

**Pemodelan Matematika Tentang Penyebaran Virus Flu Burung (H5N1) Dengan  
Treatment Pada Manusia Dan Vaksinasi Burung Rentan Dalam Populasi Konstan**

**Taufan Giri Ramdani\*, Muhammad Kharis**

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia  
Gedung D7 Lt.1, Kampus Sekaran Gunungpati, Semarang 50229  
E-mail: [taufan.giri96@students.unnes.ac.id](mailto:taufan.giri96@students.unnes.ac.id)

Diterima 12 Januari 2023

Disetujui 23 Maret 2023

Dipublikasikan 28 April 2023

**Abstrak**

Dari bulan oktober sampai November 2020, Inggris, Jerman dan Jepang telah memusnahkan lebih dari 3 juta unggas karena terinfeksi virus flu burung. Pada bulan februari tahun 2021 rusia melaporkan kasus penularan virus flu burung varian H5N8 pada pekerja peternakan unggas. Virus ini disebarkan melalui unggas terinfeksi ke unggas rentan dan unggas terinfeksi ke manusia rentan serta manusia terinfeksi dengan manusia rentan. Pemberian vaksin pada unggas merupakan salah satu cara menekan penyebaran virus flu burung. Sehingga Dibentuk sebuah penelitian untuk membangun model matematika penyebaran virus flu burung, mencari titik kestabilan dari model yang dibuat dan pembuatan simulasi numerik. Penelitian ini menghasilkan model  $S, I, T, R, S_b, I_b, V_b$  dengan adanya pemberian treatment kepada manusia terinfeksi (I) dan vaksinasi burung rentan ( $V_b$ ) dalam populasi burung dan manusia konstan.; (a) titik ekuilibrium  $P_0$  stabil asimtotik lokal untuk kondisi  $R_0 < 1$  dan  $r_0 < 1$  (b) titik ekuilibrium  $P_0$  tidak stabil dan  $P_1$  stabil asimtotik lokal untuk kondisi  $R_0 > 1$  dan  $r_0 < 1$  dan (c) titik ekuilibrium  $P_0$  dan  $P_1$  tidak stabil serta  $P_2$  stabil asimtotik lokal untuk kondisi  $R_0 > 1$  dan  $r_0 > 1$ . Hasil penelitian ini diperoleh beberapa fakta yaitu semakin kecil nilai peluang kontak unggas rentan dengan unggas terinfeksi dan kontak manusia rentan dengan manusia terinfeksi serta semakin besar nilai proporsi manusia yang diberi treatment dan burung rentan yang diberikan vaksin maka akan memperkecil populasi manusia yang terinfeksi virus flu burung.

Kata kunci: model matematika, virus avian influenza, titik ekuilibrium, bilangan reproduksi dasar, *treatment*

**Abstract**

*From October to November 2020, UK, Germany and Japan have culled more than three million poultry infected with the avian influenza virus. In february 2021, Russia reported a case of transmission of the avian influenza virus in poultry farm workers. The virus is spread through infected poultry to susceptible poultry and infected poultry to susceptible humans and infected humans to susceptible humans. Vaccination in susceptible poultry is one way to suppress the spread of the avian influenza virus. This study was developed to build mathematical models of avian influenza virus spread, to find the stability point of the model created and the manufacture of numerical simulations. This study yielded the model  $S, I, T, R, S_b, I_b, V_b$  in the presence of treatment to infected humans (I) and Vaccination in susceptible poultry ( $V_b$ ) in a constant human and poultry population: (a) the equilibrium point  $P_0$  is locally asymptotically stable for condition  $R_0 < 1$  and  $r_0 < 1$  (b) the equilibrium point  $P_0$  is unstable and  $P_1$  is stable asymptotically local for condition  $R_0 > 1$  and  $r_0 < 1$  and (c) the equilibrium point of  $P_0$  and  $P_1$  are unstable and  $P_2$  is stable asymptotically for condition  $R_0 > 1$  and  $r_0 > 1$ . The results of this study can be obtained some facts that the smaller the value of the opportunity of susceptible poultry contact with infected poultry and human susceptible to infected human and the greater the value of the proportion of humans who were given treatment and Vaccination in susceptible poultry will reduce the population of human infected with Avian Influenza virus.*

