

## EKSISTENSI DAN KETUNG GALAN SOLUSI PERSAMAAN GELOMBANG AIRY MENGGUNAKAN PENDEKATAN SEMIGRUP $C_0$

M Kiftiah<sup>✉</sup> WB Partiw i, F Fran, B Prihandono

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Tanjungpura, Indonesia

### Info Artikel

*Sejarah Artikel:*  
Diterima Agustus 2016  
Disetujui September 2016  
Dipublikasikan Oktober 2016

*Keywords:*  
generator; semigroup; Airy equation

### Abstrak

Semigrup  $C_0$  merupakan salah satu metode yang digunakan untuk menunjukkan Masalah Nilai Awal (MNA) dari persamaan diferensial di Ruang Hilbert bersifat *well posed*. MNA dalam abstrak ini disebut Masalah Cauchy Abstrak. Semigrup pada Ruang Hilbert  $H$  merupakan keluarga operator linear  $\{T(t): t \geq 0\}$  pada Ruang Hilbert  $H$  yang tertutup terhadap komposisi dan memiliki elemen identitas. Lebih lanjut, jika semigrup mempunyai turunan kanan di  $t = 0$  maka turunannya disebut infinitesimal generator. Dalam hal ini, Teorema Lumer Philips memberikan ekivalensi antara infinitesimal generator dengan semigrup. Dalam hal tertentu semigrup dapat diperluas menjadi grup. Teorema Stone memberikan ekivalensi antara generator dengan grup. Secara teknis, Teorema Lumer Philips mengatakan MNA bersifat *well posed* jika dan hanya jika infinitesimal generatornya bersifat *m-dissipative*. Selanjutnya, pendekatan semigrup diaplikasikan pada persamaan Airy.

### Abstract

*Semigroup  $C_0$  is one method used to show the Initial Value Problems (MNA) of differential equations in Hilbert space is well posed. In this research, MNA called Abstract Cauchy Problems. Semigroup is a family of linear operators  $\{T(t): t \geq 0\}$  on Hilbert Space  $H$  which is closed under composition and has an identity element. Furthermore, if semigroup has a right derivative at  $t = 0$  then it is called infinitesimal generator. In this case, the Lumer Philips Theorem provides the equivalence between infinitesimal generator and semigroup. In certain cases, semigroup can be expanded into a group. Stone Theorem gives the equivalence between generator and group. Then Lumer Philips Theorem said the MNA is well posed if and only if the infinitesimal generator is *m-dissipative*. Furthermore, semigroup approach was applied to the Airy equation.*

© 2016 Universitas Negeri Semarang

<sup>✉</sup> Alamat korespondensi:  
Jl. Prof. Dr. H. Hadari Nawawi, Pontianak Tenggara, Bansir Laut,  
Pontianak Tenggara, Kota Pontianak, Kalimantan Barat 78124

ISSN 0215-9945

## PENDAHULUAN

Semigrup didefinisikan sebagai suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan suatu operasi biner yang memenuhi sifat asosiatif. Secara khusus, semigrup dapat didefinisikan sebagai suatu operator linear terbatas. Semigrup biasanya digambarkan dengan masalah nilai awal untuk persamaan diferensial biasa atau parsial. Di dalam penelitian ini digunakan salah satu jenis persamaan diferensial yang digunakan untuk membangun konsep semigrup, yaitu persamaan evolusi (Masalah Nilai Awal) yang didefinisikan dengan

$$\begin{aligned}u'(t) &= Au(t) \\ u(0) &= u_0\end{aligned}$$

dengan  $u_0$  adalah posisi awal untuk  $t = 0$ . Dari solusi persamaan evolusi dapat ditunjukkan bahwa setiap semigrup merupakan operator linear terbatas (Banasiak & Arlotti 2006). González-Gaxiola & Santiago (2012) telah meneliti aplikasi operator Black-Scholes sebagai pembangkit semigrup  $C_0$ . Dalam González-Gaxiola & Santiago (2012) dinyatakan bahwa operator differensial orde kedua  $\hat{A}u = ax^2D^2u + bxDu - bu, a, b \in R$  pada ruang Schwartz  $S_0(0, \infty)$  membangun suatu semigrup  $C_0$ .

