)$, *himpunan admissible kontrol U, dan state awal* x_0 *pada waktu* t_0 *adalah menentukan kendali* $u \in U$ *yang memaksimalkan fungsi tujuan* $J(u)$. *Sebarang kendali* $u*$ *yang memberikan solusi terhadap masalah kendali optimal disebut dengan kendali optimal.*

Pada pembahasan berikut ini, permasalahan yang diberikan pada kasus kendali optimal dengan state akhir dan waktu akhir diketahui. Dengan kata lain target set S berbentuk S = $\{x_1\}$x$\{t_1\}$ yaitu berupa titik $(x_{1,}t_1)$ dengan x_1 elemen tertentu di R^n dan t_1 elemen tertentu di (T_1,T_2).

Diberikan sistem dengan state akhir dan waktu akhir diketahui

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$$

dengan x(t) vektor state berukuran $nx1$, u(t) vektor input berukuran $mx1$, f sebuah fungsi bernilai vektor. Diberikan state awalnya adalah X_0 dan pada waktu awalnya adalah t_0. Target set S berupa titik $(x_{1,}t_1)$ dengan $t_1 \in (T_1, T_2)$ diketahui nilainya dan $t_1 > t_0$.

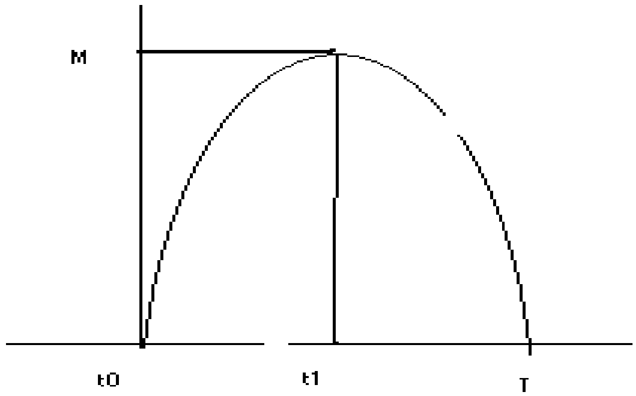
Masalah kendali optimal adalah mencari *admissible* kontrol u(t) dengan nilai awal $(x_{0,}t_0)$ dan nilai akhir $(x_{1,}t_1)$ yang memaksimalkan fungsi tujuan

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), u(t), t)\ dt$$

METODE PENELITIAN

Metode pembentukan model ini didasarkan pada sistem di mana ditinjau Inventori produk barang pada saat terjadi peningkatan dan penurunan inventori. Peningkatan inventori disebabkan karena adanya inventori awal kemudian terjadinya penambahan inventori sedangkan permintaan terhadap inventori masih belum ada kemudian seiring dengan adanya permintaan maka dengan sendirinya inventori akan mengalami penurunan. Sedangkan diketahui panjang perencaannya adalah T. Diasumsikan bahwa fase pertama dikatakan dari 0 hingga t_1 tingkat inventorinya meningkat, kemudian fase kedua yaitu dari t_1 hingga T, tingkat inventorinya menurun. Seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.

Perlu dicatat bahwa waktu t_1 tidak diketahui dan dibutuhkan cara untuk menentukan nilainya. Sedangkan nilai M yang merupakan tingkat inventori pada waktu t_1 diasumsikan nilainya diketahui. Berikut ini notasi yang digunakan untuk menggambarkan sistem dinamik dari inventori yang ada.

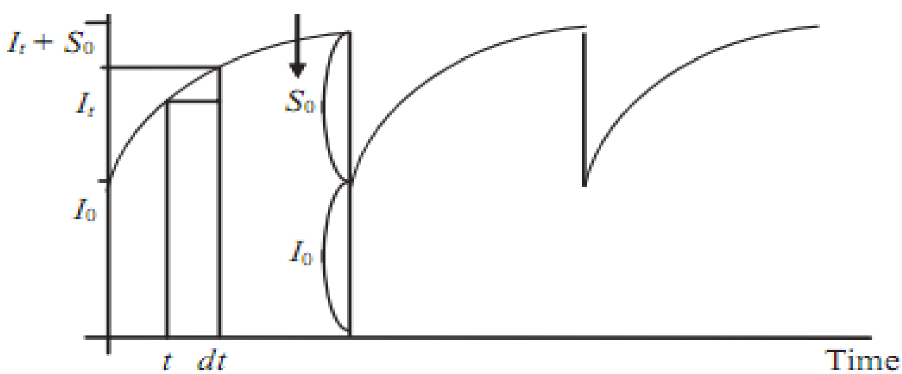


Keterangan :