Keywords: *mathematical model, avian influenza virus, equilibrium point, basic reproduction number, treatment*

**How to cite:**

Ramdani T. G., Kharis M. (2022). Pemodelan matematika tentang penyebaran virus flu burung (H5N1) dengan treatment pada manusia dan vaksinasi burung rentan dalam populasi konstan. *Indonesian Journal of Mathematics and Natural Sciences*, 46(1), 21-37.

## PENDAHULUAN

Lebih dari satu dekade yang lalu, ditemukan bahwa virus flu burung mampu dibawa oleh burung liar dalam jarak yang jauh. Hal ini terjadi pada *highly pathogenic avian influenza* subtype A (H5N1) dari Asia Tenggara dan Asia Timur ke beberapa wilayah di Asia, Eropa, Afrika serta Amerika Utara. Dalam epidemi saat ini, tingkat keterlibatan burung liar dalam epidemiologi penyakit ini luar biasa (Brown *et al.*, 2017). Influenza menjadi pandemi saat virus influenza baru muncul di populasi manusia, menyebabkan penyakit serius dan menyebar dengan mudah. Ini bisa menyapu sebuah negara dan seluruh dunia dalam waktu yang sangat singkat (Waliya *et al.*, 2017).

Pada bulan November-Desember tahun 2020 Jepang telah memusnahkan 3 juta unggas dari Prefektur Shiga, Kagawa, Fukuoka, Hyogo, Miyazaki, Nara, Hiroshima, Wakayama, Oita, dan Okayama akibat flu burung. Sementara di Inggris, pada 3 November 2020 mengidentifikasi wabah flu burung di sebuah peternakan ayam di wilayah Cheshire. Sebelumnya, pada 28 Oktober 2020, Belanda mengidentifikasi adanya virus flu burung di peternakan unggas yang memiliki populasi 35.000 ekor. Temuan kasus serupa juga ditemukan di Jerman. Ada sebanyak 12 kasus teridentifikasi flu burung pada burung-burung liar di wilayah utara Jerman. Pada bulan Februari 2021 Rusia melaporkan kasus penularan flu burung varian H5N8 pada pekerja peternakan unggas.

Flu burung atau avian influenza merupakan suatu penyakit menular yang disebabkan oleh virus influenza yang ditularkan oleh unggas ke manusia (zoonotic) yang dapat menyebabkan wabah. Manusia bukan satu-satunya yang dapat terkena infeksi influenza (Johnson *et al.*, 2017). Ini disebabkan oleh karakteristik struktur hemagglutinin virus flu burung, saat genetik virus bermutasi atau terjadi pencampuran gen influenza pada hewan dan manusia menyebabkan perubahan struktural (Che *et al.*, 2014).

Faktanya, orang yang terinfeksi membutuhkan beberapa treatment untuk menyembuhkan infeksi seperti asimilasi obat dan rawat inap (Kharis & Arifudin, 2017). Treatment dapat secara langsung menargetkan virus influenza itu sendiri; atau sebaliknya mereka mungkin hanya menawarkan bantuan untuk gejala penyakit, sementara sistem kekebalan tubuh sendiri bekerja untuk pulih dari infeksi (Waliya *et al.*, 2017). Kecurigaan klinis yang rendah terhadap penyakit oleh petugas layanan kesehatan mungkin menghambat pentingnya untuk diagnosis dini, konfirmasi serologis, dan inisiasi pengobatan yang tepat (Adisasmito *et al.*, 2013).

