Jurnal MIPA 40 (1) (2017): 56-62

Jurnal MIPA

http://journal.unnes.ac.id/nju/index.php/JM

Aplikasi Kendali LQR Diskrit untuk Sistem Pergudangan Barang Susut dengan Peninjauan Berkala pada Radioisotop Fosfor-32

DA Munawwaroh ✉

Departemen Matematika, FSM, Universitas Diponegoro, Indonesia

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima 11 Januari 2017
Disetujui 23 Maret 2017
Dipublikasikan 1 April 2017

Keywords:
lqr control; inventory system; perishable goods; periodic review policy; radioisotope phosphorous-32.

Abstrak

Pada penelitian ini dibahas mengenai pengendalian sistem pergudangan untuk barang yang mengalami penyusutan. Teknik kendali yang digunakan adalah kendali regulator linier kuadratik dengan waktu diskrit. Kendali regulator linier kuadratik merupakan kendali optimal dengan fungsi objektif berbentuk kuadratik dan memiliki kendala berbentuk linier. Teknik kendali tersebut bertujuan untuk mengoptimalkan pemesanan kepada pemasok tunggal, karena diasumsikan tidak terjadi kekurangan barang, meskipun terdapat waktu tundaan dalam proses pengiriman barang. Sistem pergudangan yang telah diberikan kendali LQR diaplikasikan untuk mengoptimalkan pemesanan radioisotop fosfor-32 yang memiliki waktu paruh 14,26 hari. Salah satu kegunaan dari radioisotop fosfor-32 adalah untuk mengetahui pola penyebaran pupuk dan efektifitas pupuk pada bidang pertanian.

Abstract

This research discusses about inventory control with periodic review policy for perishable goods. Optimal control linear quadratic regulator in discrete time is used in this research. This optimal control has quadratic equation for objective function and linear equation for the constraint. This control can be used to optimize ordering to single supplier, because lost sales and back order are not permitted, although has a lead time. This LQR control for inventory systems will applied to optimize ordering radioisotope phosphorous-32 which has a half-life 14,26 days. One of the uses of radioisotopes phosphorus-32 is to determine the pattern of spread of fertilizer and effectiveness of fertilizers in agriculture.

✉ Alamat korespondensi:
E-mail: dita.anies.m@gmail.com

ISSN 0215-9945

PENDAHULUAN

Bahan radioaktif terdiri dari atom atom yang tidak stabil. Agar atom tidak stabil menjadi stabil, maka atom-atom tersebut melepaskan kelebihan energi yang disebut radiasi, melalui proses yang disebut peluruhan radioaktif. Radioisotop adalah isotop suatu unsur radioaktif yang memancarkan sinar radioaktif. Pada (Rahman *et al* 2012) disebutkan bahwa radioisotop fosfor-32 memiliki waktu paruh 14,26 hari. Radioisotop fosfor-32 memiliki manfaat pada bidang pertanian dan bidang kesehatan. Pada bidang pertanian radioisotop fosfor-32 dapat digunakan untuk perunut gerakan pupuk disekitar tanaman setelah ditabur. Gerakan pupuk jenis fosfat, dari tanah sampai ke dalam tumbuhan dapat ditelusuri dengan mencampurkan radioisotop tersebut ke dalam senyawa fosfat dalam pupuk. Hal tersebut dapat digunakan untuk mengetahui pola penyebaran pupuk dan efektifitas pemupukan.

Waktu paro *(half life)* adalah waktu yang diperlukan oleh inti radioaktif untuk meluruh hingga aktifitasnya menjadi setengah aktifitas mula-mula. Padahal dalam proses pemesanan hingga barang sampai ditempat tentu membutuhkan waktu tundaan. Oleh karena itu, jika suatu distributor yang ingin menyediakan radioistop fosfor-32 untuk memenuhi kebutuhan konsumen, maka diperlukan perhitungan untuk mengoptimalkan persediaan radioisotop fosfor-32.

Pada bidang kontrol terdapat penelitian berkesinambungan yang berasal dari (Ignaciuk & Bartoszewicz 2008a) dan (Ignaciuk & Bartoszewicz 2008b) yang membahas mengenai strategi kontrol linier kuadratik. Lebih khusus yang diaplikasikan pada sistem pergurdangan barang yaitu (Ignaciuk & Bartoszewicz 2010) membahas strategi kontrol linier kuadratik untuk sistem pergudangan dengan waktu tundaan, tetapi dengan asumsi bahwa barang tidak mengalami penyusutan. Kemudian, (Ignaciuk & Bartoszewicz 2012) melanjutkan penelitian mengenai strategi kontrol linier kuadratik untuk sistem pergudangan dengan waktu tundaan dengan asumsi bahwa barang mengalami penyusutan sebesar σ.