$I(t)$ = tingkat fungsi Inventori
$P(t)$ = nilai produksi rata-rata fungsi
$D(t)$ = nilai fungsi permintaan
I_o = tingkat nilai awal inventori
$m(t)$ = Rata-rata fungsi kenaikan
$\theta(t)$ = Rata-rata fungsi kemerosotan

Gambar 1. Fase perubahan inventori

Juga kita misalkan $v(t) = m(t) - \theta(t)$ karena $m(t)$ dan $\theta(t)$ fungsi yang sudah diketahui berarti tingkat inventori berkembang dari waktu ke waktu berdasarkan persamaan statenya. Fungsi m(t) yaitu rata-rata fungsi kenaikan dimana karena adanya tingkat produksi maka Inventori akan bertambah, namun pada batas tertentu kemudian inventori akan ada permintaan sehingga inventorinya akan berkurang. Grafik kenaikan inventori dapat dilhat pada Gambar 2.



Gambar 2 . Kenaikan inventori

inventori karena adanya demand atau permintaan

$$\dot{I} = \begin{cases} P(t) + V(t) + I(t) & t \in [0, t_1] \\ P(t) - D(t) + v(t)I(t) & t \in [t_{1,} T] \end{cases} \quad (10)$$

Untuk menjamin tingkat inventori bertambah dari waktu 0 hinga t_1 dan menurun dari t_1 hingga T maka akan lebih lanjut dikenalkan

$$P(t) + V(t) + I(t) > 0 \qquad t \in [0, t_1] \quad (11)$$

$$D(t) - P(t) + v(t)I(t) > 0 \quad t \in [t_{1,} T] \quad (12)$$

Sekarang untuk membangun harga fungsi objektif, kita asumsikan bahwa tingkat inventori tujuan dan rata-rata produksi tujuan berupa himpunan dan akhirnya mendatangkan selisih dari tujuan. Untuk dapat menuliskan fungsi tujuan secara eksplisit kita kenalkan beberapa notasi tambahan berikut ini :

$\hat{P}$ = tingkat produksi tujuan
$\hat{I}$ = tingkat inventori tujuan
h = koefisien biaya penyimpanan
k = koefisien biaya produksi
λ = konstanta nonnegative biaya diskon

Untuk memberikan kenaikan hasil indeks maka akan kita minimumkan :

$$\min_{p\geq 0}\left\{J = \int_0^T \left(\frac{h}{2}\left(I - \hat{I}\right)^2 + \frac{k}{2}\left(P - \hat{P}\right)^2 dt\right)\right\} \quad (13)$$

Persamaan (10)-(12) merupakan batasan non negatif,

$$P(t) \geq 0 \; t \in [0, T] \quad (14)$$

Solusi dari masalah tersebut akan dibahas pada sesi berikutnya.

Pembahasan

Catatan bahwa disepakati bahwa pencampuran konstrain dari pertidaksamaan melibatkan kedua kontrol dan *variable state*. *The maximum principle* untuk masalah dengan pencampuran konstrain harus melibatkan fungsi yang kontinu dan kontinu sepotong-sepotong serta λ differensiabel, fungsi μ juga fungsi kontinu dan kontinu sepotong-sepotong.

Untuk mendefenisikan fungsi Hamiltonian

$$H = -\left(\frac{h}{2}\left(I-\hat{I}\right)^2 + \frac{c}{2}\left(P-\hat{P}\right)^2\right) + \lambda g \qquad (15)$$

Dimana

$$g = \begin{cases} P + VI & t \in [0, t_1] \\ D - P - VI & t \in [t_1, T] \end{cases} \qquad (16)$$

Dan fungsi Lagrangenya adalah

$$L = -\frac{1}{2}\left[\frac{h}{2}\left(I-\hat{I}\right)^2 + \frac{k}{2}\left(P-\hat{P}\right)^2\right] + \begin{cases} (\lambda+\mu)g, & t \in [0, t_1] \\ (\lambda-\mu)g, & t \in [t_1, T] \end{cases}$$

Syarat perlu untuk kondisi optimal diberikan dengan

$Hp = 0 (17)$

$L_I = -\lambda \qquad (18)$

$L_P = 0 \ (19)$

$\mu \geq 0, \mu g \geq 0 \quad (20)$

Kondisi ini bergantung pada dua differensial dengan bergantung pada keadaan $t \in [0, t_1]$ atau $t \in [t_1, T]$. Sehingga mari ditinjau satu persatu dari dua kasus tersebut.