Semigrup kontinu kuat (semigrup  $C_0$ ) merupakan generalisasi dari fungsi eksponensial yang memberikan solusi linear koefisien konstan persamaan diferensial biasa. Konsep dasar semigrup muncul dari asumsi dasar  $C_0$ , yaitu eksistensi dan ketunggalan solusi, fungsi kontinu untuk nilai awal dan linearisasi. Selanjutnya, pendekatan teori semigrup ini digunakan untuk menunjukkan eksistensi dan ketunggalan (*well-posed*) dari solusi Masalah Nilai Awal atau yang lebih dikenal dengan Masalah Cauchy Abstrak.

Persamaan gelombang *Airy* adalah Persamaan Diferensial Parsial Linear Orde 3 yang dalam matematika disebut persamaan dispersi. Secara fisis, dispersi merupakan gejala penguraian gelombang berdasarkan frekuensinya. Dispersi muncul pada suatu fenomena yang mempunyai 2 kerapatan yang berbeda, yang mengakibatkan pembiasan dan pembelokan arah. Di dalam persamaan dispersi

terdapat hubungan antara frekuensi dan kecepatan yang disebut relasi dispersi. Secara matematis, relasi dispersi merupakan dekomposisi gelombang berdasarkan frekuensinya. Semakin besar frekuensi yang dihasilkan semakin besar pula kecepatannya untuk merambat begitu pula sebaliknya. Walaupun terdapat dekomposisi antara frekuensinya, profil gelombang tetap stabil dan tidak menyebar yang diakibatkan adanya relasi dispersi didalamnya (Escauriaza *et al.* 2007).

Berdasarkan gagasan tersebut, penulis tertarik untuk menganalisis Masalah Cauchy Abstrak pada persamaan diferensial parsial linear, yaitu Persamaan Gelombang *Airy*. Lebih lanjut, penulis juga akan menunjukkan *well-posed* untuk Masalah Nilai Awal dan solusinya menggunakan pendekatan semigrup.

## METODE PENELITIAN

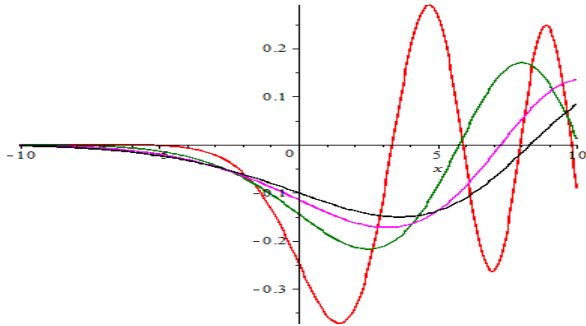
Metode yang digunakan adalah studi literatur dan pendekatan semigrup akan diaplikasikan pada persamaan *Airy*. Terlebih dahulu, dilakukan simulasi untuk melihat kestabilan grafik gelombang *Airy*. Selanjutnya menguraikan tentang infinitesimal generator, operator *m-dissipative* dan Masalah Cauchy Abstrak. Lebih lanjut, akan ditunjukkan hubungan antara infinitesimal generator dengan semigrup dan infinitesimal generator dengan grup. Pada akhir pembahasan ini diperoleh generator sebagai operator *m-dissipative* yang menunjukkan bahwa persamaan diferensial yang berkaitan dengan Masalah Cauchy Abstrak bersifat *well posed*. Selanjutnya, pendekatan semigrup diaplikasikan pada persamaan *Airy*.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Persamaan *Airy* merupakan gelombang berjalan yang dapat dituliskan sebagai

$$u_t = -u_{xxx}, \quad u(x, 0) = x_0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$$

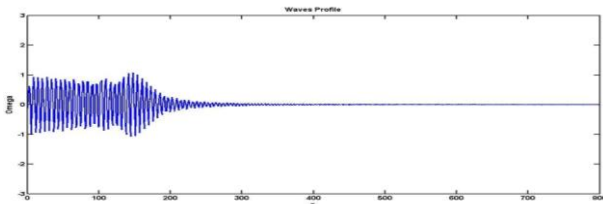
Gambar 1 merupakan simulasi untuk melihat kestabilan grafik gelombang *Airy* untuk data awal  $(x, 0) = \sin t$ .



