Jurnal MIPA 39 (1) (2016): 29-33

Jurnal MIPA

http://journal.unnes.ac.id/nju/index.php/JM

PERSAMAAN SCHRODINGER D-DIMENSI BAGIAN SUDUT POTENSIAL POSCHL-TELLER HIPERBOLIK TERDEFORMASI Q PLUS ROSEN-MORSE TRIGONOMETRI MENGGUNAKAN METODE NIKIFOROV-UVAROV

Suparmi ✉ **Cari, D Kusumawati**

Pascasarjana Ilmu Fisika, Universitas Sebelas Maret, Surakarta, Indonesia

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Februari 2016
Disetujui Maret 2016
Dipublikasikan April 2016

Keywords:
D-dimensional Schrodinger equation; q-Deformed Hyperbolic Poschl Teller plus q Deformed Trigonometric Rosen-Morse Potential; Nikiforov Uvarov (NU)

Abstrak

Metode Nikivarof Uvarov merupakan metode penyelesaian persamaan diferensial orde dua dengan mengubah persamaan diferensial orde dua yang umum (persamaan Schrodinger) menjadi persamaan diferensial tipe hipergeometrik melalui substitusi variabel yang sesuai untuk memperoleh eigen value dan fungsi gelombang bagian sudut. Penelitian ini merupakan studi literatur untuk menyelesaikan persamaan Schrodinger D-dimensi bagian sudut dengan potensial Poschl-Teller Hiperbolik Terdeformasi q plus Rosen Morse Trigonometri Terdeformasi q menggunakan metode Nikiforov-Uvarov (NU). Pada penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana fungsi gelombang bagian sudut persamaan schrodinger D-dimensi untuk potensial Poschl-Teller Hiperbolik Terdeformasi q plus Rosen Morse Trigonometri Terdeformasi q menggunakan metode Nikiforov-Uvarov (NU).

Abstract

Nikivarof Uvarov is a method to solve second order differential equations by changing general second order differential equation to hyper-geometric differential equation type through substituting relevant variable to obtain eigenvalues and the angle of wave function. This is a literature study to solve the D-dimensional Schrodinger equation with a corner section q Deformed Hyperbolic Poschl Teller plus q Deformed Trigonometric Rosen-Morse Potential using Nikiforov-Uvarov (NU). This study aims to determine the way the angle of wave function of D-dimensional Schrodinger equation for q-Deformed Hyperbolic Poschl Teller plus q Deformed Trigonometric Rosen-Morse Potential using Nikiforov-Uvarov (NU).

✉ Alamat korespondensi:
Jln. Ir Sutami 36 Kentingan, Surakarta, 57126
E-mail: ameda2@yahoo.com

ISSN 0215-9945

PENDAHULUAN

Dalam mekanika kuantum, digunakan pendekatan yang berbeda untuk menentukan besaran-besaran yangterkait dengan gerak partikel, yaitu dengan menggunakan fungsi gelombang untuk mempresentasikan dinamika partikel yang bergerak yang diperoleh dari persamaan shcrodinger dari partikel (Hamzawi & Rajabi 2012). Sistem gerak partikel akibat pengaruh relativistik menyebabkan partikel tersebut berpindah dalam medan potensial[2]. Untuk menyelesaikan persamaan gerak dari partikel tersebut dapat digunakan persamaan Schrödinger, Dirac, dan Klein-Gordon yang pada dasarnya secara langsung dapat diturunkan dari Lagrangian klasik (Hammed 2012).