Kasus 1 keadaan $t \in [0, t_1]$

Berarti dari kasus pada kondisi (12) akan diperoleh

$$H = -\left(\frac{h}{2}\left(I-\hat{I}\right)^2 + \frac{k}{2}\left(P-\hat{P}\right)^2\right) + \lambda(P + VI) \qquad t \in [0, t_1]$$

$Hp = 0$ akan diperoleh $-k\left(P-\hat{P}\right) + \lambda = 0$

$$\frac{\lambda}{k} = \left(P-\hat{P}\right)$$

$$P = \frac{\lambda}{k} + \hat{P} \qquad (21)$$

Kondisi (18) Ekuivalen dengan

$L_I = -\lambda$ berarti

$$L = -\frac{1}{2}\left[\frac{h}{2}\left(I-\hat{I}\right)^2 + \frac{k}{2}\left(P-\hat{P}\right)^2\right] + (\lambda+\mu)(P + VI) \qquad t \in [0, t_1]$$

maka $-\dot{\lambda} = -h\left(I-\hat{I}\right) + V(\lambda+\mu)$

$$\dot{\lambda} = h\left(I-\hat{I}\right) - V(\lambda+\mu) \qquad (22)$$

Kondisi (14) adalah ekuivalen dengan

$L_P = 0$ berarti

$-k\left(P-\hat{P}\right) + (\lambda+\mu) = 0$ maka

$$(\lambda+\mu) = k\left(P-\hat{P}\right) \qquad (23)$$

Kondisi (20) dengan (12) diimplikasikan $\mu = 0$. Karena itu (21) dan (10) ketika $t \in [0, t_1]$ menghasilkan

$$\mu \geq 0, \mu g \geq 0$$

Dari bentuk (10) ketika $t \in [0, t_1]$

$\dot{I} = P + V + I \quad t \in [0, t_1]$ dari persamaan (21) $P = \frac{\lambda}{k} + \hat{P}$

sehingga akan diperoleh

$$\dot{I} = \frac{\lambda}{k} + \hat{P} + VI \qquad (24)$$

Dengan mengkombinasikan $\dot{I} = \frac{\lambda}{k} + \hat{P} + V + I$ (24) dan $\dot{\lambda} = h\left(I-\hat{I}\right) - V(\lambda+\mu)$ (22) maka akan diperoleh persamaan dengan menurunkan (24) menjadi $\ddot{I} = \frac{\dot{\lambda}}{k} + \dot{\hat{P}} + \dot{V}I + V\dot{I}$ sehingga subsitusi nilai – nilai persamaan $\dot{\lambda} = h\left(I-\hat{I}\right) - V(\lambda+\mu)$ dan $\dot{I} = \frac{\lambda}{k} + \hat{P} + VI$

$$\ddot{I} = \frac{h(I-\hat{I}) - V(\lambda+\mu)}{k} + \dot{\hat{P}} + \dot{V}I + V\left(\frac{\lambda}{k} + \hat{P} + VI\right)$$

dan dari $(\lambda+\mu) = k\left(P-\hat{P}\right)$ (23)

$$\ddot{I} = \frac{h\left(I-\hat{I}\right) - V\left(k\left(P-\hat{P}\right)\right)}{k} + \dot{\hat{P}} + \dot{V}I + V\left(\frac{\lambda}{k} + \hat{P} + VI\right)$$

$$\ddot{I} = \frac{h}{k}\left(I-\hat{I}\right) - V\left(P-\hat{P}\right) + \dot{\hat{P}} + \dot{V}I + V\frac{\lambda}{k} + V\hat{P} + V^2 I$$

$$\ddot{I} = \frac{h}{k}\left(I-\hat{I}\right) - V\left(P-\hat{P}\right) + \dot{\hat{P}} + \dot{V}I + V\frac{\lambda}{k} + V\hat{P} + V^2 I$$

$$\ddot{I} = \frac{h}{k}I - \frac{h}{k}\hat{I} - VP + V\hat{P} + \dot{\hat{P}} + \dot{V}I + V\frac{\lambda}{k} + V\hat{P} + V^2 I$$

$$\ddot{I} - \frac{h}{k}I - V^2 I - \dot{V}I = -\frac{h}{k}\hat{I} - VP + V\hat{P} + \dot{\hat{P}} + V\frac{\lambda}{k} + V\hat{P}$$

dari persamaan berikut $P = \frac{\lambda}{k} + \hat{P}$ didapat $\frac{\lambda}{k} = P - \hat{P}$

$$\ddot{I} - \frac{h}{k}I - V^2 I - \dot{V}I = -\frac{h}{k}\hat{I} - VP + V\hat{P} + \dot{\hat{P}} + V(P - \hat{P}\ ) + V\hat{P}$$

$$\ddot{I} - \frac{h}{k}I - V^2 I - \dot{V}I = -\frac{h}{k}\hat{I} - VP + V\hat{P} + \dot{\hat{P}} + VP - V\hat{P} + V\hat{P}$$