Selanjutnya, (Munawwaroh & Salmah 2014) melakukan penelitian dengan menyelesaikan masalah sistem pergudangan tanpa penyusutan barang dengan menggunakan kontrol regulator linier kuadratik. Lalu, berawal dari ide yang disampaikan (Ignaciuk & Bartoszewicz 2011), maka (Munawwaroh & Sutrisno 2014) mengaplikasikan sistem pergudangan dengan strategi kontrol regulator linier kuadratik pada transmisi jaringan tunggal.

Proses penyelesaian dengan menggunakan teknik kendali regulator linier kuadratik digunakan teori pendukung dari (Olsder 1994), (Ogata 1995) dan (Ogata 2010). Sedangkan untuk penyelesaian secara aljabar matriks digunakan teori pendukung dari (Mital 1976). Penulis telah mengaplikasikan sistem pergudangan dengan asumsi barang mengalami penyusutan dan terdapat waktu tundaan yang diberikan kontrol regulator linier kuadratik diskrit pada persediaan radioaktif I-131 yang telah dimanfaatkan untuk bidang kesehatan (Munawwaroh 2016). Selanjutnya, dalam penelitian ini penulis akan mengaplikasikan kendali tersebut pada radioisotop fosfor-32 yang telah dimanfaatkan pada bidang pertanian.

METODE

Pada penelitian ini, penulis menggunakan studi literatur yang berasal dari strategi kontrol linier kuadratik yang telah dilakukan penelitian oleh Ignaciuk & Bartoszewicz (2010) dan Ignaciuk & Bartoszewicz (2010) diaplikasikan pada sistem pergudangan dengan penambahan asumsi barang susut. Penulis telah mengembangkan strategi kontrol yang berbeda yaitu kontrol regulator linier kuadratik pada Munawwaroh & Salmah (2014) selanjutnya diaplikasikan dalam bidang komunikasi yaitu sistem jaringan tunggal pada Munawwaroh & Sutrisno (2014). Kemudian, penulis menggunakan penelitian dari Rahman *et al* (2012) untuk mengembangkan aplikasi yang telah digunakan pada Munawwaroh (2016).

Oleh karena itu, dalam penelitian ini penulis akan melakukan aplikasi dari sistem pergudangan dengan asumsi barang susut, terdapat waktu tundaan, berbentuk diskrit, pada salah satu jenis barang susut yaitu radioisotop fosfor-32. Penulis menyajikan hasil simulasi numerik dari program MATLAB 7.6.0 (R2008a) yang diaplikasikan pada sistem pergudangan untuk radioisotop fosfor-32 berupa grafik.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini, terdapat asumsi yang harus dipenuhi yaitu jumlah permintaan bergantung waktu dan terbatas, sumber barang berasal dari pemasok tunggal, permintaan selalu terpenuhi, tidak diijinkan *backorder*, serta tidak diijinkan *lost sales*, jumlah barang yang tersedia tidak boleh melebihi kapasitas gudang, dan dibutuhkan waktu tundaan *(lead time)* hingga barang sampai ditangan. Diasumsikan bahwa barang mengalami penyusutan, sampai digudang dalam kondisi 100 %, tetapi mengalami penyusutan selama proses penyimpanan.

Pemodelan Matematika

Dalam memodelkan sistem pergudangan akan diberikan variabel-variabel yang berpengaruh dalam sistem, yaitu T adalah periode peninjauan gudang, kT adalah periode sampling, dengan nilai $k = 0,1,2,3,\dots,L_p$ adalah waktu tundaan, dengan $L_p = n_p \times T$, n_p adalah suatu interger positif, $u(k)$ adalah jumlah pesanan barang untuk mengisi gudang pada saat kT, $d(kT)$ adalah jumlah permintaan barang pada saat kT, $y(kT)$ adalah jumlah barang yang ada digudang pada saat awal waktu kT, y_d adalah kapasitas maksimal barang dalam gudang, d_{max} adalah jumlah permintaan barang maksimum, $h(kT)$ adalah jumlah barang yang telah dikirim pada saat kT, $\mathbf{x}(kT)$ adalah jumlah barang saat kT, dan terdapat faktor penyusutan σ , dengan $0 \le \sigma < 1$..