Berbagai metode penyelesaian persamaan Schrödinger untuk gerak partikel bermuatan pada potensial – potensial sentral dan non sentral dengan suatu potensial vektor atau suatu potensial skalar terpisahkan telah dikembangkan (Greiner 2000). Metode lain untuk menyelesaikan persamaan Schrödinger untuk sistem gerak partikel bermuatan pada potensial sentral dan non sentral telah dilakukan (Chun-Sheng et al 2002). Metode yang telah dilakukan antara lain Supersymmetry, metode shape invarian, metode Nikiforov-Uvarov (NU) (Ikot & Akpabio 2010) dan polinomial Romanovski (Cari & Suparmi 2012)

METODE

Metode NU

Metode NU dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde kedua hypergeometry pengganti dengan menggunakan transformasi koordinat semestinya s = s(r). Persamaan

Schrodinger dengan metode NU dapat dituliskan berikut ini dalam bentuk (Cari & Suparmi 2012, Nikiforov & Uvarov 1988, Akbarich & Motavali 2008, Awoga & Ikot 2012):

$$\frac{\partial^2\psi(s)}{\partial s^2}+\frac{\bar{\tau}}{\sigma(s)}\frac{\partial\psi(s)}{\partial s}+\frac{\bar{\sigma}}{\sigma^2}\psi(s)=0 \qquad (1)$$

Solusi penyelesaiannya sebagai berikut:

1. Menentukan nilai π yang dinyatakan

$$\pi=\frac{\sigma'-\bar{\tau}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma'-\bar{\tau}}{2}\right)-\bar{\sigma}+k\sigma} \qquad (2)$$

2. Menentukan nilai τ yang dinyatakan

$$\tau=\bar{\tau}+2\pi \qquad (3)$$

3. Menentukan nilai λ yang dinyatakan

$$\lambda=k+\pi \qquad (4)$$

4. Menentukan nilai λ_n yang dinyatakan

$$\lambda=\lambda_n=-n\bar{\tau}_1-\frac{n(n-1)}{2}\sigma'' \qquad 5)$$

Fungsi Hyperbolik dan Trigonometri Terdeformasi

Hyperbolik function deformed Arai introduced in 1991 (Chun-Sheng et al 2002, Dutra 2008, Akbarich & Motavali 2008) is obtained as follows:

$$\sinh_q x=\frac{\left(e^{x}-qe^{-x}\right)}{2} \qquad 6)$$

$$\cosh_q x=\frac{\left(e^{x}+qe^{-x}\right)}{2} \qquad 7)$$

$$\tanh_q x=\frac{\sinh_q x}{\cosh_q x} \qquad 8)$$

$$\coth_q x=\frac{\cosh_q x}{\sinh_q x} \qquad 9)$$

$$\sec h_q x=\frac{1}{\cosh_q x} \qquad 10)$$

$$\cos ech_q x=\frac{1}{\sinh_q x} \qquad 11)$$

Dari persamaan (6) dan (7) diperoleh sebagai:

$$\cosh_q^2 x-\sinh_q^2 x=q \qquad 12)$$

$$1-\tanh_q^2 x=q\sec h_q^2 x \qquad 13)$$

Dengan translasi yang sesuai dari variabel *spatial* yang didapatkan sebagai berikut:

$$r = r + \frac{\ln\sqrt{q}}{\alpha} \qquad 14)$$

Kemudian, mengganti fungsi hyperbolik *q-deformed* ke dalam salah satu *non-deformed* atau sebaliknya sebagai berikut:

$$\sinh_q \alpha r = \frac{e^{\alpha r} - q^{-\alpha r}}{2} = \frac{e^{\alpha\left(y+\frac{\ln\sqrt{q}}{\alpha}\right)} - q^{-\alpha\left(y+\frac{\ln\sqrt{q}}{\alpha}\right)}}{2} = \sqrt{q}\sinh\alpha y \qquad (15)$$

$$\sinh\alpha y = \frac{e^{\alpha y} - q^{-\alpha y}}{2} = \frac{e^{\alpha\left(x+\frac{\ln\sqrt{y}}{\alpha}\right)} - q^{-\alpha\left(x+\frac{\ln y}{\alpha}\right)}}{2} = \frac{\sinh_q \alpha r}{\sqrt{q}} \qquad (16)$$

$$\sinh_q \alpha r = \sqrt{q}\sinh\alpha r; \cosh_q \alpha r = \sqrt{q}\cosh\alpha r; \tanh_q \alpha r = \tanh\alpha r \qquad (17)$$

$$\sinh_q \alpha y = \frac{\sinh_q \alpha r}{\sqrt{q}}; \cosh_q \alpha y = \frac{\sinh_q \alpha r}{\sqrt{q}}; \tanh\alpha y = \tanh_q \alpha r \qquad (18)$$