$$\ddot{I} - \left(\frac{h}{k} + V^2 + \dot{V}\right) I = \alpha_1(t) \quad t \in [0, t_1] \quad (25)$$

dengan $\alpha_1(t) = -\frac{h}{k}\hat{I} + V\hat{P} + \dot{\hat{P}}$

<u>Kasus 2 keadaan $t \in [t_1, T]$</u>

Berarti dari kasus pada kondisi (12) akan diperoleh

$H = -\left(\frac{h}{2}\left(I - \hat{I}\right)^2 + \frac{k}{2}\left(P - \hat{P}\right)^2\right) + \lambda(D - P - VI) \quad t \in [t_1, T] \quad H_p = 0$ akan diperoleh

$$-k\left(P - \hat{P}\right) - \lambda = 0$$

$$-\frac{\lambda}{k} = \left(P - \hat{P}\right)$$

$$P = -\frac{\lambda}{k} + \hat{P} \qquad (26)$$

Kondisi (18) Ekuivalen dengan

$L_I = -\dot{\lambda}$ berarti

$L = -\left[\frac{h}{2}\left(I - \hat{I}\right)^2 + \frac{k}{2}\left(P - \hat{P}\right)^2\right] + (\lambda - \mu)(D - P - VI) \qquad t \in [, t_1, T]$

maka $-\dot{\lambda} = -h\left(I - \hat{I}\right) - V(\lambda - \mu)$

$$\dot{\lambda} = h\left(I - \hat{I}\right) + V(\lambda - \mu) \qquad (27)$$

Kondisi (19) adalah ekuivalen dengan

$L_p = 0$ berarti

$-k\left(P - \hat{P}\right) - (\lambda - \mu) = 0$ maka $(\lambda - \mu) = -k\left(P - \hat{P}\right)$ (28)

Kondisi (19) dengan (12) diimplikasikan $\mu = 0$. Karena itu (26) dan (10) ketika $t \in [, t_1, T]$ menghasilkan

$$\mu \geq 0\,, \mu g \geq 0$$

Dari bentuk (1) ketika $t \in [, t_1, T]$

$\dot{I} = P - D + VI \quad t \in [t_1, T]$ dari persamaan (21) $P = -\frac{\lambda}{k} + \hat{P}$

sehingga akan diperoleh

$$\dot{I} = -\frac{\lambda}{k} + \hat{P} - D + VI \qquad (29)$$

Maka dengan mengkombinasikan (27) dan (29) maka akan diperoleh :

Subsitusikan $\dot{\lambda} = h\left(I - \hat{I}\right) + V(\lambda - \mu)$ (27) ke (29). Namun terlebih dahulu menurunkan 4.16 akan diperoleh turunannya adalah sebaga berikut

$$\ddot{I} = -\frac{\dot{\lambda}}{k} + \dot{\hat{P}} - \dot{D} + \dot{V}I + V\dot{I} \qquad (30)$$

dengan mensubsitusikan (26) harga P, (27) gunakan harga $\dot{\lambda}$, (28) $(\lambda - \mu) = -k\left(P - \hat{P}\right)$ gunakan (29) pakai harga $\dot{I}$ maka akan diperoleh :

$$\ddot{I} = -\frac{h(I-\hat{I}) + V(\lambda-\mu)}{k} + \dot{\hat{P}} - \dot{D} + \dot{V}I + V\left(-\frac{\lambda}{k} + \hat{P} - D + VI\right)$$ karena $-\frac{\lambda}{k} = -\hat{P} + P$

$$\ddot{I} = -\frac{h(I-\hat{I}) + V(\lambda-\mu)}{k} + \dot{\hat{P}} - \dot{D} + \dot{V}I + V\left(-\hat{P} + P + \dot{\hat{P}} - D + VI\right)$$

$$\ddot{I} = -\frac{h(I-\hat{I}) + V(\lambda-\mu)}{k} + \dot{\hat{P}} - \dot{D} + \dot{V}I + V\left(P - \dot{D} + VI\right)$$

$$\ddot{I} = -\frac{h}{k}\left(I - \hat{I}\right) + \frac{v}{k}(\lambda - \mu) + \dot{\hat{P}} - \dot{D} + \dot{V}I + VP - V\dot{D} + V^2 I$$

$$\ddot{I} - \dot{V}I - V^2 I = -\frac{h}{k}\left(I - \hat{I}\right) + \frac{v}{k}(\lambda - \mu) + \dot{\hat{P}} - \dot{D} + VP - \dot{V}D$$