Selanjutnya, harus terpenuhi persamaan berikut.

$$0 \le h(kT) \le d(kT) \le d_{max} \quad (1)$$

Diberikan persamaan agar stock barang seimbang yaitu

$$y[(k+1)T] = \rho y(kT) + u_R(kT) - h(kT), \quad (2)$$

dengan $u_r(kT)$ adalah jumlah pemesanaan yang diterima pada saat kT, dan $\rho = 1 - \alpha$, dengan $0 \le \rho \le 1$.

Pemesanan pertama dilakukan pada waktu $kT = 0$, maka $y(kT) = 0$ untuk $k \le n_p$. Dikarenakan kondisi awal tersebut dan $u_R = u\left[\left(k - n_p\right)T\right]$ untuk $k \ge 0$, sehingga

$$\begin{aligned} y(kT) &= \sum_{j=0}^{k-1} \rho^{k-1-j} u_R(jT) - \sum_{j=0}^{k-1} \rho^{k-1-j} h(kT) \\ &= \sum_{j=0}^{k-n_p-1} \rho^{k-n_p-1-j} u(jT) - \sum_{j=0}^{k-1} \rho^{k-1-j} h(kT). \end{aligned}$$

Representasi Ruang Keadaan *(State-Space)*

Didefinisikan

$$\mathbf{x}(kT) = \begin{bmatrix} x_1(kT) & x_2(kT) & \dots & x_n(kT) \end{bmatrix} \quad (3)$$

adalah vektor state dengan $x_1(kT)$ menyatakan jumlah barang yang sudah berada didalam gudang pada saat kT, sedangkan $x_i(kT)$ menyatakan jumlah barang yang dipesan pada saat $k - n + i - 1$, dengan $n = n_p + 1$. Dibentuk persamaan Ruang Keadaan dan Persamaan Keluaran dalam sistem diskrit LTI, sebagai berikut.

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}\left[(k+1)k\right] = \mathbf{Gx}(kT) + \mathbf{H}u(kT) + \mathbf{v}h(kT), \\ &y(kT) = \mathbf{C}^T \mathbf{x}(kT), \end{aligned} \quad (4)$$

Dengan $\mathbf{G}$ adalah matriks keadaan dengan ukuran $n \times n$, dan $\mathbf{H}, \mathbf{v}, \mathbf{C}$ adalah vektor, berukuran $n \times 1$. Bentuk vektor matriks tersebut adalah :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Tujuan dari masalah optimal linier kuadratik adalah menentukan aturan kendali yang membawa state awal $\mathbf{x_0} = 0$ menuju ke $\mathbf{x}(kT) = \mathbf{x_d}$ tak nol, dengan $k = \infty$. Dibentuk indeks performansi yang bersesuaian dengan persamaan ruang keadaan dan persaman keluaran tersebut adalah

$$J(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ u^2(kT) + w\left[y_d - y(kT)\right]^2 \right\}. \quad (6)$$

Indeks performansi yang digunakan untuk Persamaan (6) adalah indeks performansi yang berbentuk fungsi biaya. Fungsi biaya yang dimaksudkan disini adalah biaya yang timbul akibat biaya setup setiap kali pesan dan biaya penyimpanan . Sedangkan,adanya konstanta positif w sebagai konstanta pembobotan yang menghubungkan pengaruh biaya penyimpanan terhadap biaya setup.

Selanjutnya, digunakan Kendali Regulator Linier Kuadratik–Steady State yang bertujuan menentukan aturan kendali yang membawa state awal taknol menuju ke suatu state nol. Akan didefinisikan variable baru sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(kT) &= \mathbf{x}(kT) - \mathbf{x}_{ss} = \mathbf{x}(kT) - \mathbf{x}_d; \\ \tilde{y}(kT) &= y(kT) - y_{ss} = y(kT) - y_d; \\ \tilde{u}(kT) &= u(kT) - u_{ss} = u(kT) - (1-\rho)\mathrm{y}_d, \end{aligned} \tag{7}$$

dengan

$$\mathbf{x}_d = \begin{bmatrix} x_{d1} \\ x_{d2} \\ \vdots \\ x_{dn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sigma \\ \vdots \\ \sigma \end{bmatrix} y_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-\rho \\ \vdots \\ 1-\rho \end{bmatrix} y_d \tag{8}$$