Hubungan antara potensial deformasi dan potensial trigonometri yaitu:

$$\sin_q x = \frac{\left(e^{ix} - qe^{-ix}\right)}{2}; \cos_q x = \frac{\left(e^{ix} + qe^{-ix}\right)}{2} \qquad 19)$$

$$\cot_q x = \frac{\cos_q x}{\sin_q x}; \sec_q x = \frac{1}{\cos_q x}; \mathrm{cosec}_q x = \frac{1}{\sin_q x} \qquad 20)$$

$$\sin_q^2 x + \cos_q^2 x = q; 1 + \tan_q^2 x = q\sec_q^2 x \qquad 21)$$

Persamaan Schrodinger dalam Ruang D-dimensi

Persamaan Schrodinger satu dimensi dapat diekspansi ke dalam bentuk D-dimensi dengan cara yang identik dengan persamaan Scrodinger tiga dimensi (Awoga & Ikot 2012). Persamaan Scrodinger untuk D-dimensi adalah

$$-\frac{\hbar}{2m}\nabla_D^2\psi(r,\Omega) + V(r,\Omega)\psi(r,\Omega) = E\psi(r,\Omega) \qquad (22)$$

Dengan operator Laplacian

$$\nabla_D^2 = \frac{1}{r^{D-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{D-1}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\Lambda_D^2(\Omega_D)}{r^2} \qquad 23)$$

Dengan $\Lambda_D^2(\Omega_D)$ merupakan operator momentum sudut, yakni :

$$\Lambda_D^2(\Omega_D) = L_k^2 = \sum_{a<b=L}^{k-1} L_{ab}^2 = -\frac{1}{\sin^{k-1}\theta_k}\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{1}{\sin^{k-1}\theta_k}\frac{\partial}{\partial k}\right) + \frac{L_{k-1}^2}{\sin^2\theta_k}, 2 \le k \le D-1 \qquad 24)$$

Dan([14])

$$L_1^2 = -\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2} \qquad 25)$$

Melalui metode pemisahan variabel :

$$\psi_{nlm}(r,\Omega_D) - R_{nl}(r)Y_l^m(\Omega_D) \qquad 26)$$

Persamaan bagian sudut memenuhi persamaan nilai eigen :

$$\Lambda_D^2 Y_l^m(\Omega_D) = l(l+D-2)Y_l^m(\Omega_D) \qquad 27)$$

Potensial

Potensial Posch Teller Hiperbolik terdeformasi q (Suparmi 2011)

$$V = \frac{h^2}{2m}\frac{1}{\alpha^2}\left\{\frac{\kappa(\kappa-1)}{\sinh_q^2\frac{\alpha}{r}} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cosh_q^2\frac{\alpha}{r}}\right\} \qquad 28)$$

Potensial Rosen Morse Trigonometri terdeformasi q (Suparmi 2011)

$$V = \frac{h^2}{2mr^2}\left\{\frac{V(V-1)}{\sinh_q^2\theta} - 2\mu\cot_q\theta\right\} \qquad 29)$$

Potensial Posch Teller Hiperbolik plus Rosen Morse Trigonometri

$$V = \frac{h^2}{2m}\frac{1}{\alpha^2}\left\{\frac{\kappa(\kappa-1)}{\sinh_q^2\frac{\alpha}{r}} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cosh_q^2\frac{\alpha}{r}}\right\} + \frac{h^2}{2mr^2}\left\{\frac{V(V-1)}{\sinh_q^2\theta} - 2\mu\cot_q\theta\right\} \qquad (30)$$