$$\ddot{I} - \dot{V}I - V^2 I = -\frac{h}{k}I + \frac{h}{k}\hat{I} + \frac{v}{k}(\lambda - \mu) + \dot{\hat{P}} - \dot{D} + VP - \dot{V}D$$

$$\ddot{I} - \dot{V}I - V^2 I + \frac{h}{k}I = \frac{h}{k}\hat{I} + \frac{v}{k}(\lambda - \mu) + \dot{\hat{P}} - \dot{D} + VP - \dot{V}D$$

$$\ddot{I} - I\left(\frac{h}{k} + V^2 + \dot{V}\right) = \frac{h}{k}\hat{I} + \frac{v}{k}\left(-k\left(P - \hat{P}\right)\right) + \dot{\hat{P}} - \dot{D} + VP - \dot{V}D$$

$$\ddot{I} - I\left(\frac{h}{k} + V^2 + \dot{V}\right) = \frac{h}{k}\hat{I} - V\left(P - \hat{P}\right) + \dot{\hat{P}} - \dot{D} + VP - \dot{V}D$$

$$\ddot{I} - \dot{I}(\frac{h}{k} + V^2 + V)$$
$$= \frac{h}{k}\hat{I} - VP + V\hat{P} + \hat{\dot{P}} - \dot{D} + VP - VD$$
$$\ddot{I} - \dot{I}(\frac{h}{k} + V^2 + V) = \frac{h}{k}\hat{I} + V\hat{P} + \hat{\dot{P}} - \dot{D} - VD$$
$$\ddot{I} - \dot{I}(\frac{h}{k} + V^2 + V) = \frac{h}{k}\hat{I} + V(\hat{P} - D) + \hat{\dot{P}} - \dot{D}$$

maka diperoleh bentuk akhirnya adalah

$$\ddot{I} - \dot{I}(\frac{h}{k} + V^2 + V) = \alpha_2\,(t)$$

di mana $\alpha_2\,(t) = \frac{h}{k}\hat{I} + V(\hat{P} - D) + \hat{\dot{P}} - \dot{D}$ (31)

Untuk menentukan nilai optimal tingkat inventori, rata-rata produksi optimal tingkat inventori dan rata-rata produksi optimal, harus memperoleh solusi dari (25) dan (31). Solusi tergantung dari fungsi m dan θ, yang ikut menentukan nilai v. Dalam sebagaian besar kasus, akan sangat tidak mungkin menentukan solusi persamaan differensial dari (25) dan (31). Namun akan kita amati dua kasus dalam bentuk solusi eksplisit. Akan diuraikan kejadian dalam bentuk khusus. Dalam kasus umum persamaan differensial dari (25) dan (31) diselesaikan dengan cara numerik.

Fungsi V adalah konstanta

Ketika fungsi V adalah dalam bentuk konstanta maka persamaan differensial dari (25) dan (31) akan diperoleh menjadi

$$\ddot{I} - \left(\frac{h}{k} + V^2\right) I = \alpha_1(t) \qquad t \in [0, t_1] \qquad (32)$$

$$\ddot{I} - \left(\frac{h}{k} + V^2\right) I = \alpha_2(t) \qquad t \in [t_1, T] \qquad (33)$$

Maka akan diperoleh persamaan differensial orde dua yang dapat diselesaikan dengan cara

Kita misalkan y = e^{mt} maka $y' = me^{mt}$ dan y''= m^2e^{mt}. Berarti akan kita peroleh persamaan karakteristiknya sebagai berikut :

$$m^2 - \left(\frac{h}{k} + V^2\right) = 0$$

yang berarti kita dapatkan akar-akarnya adalah sebagai berikut

$$r_1 = r = \sqrt{\frac{h}{k} + V^2} \text{ dan } r_2 = -r = -\sqrt{\frac{h}{k} + V^2}$$

Sehingga solusi dari (4.16) dan (4.18) akan diberikan dengan bentuk :

$$I(t) = \begin{cases} C_{11}e^{rt} + C_{12}e^{-rt} + Q_1(t) & t \in [0, t_1] \\ C_{21}e^{rt} + C_{22}e^{-rt} + Q_2(t) & t \in [t_1, T] \end{cases}$$
(34)

di mana $Q_1(t)$ dan $Q_2(t)$ merupakan solusi tambahan dari (25) dan (31), maka dengan menggunakan kondisi $I(0) = I_0$ dan $I(t_1) = M$. Akan diperoleh