Diperoleh persamaan ruang keadaan dan persamaan keluaran dengan menggunakan variable baru yang didefinisikan pada Persamaan (7), sebagai berikut :

$$\tilde{\mathbf{x}}\left[(k+1)k\right] = \mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}(kT) + \mathbf{H}\tilde{u}(kT) + \mathbf{v}h(kT), \tag{9}$$

$$\tilde{y}(kT) = \mathbf{C}^T\tilde{\mathbf{x}}(kT), \tag{10}$$

dengan **G**, **H, v** dan **C** sesuai pada Persamaan (5).

Selanjutnya, dapat digunakan bentuk penyelesaian masalah pada Regulator Linier Kuadratik untuk mencari $\tilde{u}(kT)$ yang meminimalkan indeks perfromansi baru, yaitu:

$$\begin{aligned} J(\tilde{u}) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}[\tilde{\mathbf{x}}^T(kT)\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{x}}(kT) \\ + \tilde{u}^T(kT)\mathbf{R}\tilde{u}(kT)] \end{aligned} \tag{11}$$

Penyelesaian Masalah Regulator Linier Kuadratik – Steady State

Misal diberikan kendali umpan balik adalah

$$\tilde{u}(kT) = -\mathbf{K}(kT)\tilde{\mathbf{x}}(kT), \tag{12}$$

dengan $\mathbf{K}(kT)$ adalah matriks umpan balik. Persamaan Riccati digunakan untuk mendapatkan vektor kendali optimal $\tilde{u}(kT)$. Di asumsikan bahwa

$$\lambda(kT) = \mathbf{P}(kT)\tilde{\mathbf{x}}(kT), \tag{13}$$

dengan **P** adalah matriks simetris, dengan kata lain, $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$, dan $\mathbf{P} \geq 0$. Selanjutnyam dilakukan proses operasi matriks hingga diperoleh matriks **P** dan **K** adalah

$$\mathbf{P} = \mathbf{G}^T\mathbf{P}\left[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{H}^T\mathbf{P}\right]^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{Q}. \tag{14}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^T\mathbf{P}\left[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{H}^T\mathbf{P}\right]^{-1}\mathbf{G}. \tag{15}$$

Untuk mencari matriks **P** akan digunakan iterasi matriks, yang bertujuan agar setiap elemen pada matriks **P** dapat dinyatakan dalam tiga variabel yaitu p_{11}, ρ , dan w. Suatu matriks simetris **P** berbentuk

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}, \tag{16}$$

Iterasi diteruskan hingga seluruh elemen terganti, sehingga diperoleh pola pada matriks **P** adalah sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} p_{11} & \dfrac{p_{11}-w}{\rho} & \dfrac{p_{11}-w\sum_{j=0}^{1}\rho^{2j}}{\rho^2} & \cdots & \dfrac{p_{11}-w\sum_{j=0}^{n-2}\rho^{2j}}{\rho^{n-1}} \\ p_{12} & \dfrac{p_{11}-w\sum_{j=0}^{1}\rho^{2j}}{\rho^2} & \dfrac{p_{11}-w\sum_{j=0}^{1}\rho^{2j}}{\rho^3} & \cdots & \dfrac{p_{11}-w\sum_{j=0}^{n-2}\rho^{2j}}{\rho^{n}} \\ p_{13} & p_{23} & \dfrac{p_{11}-w\sum_{j=0}^{1}\rho^{2j}}{\rho^4} & \cdots & \dfrac{p_{11}-w\sum_{j=0}^{n-2}\rho^{2j}}{\rho^{n+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ p_{1n} & p_{2n} & p_{3n} & \cdots & \dfrac{p_{11}-w\sum_{j=0}^{n-2}\rho^{2j}}{\rho^{2(n-1)}} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

dengan

$$p_{11} = \frac{-\rho^{4n-2}}{\left(p_{11} - w\sum_{i=0}^{n-2}\rho^{2i} + \rho^{2(n-1)}\right)} - w\sum_{i=0}^{n-2}\rho^{2i} + \rho^{2n}. \tag{18}$$