Potensial Posch Teller Hiperbolik terdeformasi q plus Rosen Morse Trigonometri terdeformasi q pada D-dimensi

$$\frac{r^2}{r^{D-1}}\frac{1}{\psi(r)}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{r^2}{\alpha^2}\left\{\frac{\kappa(\kappa-1)}{\sinh_q^2\frac{\alpha}{r}} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cosh_q^2\frac{\alpha}{r}}\right\} - \varepsilon^2 r^2 = \qquad 31)$$

$$\Lambda_D^2(\Omega_D) + \left\{\frac{V(V-1)}{\sinh_q^2\theta} - 2\mu\cot_q\theta\right\} = \lambda^* \qquad 32)$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Persamaan Schrodinger bagian sudut untuk potensial Poschl Teller Hiperbolik Terdeformasi q plus Rosen Morse Trigonometri Terdeformasi q pada D-dimensi adalah :

$$\Lambda_D^2(\Omega_D)Y(\Omega_D) + \left\{\frac{v(v+1)}{\sin_q^2\theta} - 2\mu\cot_q\theta\right\}Y(\Omega_D) = \lambda^* Y(\Omega_D) \qquad (33)$$

Persamaan bagian azimuth

$$-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2}{d\theta_1^2}\Phi = L_k^{\,2} \qquad (34)$$

Solusi persamaan bagian azimuth

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi} \qquad (35)$$

Persamaan bagian sudut :

$$\frac{1}{\sin_q^{\,k-1}\theta_k}\frac{\partial}{\partial\theta_k}\left(\sin_q^{\,k-1}\theta_k\frac{\partial}{\partial\theta_k}H\right)-\frac{1}{\sin_q^{\,2}\theta_k}L_{k-1}^{\,2}H+L_k^{\,2}H-\left\{\frac{v(v+1)}{\sin_q^{\,2}\theta_k}-2\mu\cot_q\theta_k\right\}H=0 \qquad (36)$$

$$\frac{1}{H\sin_q^{\,k-1}\theta_k}\frac{\partial}{\partial\theta_k}\left(\sin_q^{\,k-1}\theta_k\frac{\partial}{\partial\theta_k}H\right)-\left(\frac{A_{k-1}}{\sin_q^{\,2}\theta_k}-A_k\right)-\left\{\frac{v(v+1)}{\sin_q^{\,2}\theta_k}-2\mu\cot_q\theta_k\right\}=0 \qquad (37)$$

Pada kondisi khusus (*D=3, k=2,* $A_2 = l(l+1)$, dan $A_1 = m^2$). Dengan memisalkan, didapatkan :

$$\bar{\tau} = -\left\{\left[\frac{k-1}{2}\frac{k-3}{2}+A_{k-1}+v(v-1)\right](q+s^2)-2\mu s-\left(\frac{k-1}{2}\right)^2-A_k\right\} \qquad (38)$$

$$\pi = \pm\sqrt{\left[\frac{k-1}{2}\frac{k-3}{2}+A_{k-1}+v(v-1)+k^*\right]s^2-2\mu s-\left(\frac{k-1}{2}\right)^2-A_k+\left\{\left[\frac{k-1}{2}\frac{k-3}{2}+A_{k-1}+v(v-1)\right]+k^*\right\}q} \qquad (39)$$

Dengan

$$p_{1,2}^{\;2} = \frac{\left[\left(\frac{k-1}{2}\right)^2+A_k\right]\pm\sqrt{\left[\left(\frac{k-1}{2}\right)^2+A_k\right]^2-4q\left(-\mu^2\right)}}{2q} \qquad (40)$$