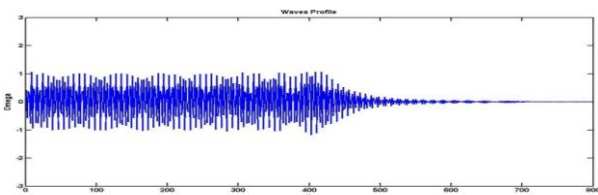
**Gambar 1.** Gelombang Berjalan Persamaan Airy

Simulasi tersebut dihasilkan dengan menggunakan program Maple pada selang waktu 15 detik. Pada Gambar 1 terlihat bahwa warna merah menandakan grafik  $t = 1$ , warna biru menggambarkan grafik  $t = 5$ , warna hijau menggambarkan grafik  $t = 10$  dan warna pink menggambarkan grafik  $t = 15$ . Berdasarkan gambar diatas dilihat untuk  $t$  yang semakin membesar gelombang semakin menyebar hingga mencapai titik kesetimbangan.

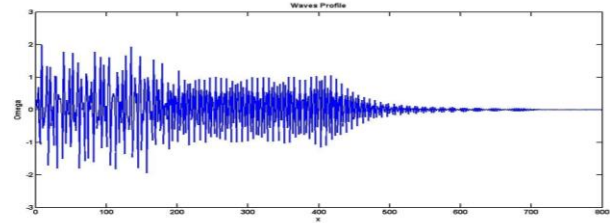
Gambar 2 sampai dengan Gambar 4 menggambarkan pengaruh relasi dispersi pada gelombang Airy menggunakan program Matlab. Gelombang Airy mempunyai relasi dispers  $\omega(k) = k^3$ .



**Gambar 2.** Relasi Dispersi dengan  $f(t) = \sin t$



**Gambar 3.** Relasi Dispersi dengan  $f(t) = \sin 5t$



**Gambar 4.** Relasi dispersi dengan  $f(t) = \sin t + \sin 5t$

Gambar 2 sampai dengan Gambar 4 merupakan simulasi untuk membandingkan perambatan gelombang dari signal  $f(t) = \sin t$  dan  $f(t) = \sin 5t$  untuk selang waktu 60 detik. Gambar 2 merupakan perambatan untuk signal  $f(t) = \sin t$  dan Gambar 3 merupakan perambatan untuk signal  $f(t) = \sin 5t$ . Dari Gambar 2 dan Gambar 3 dapat dilihat bahwa gelombang dengan signal  $f(t) = \sin 5t$  bergerak lebih cepat dibandingkan dengan signal  $f(t) = \sin t$ ; Sedangkan Gambar 4 merupakan superposisi dari gelombang dengan signal  $f(t) = \sin t + \sin 5t$ . Dapat dilihat bahwa gelombang dengan frekuensi yang lebih besar bergerak lebih cepat dibandingkan dengan frekuensi yang lebih kecil. Namun, dapat dilihat pula gelombang dengan frekuensi lebih besar bergerak meninggalkan gelombang dengan frekuensi lebih kecil. Sehingga, semakin besar frekuensi suatu gelombang maka semakin besar kecepatannya untuk merambat.

Selanjutnya akan digunakan pendekatan semigrup untuk melihat eksistensi dan ketunggalan solusi dari persamaan gelombang Airy.

Persamaan Airy dituliskan sebagai

$$u_t = -u_{xxx}, \quad u(x, 0) = x_0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Operator  $T(t)$  dengan pemetaan  $t \mapsto T(t)x_0$  merupakan semigrup  $C_0$ .

Persamaan (1) dapat dituliskan sebagai

$$u_t \in D(A), \quad u(x, 0) = x_0$$

Kontruksi Masalah Cauchy Abstrak pada  $H = L^2\mathbb{R}$ . Untuk setiap  $u \in D(A)$  maka

$$\begin{cases} Au = -u_{xxx} \\ D(A) = H^3(\mathbb{R}) \end{cases} \quad (2)$$

dengan  $A: D(A) \subseteq H \rightarrow H$  adalah generator infinitesimal semigrup  $C_0$  pada  $H$  dan  $H^3(\mathbb{R})$  merupakan kelas (semua) fungsi sehingga  $f', f'', f''' \in L^2(\mathbb{R})$ .