Untuk nilai $t \in [0, t_1]$ diperoleh

$$I(0) = C_{11}e^{r0} + C_{12}e^{-r0} + Q_1(0) = I_0$$

maka $I_0 = C_{11}(1) + C_{12}(1) + Q_1(0)$

$$I(t_1) = C_{11}e^{rt_1} + C_{12}e^{-rt_1} + Q_1(t_10) = M$$

maka $M = C_{11}e^{rt_1} + C_{12}e^{-rt_1} + Q_1(t_1)$

Nilai C_{11} dan C_{12} dapat ditentukan dengan menggunakan cara matriks yaitu

$$\begin{pmatrix} I_0 \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{rt_1} & e^{-rt_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_1(0) \\ Q_1(t_1) \end{pmatrix} \text{ berarti}$$

menggunakan sifat matriks

$A = BX + C$ dan diperoleh $X = B^{-1}(A - C)$

Det $B = e^{-rt_1} - e^{rt_1}$ maka

$$X = \frac{1}{\det B}\,(adj\,B)(A - C)$$

maka diperoleh

$$\begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{-rt_1} - e^{rt_1}}\begin{pmatrix} e^{-rt_1} & -1 \\ -e^{-rt_1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_0 \\ M \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q_1(0) \\ Q_1(t_1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{-rt_1} - e^{rt_1}}\begin{pmatrix} e^{-rt_1} & -1 \\ -e^{-rt_1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_0 - Q_1(0) \\ M - Q_1(t_1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} =$$
$$\frac{1}{e^{-rt_1} - e^{rt_1}}\begin{pmatrix} e^{-rt_1}(I_0 - Q_1(0) - (M - Q_1(t_1)) \\ -e^{-rt_1}(I_0 - Q_1(0) + I_0 - Q_1(0) \end{pmatrix}$$

Nilai $C_{11} = \frac{Q_1(t_1) - M + ((I_0 - Q_1(0)e^{-rt_1})}{e^{-rt_1} - e^{rt_1}}$ dan

$$C_{12} = \frac{-(Q_1(t_1) - M) + ((I_0 - Q_1(0) - e^{-rt_1})}{e^{-rt_1} - e^{rt_1}}$$

Sehingga secara umum diperoleh

$$C_{1j} = \frac{(-1)^{j-1}(Q_1(t_1) - M) + ((I_0 - Q_1(0) - 1(j)e^{-rt_1})}{e^{-rt_1} - e^{rt_1}}$$

dengan $j = 1{,}2$.

Berdasarkan persamaan $\dot{I} = \frac{\lambda}{k} + \hat{P} + VI$ untuk $t \in [0, t_1]$ serta (34) akan diperoleh

$\lambda = \mathrm{K}(\dot{I} - \hat{P} - VI)$ sehingga

$$\lambda = \mathrm{K}(rC_{11}e^{rt} - rC_{12}e^{-rt} + \dot{Q}_1(t)) - \hat{P} - V(C_{11}e^{rt} + C_{12}e^{-rt} + Q_1(t))) \quad t \in [0, t_1]$$

$$\lambda = \mathrm{K}((rC_{11}e^{rt} - rC_{12}e^{-rt} + \dot{Q}_1(t)) - \hat{P} - (VC_{11}e^{rt} + VC_{12}e^{-rt} + VQ_1(t)))$$

$$\lambda = \mathrm{K}\left((rC_{11}e^{rt} - rC_{12}e^{-rt} + \dot{Q}_1(t)\right) - \hat{P} - VC_{11}e^{rt} - VC_{12}e^{-rt} - VQ_1(t)$$

$\lambda = \mathrm{K}(C_{11}(r-V)e^{rt} - C_{12}(r+V)e^{-rt} + \dot{Q}_1 - \hat{P} - VQ_1)\quad t \in [0, t_1]$

Berdasarkan $\dot{I} = -\frac{\lambda}{k} + \hat{P} - D + VI$ untuk $t \in [t_1, T]$ serta (34) akan diperoleh

$\lambda = \mathrm{K}(-\dot{I} + \hat{P} - D + VI)$ sehingga

$\lambda = \mathrm{K}(-rC_{21}e^{rt} + rC_{22}e^{-rt} - \dot{Q}_2(t) + \hat{P} - D + V(C_{21}e^{rt} + C_{22}e^{-rt} + Q_2(t))$

$\lambda = \mathrm{K}(-rC_{21}e^{rt} + rC_{22}e^{-rt} - \dot{Q}_2(t) + \hat{P} - D + VC_{21}e^{rt} + VC_{22}e^{-rt}VQ_2(t)$

$\lambda = \mathrm{K}(C_{21}(V-r)e^{rt} + C_{22}(V+r)e^{-rt} - \dot{Q}_2(t) + \hat{P} - D + VQ_2(t)$