Persamaan (18) mempunyai akar,

$$p_{11}^{\pm} = \frac{1}{2}\rho^{2(n-1)}\left[\rho^2 + w - 1 \pm \sqrt{w^2 + 2w\left(\rho^2+1\right) + \left(\rho^2-1\right)^2}\right]$$

$$+ w\sum_{j=0}^{n-2}\rho^{2j}. \tag{19}$$

Selanjutnya, diperoleh matriks **K** yaitu

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \rho^n & \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \ldots & \rho \end{bmatrix}\gamma. \tag{20}$$

dengan,

$$\gamma = \frac{\left[\sqrt{w^2 + 2w\left(\rho^2+1\right) + \left(\rho^2-1\right)^2} - w + \rho^2 - 1\right]}{2\rho^2}, \tag{21}$$

dihasilkan

$$\tilde{u}(kT) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k) = -\gamma\sum_{j=1}^{n}\rho^{n-j+1}\tilde{x}(k). \quad (22)$$

Digunakan persamaan (7) dan (8), untuk memperoleh

$$u(k) = -\gamma\sum_{j=1}^{n}\rho^{n-j+1}x_j(k) - r, \quad (23)$$

Dengan $r = (1-\rho+\gamma\rho)y_d$. Dari persamaan (5) diperoleh variabel keadaan $x_j(j = 2,\dots,n)$ yang merupakan kontroler pada $n-1$ sehingga nilai $x_j = u(k-n+j-1)$. Selanjutnya, dikarenakan $x_1(k) = y(k)$ dan $n = n_p + 1$, maka didapatkan hasil kontrol optimal dengan menggunakan *LQR* diskrit adalah

$$u(k) = r - \gamma\rho^{n_p+1}y(k) - \gamma\sum_{j=k-n_p}^{k-1}\rho^{k-j}u(j). \quad (24)$$

Analisis Kestabilan

Kestabilan sistem diskrit LTI dapat dianalisis dengan melihat nilai eigen dari sistem tersebut. Selanjutnya, akan dicari nilai eigen yang bersesuaian dengan matriks **G-HK**, yaitu $z = \mu_1, z = \mu_2, \dots, z = \mu_{n-1}$, $z = \mu_n$ yang berasal dari persamaan karakteristik

$$\left|z\mathbf{I} - (\mathbf{G} - \mathbf{HK})\right| = 0, \quad (25)$$

dengan **I** adalah matriks Identitas. Suatu sistem diskrit dikatakan stabil jika modulus dari nilai eigen kurang dari satu. Sehingga sistem (1) akan stabil, jika memiliki

$$|\mu_n| < 1 \Leftrightarrow 0 < \rho(1-\gamma) < 2. \quad (26)$$

Diperhatikan bahwa $0 < \rho \le 1$ dan dari persamaan (21) akan diperoleh juga bahwa untuk sebarang nilai w akan berakibat $0 < \gamma < 1$. Oleh karena itu, dapat dipastikan bahwa sistem pada persamaan (4) akan selalu stabil asimtotik.

Sifat-sifat dari Sistem Pergudangan Barang Susut dengan Pemasok Tunggal

Berikut ini akan dijelaskan sifat-sifat dari model sistem pergudangan barang susut dengan kebijakan peninjauan berkala yang mengambil pasokan barang dari pemasok tunggal. Teorema pertama mendefiniskan bahwa jumlah barang yang dipesan akan selalu non-negative dan terbatas.

Teorema 1. (Ignaciuk & Bartoszewicz 2012)

Jika jumlah pemesanan pada persamaan (24) diaplikasikan pada persamaan (4), (5), dan (8), maka jumlah pemesanan akan selalu terbatas serta untuk setiap $k \ge 0$ pemesanan akan memenuhi pertidaksamaan berikut.

$$u_{\min} \le u(k) \le \max\{r, u_{\max}\}, \quad (25)$$

dengan

$$u_{\min} = \frac{r(1-\rho)}{1-\rho+\gamma\rho}, \text{ dan}$$

$$u_{\max} = \frac{r(1-\rho)+\gamma\rho^n d_{\max}}{1-\rho+\gamma\rho} \quad (26)$$

Selanjutnya, teorema kedua menjamin bahwa jumlah barang yang ada digudang tiak akan melebihi kapasitas gudang.