**Definisi 1 (Pazy, 1983)** Misalkan  $A$  operator tutup. Persamaan Cauchy Abstrak dikatakan well posed jika:

- $D(A)$  rapat di  $H$ .
- Untuk setiap  $x_0 \in D(A)$  terdapat solusi tunggal  $u = (\cdot, x_0)$ .
- Untuk setiap barisan  $(x_{0,n})_{n \in \mathbb{N}} \in D(A)$  dan  $x_0 \in D(A)$  yang memenuhi  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{0,n} = x_0$  berlaku  $\lim_{n \rightarrow \infty} u(\cdot, x_{0,n}) = u(\cdot, x_0)$  secara seragam untuk setiap  $t$  pada subhimpunan kompak  $\mathbb{R}_+$ .

**Teorema 1 (Tuscnak, 2004)** Misalkan  $A$  operator linear tutup. Masalah Cauchy Abstrak dikatakan well posed jika dan hanya jika operator  $A$  adalah infinitesimal generator dari semigrup  $C_0$ .

Untuk selanjutnya diasumsikan  $A$  merupakan operator tutup. Kondisi sehingga operator  $A$  merupakan infinitesimal generator dari semigrup  $C_0$  diberikan pada definisi dan teorema berikut.

**Definisi 2 (Hundertmark et al, 2013)** Operator linear  $A: D(A) \subseteq H \rightarrow H$  dikatakan disipatif jika untuk setiap  $u \in H$  berlaku  $Re\langle Au, u \rangle \leq 0$

**Teorema 2 (Vrabie, 2003)** Misalkan  $H$  Ruang Hilbert. Misalkan operator linear  $A: D(A) \subseteq H \rightarrow H$  rapat, maka operator linear  $A$  merupakan generator infinitesimal dari semigrup  $C_0$  kontraksi pada  $H$  jika dan hanya jika

- Operator  $A$  disipatif
- Terdapat  $\lambda > 0$  sedemikian sehingga  $\lambda I - A$  surjektif.

**Teorema 3 (Vrabie, 2003)** Misalkan operator  $\{G(t): t \in \mathbb{R}\}$  merupakan semigrup  $C_0$  isometri. Maka operator  $A$  merupakan infinitesimal generator dari operator uniter grup  $C_0$

Berdasarkan Masalah Cauchy Abstrak dari persamaan Airy, akan ditunjukkan operator  $A$  membangun semigrup  $\{T(t): t \geq 0\}$ .

Misalkan  $u \in D(A)$ , definisikan

$$u_{xxx}u = \frac{1}{2}(2u_{xx}u - (u_x)^2)_x$$

sehingga

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{xxx}u \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(2u_{xx}u - (u_x)^2)_x \, dx$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{2}(2u_{xx}u - (u_x)^2)_x \, dx \\ &\quad + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{2}(2u_{xx}u - (u_x)^2)_x \, dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}(2u_{xx}u - (u_x)^2)_a^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(2u_{xx}u - (u_x)^2)_0^b \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ini menunjukkan bahwa

$$\langle Au, u \rangle = 0 \tag{3}$$

untuk setiap  $u \in D(A)$ .

Persamaan (3) mengakibatkan

$$\langle Au, u \rangle \leq 0$$

sehingga operator  $A$  disipatif untuk setiap  $u \in D(A)$ . Selanjutnya, bentuk  $(\lambda I - A)u = f$  dan tanpa mengurangi keumuman pilih  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Untuk setiap  $u \in D(A)$  dan  $\lambda > 0$ , maka

$$\lambda u + u_{xxx} = f \tag{4}$$

Diperoleh solusi Persamaan (4) yaitu

$$\begin{aligned} y_p &= c_1 e^{\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{3}}x}} + c_2 e^{\left(\frac{1}{2}\lambda^{\frac{1}{3}} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda^{\frac{1}{3}}\right)x} + c_3 e^{\left(\frac{1}{2}\lambda^{\frac{1}{3}} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda^{\frac{1}{3}}\right)x} \\ &\quad + A_1(x)e^{\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{3}}x}} + A_2(x)e^{\left(\frac{1}{2}\lambda^{\frac{1}{3}} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda^{\frac{1}{3}}\right)x} + \\ &\quad A_3(x)e^{\left(\frac{1}{2}\lambda^{\frac{1}{3}} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda^{\frac{1}{3}}\right)x} \end{aligned}$$

Akibatnya,  $R(\lambda I - A) = H$  dan operator  $A$   $m$ -disipatif. Jadi, operator  $A$  membangun semigrup  $\{T(t): t \geq 0\}$ .