Jadi diperoleh

$$\lambda = \mathrm{K} \times \begin{cases} (C_{11}(r-V)e^{rt} - C_{12}(r+V)e^{-rt} + \dot{Q}_1 - \hat{P} - VQ_1) & t \in [0, t_1] \\ C_{21}(V-r)e^{rt} + C_{22}(V+r)e^{-rt} - \dot{Q}_2(t) + \hat{P} - D + VQ_2(t) & t \in [t_1, T] \end{cases} \quad (35)$$

Dengan menggunakan $I(t_1) = M$, $\lambda(\mathrm{T}) = 0$, akan memberikan :

$$I(t_1) = C_{21}e^{rt_1} + C_{22}e^{-rt_1} + Q_2(t_1) = M$$

$$\lambda(T) = C_{21}(V-r)e^{rt_1} + C_{22}(V+r)e^{-rt_1} - \dot{Q}_2(t_1) + \hat{P} - D + VQ_2(t_1) = 0$$

Sehingga dengan menggunakan persamaan matriks diperoleh

$$\begin{pmatrix} \mathrm{M} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{rt_1} & e^{-rt_1} \\ (V-r)e^{rt_1} & (V+r)e^{-rt_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_2(t_1) \\ -\dot{Q}_2(t_1) + \hat{P} - D + VQ_2(t_1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^{rt_1} & e^{-rt_1} \\ (V-r)e^{rt_1} & (V+r)e^{-rt_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{M} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q_2(t_1) \\ -\dot{Q}_2(t_1) + \hat{P} - D + VQ_2(t_1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{(e^{rt_1})\left((V+r)e^{-rt_1}\right) - (e^{-rt_1})((V-r)e^{rt_1})}\begin{pmatrix} (V+r)e^{-rt_1} & -e^{-rt_1} \\ -(V-r)e^{rt_1} & e^{rt_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{M} - Q_2(t_1) \\ \dot{Q}_2(t_1) - \hat{P} + D - VQ_2(t_1) \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$C_{21} = e^{-rt_1}[M - C_{22}e^{-rt_1} - Q_2(t_1)]$$

$$C_{22} = \frac{\gamma}{(V-r)e^{rT} - e^{(T-2t_1)r}}$$

Di mana $\gamma = [Q_2(t_1) - M](r-v)e^{(T-t)r} - \dot{Q}_2(T) + \hat{P} + D(T) + VQ_2(T)$

Sehingga dari (35) dapat disubsitusikan ke persamaan (21) $P = \frac{\lambda}{k} + \hat{P}$ akan diperoleh nilai

$$P(t) = \hat{P} + \begin{cases} (C_{11}(r-V)e^{rt} - C_{12}(r+V)e^{-rt} + \dot{Q}_1 - \hat{P} - VQ_1) & t \in [0, t_1] \\ C_{21}(V-r)e^{rt} + C_{22}(V+r)e^{-rt} - \dot{Q}_2(t) + \hat{P} - D + VQ_2(t) & t \in [t_1, T] \end{cases}$$

Sedangkan fungsi Q_1 dan Q_2 dapat dihitung nilainya ketika harga fungsi D diketahui. (16) Fungsi $\frac{h}{k} + V^2 + \dot{V}$ adalah konstan

Ketika fungsi $\frac{h}{k} + V^2 + \dot{V}$ adalah konstan, bentuk dari solusi diperoleh berdasarkan nilai konstannya positif atau negatif, kita akan lihat solusinya dalam dua kondisi tersebut.

Kondisi 1 Fungsi $\frac{h}{k} + V^2 + \dot{V}$ adalah konstan positif

Berarti $\frac{h}{k} + V^2 + \dot{V} = {k_1}^2$ (36)

Sehingga persamaan diffrensial dari (3.12) dan (3.18) akan berubah menjadi

$\ddot{I} - ({k_1}^2)I = \alpha_1(t)\ t \in [0, t_1]$ (37)

dan $\ddot{I} - (\boldsymbol{k_1}^2)I = \alpha_2(t)\quad t \in [t_1, T]$ (38)

Catatan bahwa untuk menyelesaikan Persamaan differensial (36), kita butuh untuk menghitung V terlebih dahulu sebelum mendapatkan solusi (37) dan (38) diperoleh. Solusi (36) tergantung dari jenis konstan dari ${k_1}^2 - \frac{h}{k}$. Mari kita tinjau dua bentuk :

Bentuk 1 ${k_1}^2 - \frac{h}{k}$ bentuk positif . Andaikan kita ambil ${k_1}^2 - \frac{h}{k} = a^2$ maka kita dapat menyelesaikan persamaan (36) menjadi