Teorema 2. (Ignaciuk & Bartoszewicz 2012)

Jika persamaan (24) diaplikasikan pada persamaan (4), (5) dan (8), maka jumlah barang yang berada digudang akan memenuhi

$$\underset{k\ge 0}{\forall}\, y(k) \le y_d\ . \quad (27)$$

Terakhir, teorema ketiga akan menjamin bahwa stok barang yang berada digudang selalu dapat memenuhi seluruh permintaan.

Teorema 3. (Ignaciuk dan Bartoszewicz, 2012)

Jika Persamaan (24) diaplikasikan pada persamaan (4), (5) dan (8), serta kapasitas maksimal gudang akan memenuhi

$$y_d > \frac{d_{\max}}{1-\rho+\gamma\rho}\left(\gamma\sum_{j=1}^{n_p}\rho^j + 1\right), \quad (28)$$

maka jumlah barang yang ada digudang untuk setiap $k \ge n_p + 1$ akan selalu positif tegas *(strictly positive)*.

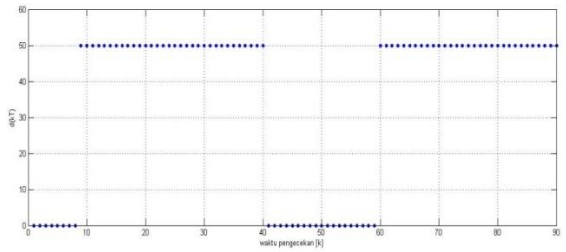
Simulasi Numerik

Sistem pergudangan yang berupa sistem diskrit LTI pada persamaan (4), (5) dan (8) dengan kendali LQR diskrit pada persamaan (24) akan diaplikasikan dalam sistem pergudangan untuk persediaan radioisotop fosfor-32. Telah diketahui bahwa waktu paruh adalah waktu yang dibutuhkan untuk suatu radioaktif menyusut hingga mencapai 0.5 massanya. Pada radioisotop fosfor-32 memiliki waktu paruh yaitu 14,26 hari, peninjauan persedian adalah 1 hari dan waktu yang dibutuhkan barang sampai adalah 8 hari. Model pada sistem pergudangan ini memiliki asumsi bahwa barang sampai digudang dalam keadaan 100%, dan penyusutan terjadi selama proses penyimpanan. Diperhatikan persamaan waktu paro berikut.

$$N_T = N_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{T}{t_{1/2}}}, \tag{29}$$

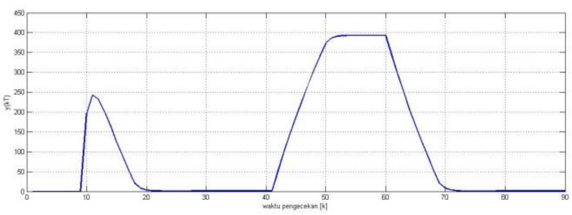
dengan N_T adalah jumlah barang pada waktu T, N_0 adalah jumlah barang pada waktu awal, T adalah periode peninjauan gudang, dan $t_{\frac{1}{2}}$ adalah waktu paruh. Selanjutnya didapatkan $\sigma = 0.047$ dan $\rho = 1 - \sigma = 1 - 0.047 = 0.953$.

Perusahaan memilki kapasitas gudang maksimum (y_d) adalah 395 satuan massa barang dan bisa melayani permintaan konsumen sejumlah 50 satuan massa barang per hari. Jumlah barang yang dipesan pemasok diawal waktu adalah 247.55 satuan massa barang. Perusahaan sudah memiliki permintaan konsumen selama 90 hari kedepan, disajikan dalam Gambar 1.



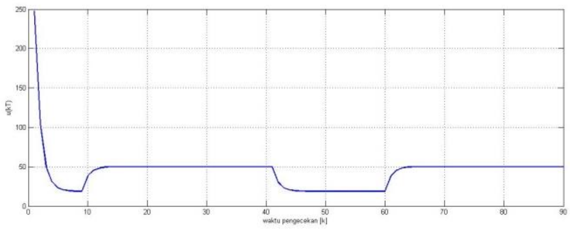
Gambar 1. Grafik jumlah permintaan konsumen $d(kT)$ selama waktu pengecekan k

Hasil simulasi numerik dengan menggunakan program MATLAB 7.6.0 (R2008a) diperoleh Gambar 2.