**Teorema 4 (Vrabie, 2003)** Misalkan  $H$  Ruang Hilbert. Operator  $A: D(A) \subseteq H \rightarrow H$  merupakan generator infinitesimal dari operator uniter grup  $C_0$  pada  $H$  jika dan hanya jika  $iA$  self adjoint ( $A$  skew adjoint).

Selanjutnya akan ditunjukkan  $A^*$  membangun semigrup  $\{T^{-1}(x): t < 0\}$ .

Akan ditunjukkan  $iA$  self adjoint. Misalkan  $u, v \in D(A)$

$$\begin{aligned} \langle iAu, u \rangle &= -i \int_{\mathbb{R}} \partial^3 u \cdot v \, dx = \frac{1}{2} i \int_{\mathbb{R}} \partial^2 u \cdot \partial v \, dx \\ &= -\frac{1}{2} i \int_{\mathbb{R}} \partial u \cdot \partial^2 v \, dx = i \int_{\mathbb{R}} \partial^3 v \cdot u \, dx \\ &= -i \langle u, Av \rangle \end{aligned} \tag{5}$$

Berdasarkan Persamaan (4) diperoleh

$$A^* = -A.$$

Akan ditunjukkan operator  $A^*$  disipatif. Karena  $A^* = -A$  dan Persamaan (5) akibatnya  $\langle -Au, u \rangle \leq 0$ . Maka operator  $A^*$  disipatif untuk setiap  $u \in D(A)$

Karena  $A^* = -A$  dan berdasarkan Teorema (3), generator infinitesimal  $A^*$  membangun semigrup  $\{T^{-1}(x): t < 0\}$ . Akibatnya, operator  $B = \begin{cases} A & t \geq 0 \\ -A, & t < 0 \end{cases}$  membangun grup  $\{G(t): t \in \mathbb{R}\}$ .

Jadi, Berdasarkan Teorema (2), Persamaan (1) bersifat *well posed* untuk  $t \in \mathbb{R}$ .

## PENUTUP

Menggunakan pendekatan teori semigrup dapat ditentukan eksistensi dan ketunggalan solusi persamaan diferensial parsial linear. Hal yang dilakukan yaitu mengkontruksi Ruang Hilbert  $H$  yang memungkinkan operator *Airy* dapat berkerja. Selanjutnya, menentukan masalah Cauchy Abstrak untuk persamaan gelombang *Airy*, yaitu

$$u'(t) = -\partial^3 u$$

dengan  $A = -\partial^3$  merupakan operator  $m$ -disipatif. Masalah Nilai Awal diatas bersifat *well posed* untuk  $t \in \mathbb{R}$ .

## DAFTAR PUSTAKA

- Banasiak J & Arlotti L. 2006. *Perturbation of Positive Semigroups with Applications*. Springer. New York.
- Escauriaza L, Kenig CE, Ponce G & Vega L. 2007. On Uniqueness Properties of Solutions of The K-Generalized KDV Equations. *Journal of Functional Analysis* 244. 504-535. doi:10.1016/j.jfa.2006.11.004
- González-Gaxiola O & Santiago JA. 2012. The Black Scholes Operator as The Generator of  $C_0$  - Semigroup And Application. *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 76(2). 191-200.
- Hundertmark D, Meyries M, Machinek L, & Schubelt R. 2013. Operator Semigroup and Dispersive Equations. *16th Internet Seminar on Evolution Equations*. Karlsruhe. Germany..
- Pazy A. 1983. *Semigroup of Linear Operator and Applications to Partial Differential Equations*. Springer. New York.
- Tuscnak M. 2004. *Wellposedness, Controllability and Stabilizability of System Governes by Partial Differential Equations*. Verlag. Berlin.
- Vrabie II. 2003.  *$C_0$  Semigroup and Applications*. Elsevier. Amsterdam.