$\boldsymbol{V}^2 + \dot{\boldsymbol{V}} = {k_1}^2 - \frac{h}{k}$

$\boldsymbol{V}^2 + \dot{\boldsymbol{V}} = a^2$ sehingga bentuknya menjadi $\frac{dv}{dt} = a^2 - \boldsymbol{V}^2$ atau $\frac{dv}{a^2 - \boldsymbol{V}^2} = dt$

Bentuk tersebut berarti dapat diselesaikan dengan cara $\frac{dv}{(a-\boldsymbol{V})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{V})} = dt$

Dengan menggunakan integral kedua ruas persamaan akan diperoleh

$$\int \frac{dv}{(a-\boldsymbol{V})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{V})} = \int dt$$

$$\int \frac{dv}{(a-\boldsymbol{V})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{V})} = t$$

Bentuk integral ruas kiri dapat diselesaikan dengan cara

$\frac{A}{a-\boldsymbol{V}}+\frac{B}{a+\boldsymbol{V}}=\frac{1}{(a-\boldsymbol{V})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{V})}$ sehingga

$\frac{A(a+V)+B(a-V)}{(a-\boldsymbol{V})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{V})}=\frac{1}{(a-\boldsymbol{V})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{V})}$

Menghasilkan $\frac{Aa+Ba+AV-BV}{(a-\boldsymbol{V})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{V})}=\frac{1}{(a-\boldsymbol{V})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{V})}$

$$\frac{(A+B)a+V(A-B)}{(a-\boldsymbol{V})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{V})}=\frac{1}{(a-\boldsymbol{V})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{V})}$$

Sehingga $A+B=\frac{1}{a}$ dan $A-B=0$ akan diperoleh nilai $A=\frac{1}{2a}$ dan $B=-\frac{1}{2a}$ kemudian subsitusi sehingga didapatkan persamaan integralnya sebagai berikut :

$$\int\frac{dv}{(a-\boldsymbol{V})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{V})}=\int\frac{A}{(a-\boldsymbol{V})}+\frac{B}{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{V})}dv=\ t$$

$$t=\frac{1}{2a}\int\frac{1}{(a-\boldsymbol{V})}dv-\frac{1}{2a}\int\frac{B}{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{V})}dv$$

$$t=\frac{1}{2a}Ln(a-\boldsymbol{V})-\frac{1}{2a}Ln(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{V})$$

$t=\frac{1}{2a}Ln\frac{(a-\boldsymbol{V})}{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{V})}$ atau t = $\left[Ln\left(\frac{a-\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{V}}\right)^{\frac{1}{2a}}\right]$

Jadi $\left(\frac{a-\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{V}}\right)^{\frac{1}{2a}}=e^{t}$ dan $\frac{a-\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{V}}=e^{2at}$ maka diperoleh $a-V=(a+V)(e^{2at})$

$a-v=ae^{2at}+Ve^{2at}$

$a-ae^{2at}=Ve^{2at}+V$

$a(1-e^{2at})=V(e^{2at}+1)$

Sehingga $V(t)=a\frac{1-e^{2at}}{e^{2at}+1}$

SIMPULAN

Secara teori model Inventori pada saat terjadi peningkatan dan penurunan inventori biasanya disebabkan karena adanya inventori awal kemudian terjadinya penambahan inventori sedangkan permintaan terhadap inventori masih sedikit. Seiring dengan adanya permintaan maka inventorinya mengalami penurunan. Walaupun secara praktek agak sulit kita dapatkan. Bagi peneliti selanjutnya, disarankan agar dapat mengembangkan Jenis permintaan yang berbentuk lebih kompleks yang dapat diarahkan kedalam bentuk stokastik.

DAFTAR PUSTAKA

Athans M. & Falb PL. 1966. *Optimal control: an introduction to the theory and its applications*. Michigan: McGraw-Hill

Benhadid Y. Tadj L. & Bounkhel M. 2008. Optimal Control of Production Inventory System with Deteriorating Items and Dynamic Costs. *Applied Mathematics E-Notes* 8 (2008): 194-202

Chen Chi-Tsong. 1984. *Linear System Theory and Design.* New York: Madison Avenue.

Danese AE. 1965. *Advanced Calculus an introduction to Applied Mathematics.*

Mital, KV. 1994. *Optimizations Methods* 1'st Edition, Delft University of Technology.

Affandi P. 2011. *Kendali Optimal system pergudangan dengan produksi yang mengalami kemerosotan*. Tesis. Yogyakarta.

Ross, SL.1984. *Differential Equations. 3 Editions*. New York: John Wiley & Sons.

Tadj L, Sarhan AM. & El-Gohary. 2008. Optimal control of an inventory system with ameliorating and deteriorating items. *Applied Sciences* Vol 10, 2008, pp. 243-255