Untuk faktor penganggu pertama, diperoleh bilangan kuantum orbital, yakni:

$$l = \sqrt{\left(\sqrt{m^2+v(v-1)}+n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{\mu^2}{\left(\sqrt{m^2+v(v-1)}+n+\frac{1}{2}\right)^2}}-\frac{1}{2} \qquad (41)$$

Dengan demikian, diperoleh eigenvalue untuk potensial Poschl Teller Hiperbolik Terdeformasi q plus Rosen Morse Trigonometri Terdeformasi q pada kondisi umum (D-Dimensi) sebagai berikut :

$$A_k = \left(\sqrt{\frac{k-1}{2}\frac{k-3}{2}+\frac{1}{4}+A_{k-1}+v(v-1)}+n+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\mu^2}{\left(\sqrt{\frac{k-1}{2}\frac{k-3}{2}+\frac{1}{4}+A_{k-1}+v(v-1)}+n+\frac{1}{2}\right)^2}-\left(\frac{k-1}{2}\right)^2 \qquad (42)$$

Fungsi gelombang bagian pertama diperoleh :

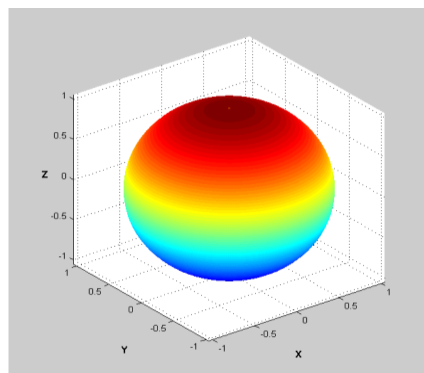
$$\phi = \left(q+s^2\right)^{-\frac{p}{2}} e^{\frac{q}{p}\frac{1}{\sqrt{q}}\arctan\frac{s}{\sqrt{q}}} \qquad (43)$$

Fungsi bobot diperoleh :

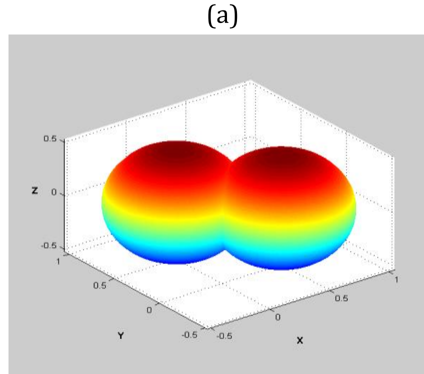
$$H(\cot\theta_k) = C_n\frac{\left(q+\cot^2\theta_k\right)^{\frac{p}{2}}}{\left(\sin\theta_k\right)^{\frac{k-1}{2}}}e^{-\frac{2q}{p}\frac{1}{\sqrt{q}}\arctan(\cot\theta_k)\frac{s}{\sqrt{q}}}$$

$$\frac{d^n}{d\cot\theta_k^{\,n}}\left\{\left(q+\cot^2\theta_k\right)^{n-p}e^{\frac{2q}{p}\frac{1}{\sqrt{q}}\arctan(\cot\theta_k)\frac{s}{\sqrt{q}}}\right\} \qquad (44)$$

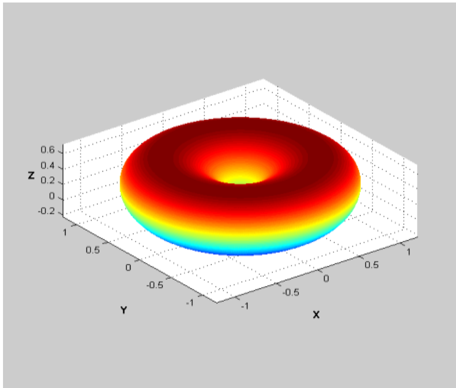
Visualisasi gambar fungsi gelombang Sudut untuk Potensial Poschl Teller Hiperbolik Terdeformasi q *plus* Rosen Morse Ttrigonometri Terdeformasi q pada D-dimensi dengan variasi faktor penganggu q=1dengan software Matlab 7.8. Gambar output dari Matlab 7.8 dapat dilihat pada Gambar 1.