Gambar 2. Grafik jumlah barang yang tersedia digudang $y(kT)$ selama waktu pengecekan k

Pada Gambar 2. dapat dilihat bahwa gudang dalam keadaan kosong pada awal masa tunggu 8 hari, kemudian jumlah barang yang berada digudang akan mengalami peningkatan dan penurunan sesuai dengan permintaan konsumen. Namun, dapat dilihat bahwa jumlah barang yang berada didalam gudang tiak akan melebihi kapasitas maksimal gudang (y_d). Selanjutnya, akan disajikan jumlah barang yang harus dipesan kepada pemasok tunggal selama 90 hari.



Gambar 3. Grafik jumlah barang yang dipesan $u(kT)$ selama waktu pengecekan k

Pada Gambar 3. Dapat dilihat terdapat peningkatan dan penurunan jumlah pemesanan, hal tersebut sesuai dengan fluktuasi permintaan.

SIMPULAN

Sistem pergudangan yang telah diberikan kontroler dapat mengoptimalkan perencanaan jumlah barang yang dipesan, sehingga pemintaan konsumen akan selalu terpenuhi dan kapasitas gudang dapat dimaksimalkan. Penambahan asumsi barang mengalami penyusutan pada model juga tetap dapat mendapatkan jumlah pemesanan optimal, terutama bila diaplikasikan pada radioisotop fosfor-32 yang mengalami penusutan sebesar $\sigma = 0.047$. Model ini dapat menjamin bahwa permintaan konsumen terhadap radioisotop fosfor-32 akan tetap terpenuhi.

Pada model penelitian ini perlu dikembangkan untuk sistem pergudangan barang susut dengan menambahkan penyusutan terjadi saat proses waktu tundaan dan juga selama proses penyimpanan radioisotop fosfor-32.

DAFTAR PUSTAKA

Ignaciuk P & Bartoszewicz A. 2008a. Linear Quadratic Optimal Discrete-Time Sliding-Mode Controller for Connection-Oriented Communication Networks. *IEEE Transactions on Industrial Electronic.* **55**(11): 4013 – 4021 DOI: 10.1109/TIE.2008.921464

Ignaciuk P & Bartoszewicz A. 2008b. Linear Quadratic Optimal Sliding Mode Congestion Control in Multi-Source Connection-Oriented Data Transmission Network. *IEEE 10th International*

Workshop on Variable Structure Systems, VSS'08.: 67 - 72. DOI: 10.1109/VSS.2008.4570684.

Ignaciuk P & Bartoszewicz A. 2010. Linear-Quadratic Optimal Control Strategy for Periodic-Review Inventory Systems. *Automatica* 46(12): 1982-1993. DOI: 10.1016/j.automatica.2010.09.010

Ignaciuk P & Bartoszewicz A. 2011. LQ Optimal Sliding-Mode Supply Policy for Periodic-Review Perishable Inventory Systems. *Journal of The Franklin Institute* 349(4): 1561-1582. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2011.04.003

Ignaciuk P & Bartoszewicz A. 2012. Linear-Quadratic Optimal Control of Periodic-Review Perishable Inventory Systems. *IEEE Transaction on Control Systems Technology* 20(5): 1400-1407. DOI: 10.1109/TCST.2011.2161086

Mital KV. 1976. *Optimization Methods in Operations Research and Systems Analysis*. New Delhi: Wiley Eastern Limited

Munawwaroh DA & Sutrisno. 2014. Kendali LQR Diskrit untuk Sistem Transmisi Data dengan Sistem Jaringan Tunggal. *Jurnal Matematika* **17**(3): 104 - 110

Munawwaroh DA. 2016. Aplikasi Kendali LQR Diskrit untuk Sistem Pergudangan Barang Susut dengan Peninjauan Berkala pada radioaktif I-131. *Seminar Nasional Matematika dan Perndidikan Matematika*. FPMIPATI - Universitas PGRI Semarang. Semarang, 13 Agustus 2016

Ogata K. 1995. *Discrete Time Control System*s. Prentice-Hall

Ogata K. 2010. *Modern Control Enginnering.* Prentice-Hall

Olsder GJ. 1994. *Mathematical Systems Theory*. The Netherlands : Delft

Rahman WY, Sarmini E, Herlina, Abidin, Triyanto & Hambali. 2012. Pembuatan Radioisotop Fosfor-32 untuk Sintesa ATP Bertanda $^{32}P[(Y^{12}P)ATP]$. *Prosiding Seminar Penelitian dan Pengelolaan Perangkat Nuklir*. Pusat Teknologi Akselerator dan Proses bahan. Buku I hal. 113-117