(a)



(b)



(c)

Gambar 1. Tampilan output Matlab

SIMPULAN

Pada kondisi faktor penganggu bernilai nol, orbital elektron akan menjadi orbital pada *spherical harmonics* atau *hydrogen like* atom. Pada kondisi faktor penganggu mempunyai nilai maka pengaruh dari faktor penganggu-faktor penganggu ini membuat fungsi gelombang tertarik pada sumbu z dan mengalami pencerminan terhadap bidang x dan y sehingga fungsi gelombang tampak seperti dua buah balon yang berdekatan. Selain itu, pengaruh faktor penganggu juga menyebabkan fungsi gelombang memutar searah φ dengan sumbu putar di pusat koordinat sehingga fungsi gelombang tampak seperti donat.

DAFTAR PUSTAKA

[Awoga OA & Ikot AN.2012. Approximate solution of Schrodinger Equation in D dimensions for Inverted Generalized Hyperbolic Potential. *Pranama Journal of Physics* 79(3): 345-356

Akbarich AR & Motavali H. 2008. *Exact Solutions of the Klein-Gordon Equation for the Rosen-Morse type Potentials via Nikiforov-Uvarov Method*. Modern Physics Letters A 23, Issue 35: 3005-3013 (DOI: http://dx.doi.org/10.1142/S0217732308026686)

Cari & Suparmi. 2012. Approximate Solution of Schrodinger Equation for Trigonometric Scarf Potential with the Pöschl-Teller Non-central potential Using NU Method. *IOSR Journal of Applied Physics (IOSR-JAP)* 2 (3): 13-23 (ISSN: 2278-4861).

Chun-Sheng J, Yun S and Yun L. 2002. Complexifield Poschl-Teller II Potential Model. *Physics Letter A.* 305: 231-238

Dutra AdeS. 2008. *Mapping Deformed Hyperbolic Potentials into Nondeformed Ones*. UNESP- Campus de Guaratinguerta-DFQ, Brasil.

Greiner W. 2000. *Relativistic Quantum Mechanics, Wave Equation, Third edition*. Berlin: Springer.

Hammed RH. 2012. Approximate Solution of Scrodinger Equation With Manning-Rosen Potential in Two Dimensions by using the shifted 1/N expansion method. *Journal of Basrah Researches ((Sciences))* 38 (1), A(2012).

Hamzawi M & Rajabi AA. 2012. Exact solutions of the Dirac equation for the new ring-shaped non-central harmonic oscillator potential. *The European Physical Journal Plus* 2013. (DOI 10.1140/epjp/i2013-13029-9).

Ikhdair SM & Ramazan S. 2008. Solution of the D-dimensional Klein-Gordon equation with equal scalar and vector ring shaped pseudoharmonic potential. *Int. J. Mod. Phys. C* 19(09): 1425-1442 (doi: 10.1142/S0129183108012923)

Ikot AN & Akpabio LE. 2010. Approximate Solution of the Schrödinger Equation with Rosen-Morse Potential Including the Centrifugal Term. *Applied Physics Research* 2(2): 202-208.

Nikiforov AF & Uvarov VB.1988. *Special Function of Mathematical Physics*. Basel: Birkhauser.

Suparmi. 2011. *Mekanika Kuantum I*. Surakarta: Jurusan Fisika MIPA Universitas Sebelas Maret.

Suparmi. 2011. *Mekanika Kuantum II*. Surakarta: Jurusan Fisika MIPA Universitas Sebelas Maret

Xian-Quan HU, Guang LUO, Zhi-Min WU, Lian-Bin NIU & Ana-Yan MA. 2010. Solving Dirac Equation Alt New Ring-Shaped Non-Spherical Harmonic Oscillator Potential. *Journal of Communication Theoritical Physics* 53 (2): 242-246.