Model matematika untuk epidemi dengan treatment terpisah telah diteliti oleh Kimbir *et al.* (2014). Model untuk seasonal influenza telah dikaji oleh Kharis dan Arifudin (2017), model matematika untuk Avian Influenza telah diteliti oleh Derouich dan Boutayeb (2008), serta Tasmi dan Nuraini (2016). Model matematika yang dikembangkan oleh Derouich dan Boutayeb (2008) belum mengakomodir fakta adanya tindakan treatment pada manusia yang terinfeksi. Model yang dikembangkan oleh Derouich dan Boutayeb (2008) juga mengasumsikan bahwa populasi manusia tak konstan. Faktanya, pasien dengan dugaan atau terbukti terjangkit virus flu burung harus dirawat di rumah sakit secara terpisah. Model matematika oleh Kimbir *et al.* (2014) mengasumsikan populasi manusia dan unggas tidak konstan. Model tersebut menjelaskan bahwa manusia terinfeksi dapat sembuh tanpa treatment dan kembali. Hal ini kurang sesuai dengan kenyataan bahwa manusia terinfeksi harus diberi treatment agar benar-benar sembuh. Tasmi dan Nuraini (2016) mengembangkan model penyebaran virus flu burung dengan mempertimbangkan adanya vaksinasi terhadap populasi unggas rentan dan *treatment* pada populasi manusia terinfeksi. Dalam pengoptimalan vaksinasi dan *treatment*, model matematika ini menggunakan metode algoritma genetika dengan biaya minimal. Model matematika yang dibahas oleh Tasmi dan Nuraini (2016) mengasumsikan populasi tidak konstan pada manusia dan unggas.

Penelitian ini melengkapi dan memodifikasi hasil penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Derouich dan Boutayeb (2008) dengan memberikan pengaruh *treatment* pada manusia terinfeksi H5N1 dalam populasi konstan. Dari penelitian ini dapat diketahui sejauh mana pengaruh *treatment* mampu menekan penyebaran virus flu burung sehingga tidak menjadi pandemi yang tak terkendali.

## METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini yaitu penentuan masalah, perumusan masalah, studi pustaka, analisis dan pemecahan masalah, serta penarikan kesimpulan. Langkah-langkah yang akan dilakukan dalam penelitian ini meliputi: membangun model matematika penyebaran virus flu burung, menganalisis model matematika penyebaran virus tersebut sehingga diperoleh titik kesetimbangan (ekuilibrium). Selanjutnya menentukan bilangan reproduksi pada manusia ( $\mathcal{R}_0$ ) dan unggas ( $r_0$ ). Setelah diperoleh titik kesetimbangan dan bilangan reproduksi dasar manusia ( $\mathcal{R}_0$ ) dan unggas ( $r_0$ ) tersebut, selanjutnya dilakukan analisis kestabilan titik kesetimbangan. Kemudian mensimulasikan penyebaran

virus flu burung dengan menggunakan program *Maple 2018*. Proses ini dilakukan dengan metode studi pustaka atau olah literatur. Kemudian langkah terakhir yaitu penarikan kesimpulan.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Fakta-fakta yang berhasil dikumpulkan dari berbagai sumber meliputi. (1) Ada dua cara penularan, yaitu melalui kontak dan udara, di mana influenza dan virus pernafasan lainnya diperkirakan menyebar dari orang ke orang (Tangavel & Bouvier, 2014). (2) Kehidupan di pasar unggas terbukti menjadi lokasi yang signifikan untuk penyebaran virus flu burung dari unggas ke manusia dan kontak dengan unggas yang sakit atau mati diidentifikasi sebagai faktor risiko (Shimizu *et al.*, 2016). (3) Kematian akibat infeksi virus H5N1 yang ganas di Indonesia telah dikaitkan dengan keterlambatan pemberian *treatment* kesehatan dan rawat inap, diagnosis klinis H5N1 ganas yang tertunda, dan terlambatnya pengobatan antiviral (Mangiri *et al.*, 2017). (4) Pasien dengan dugaan atau terbukti virus Avian Influenza harus dirawat di rumah sakit secara terpisah. Meskipun sistem kekebalan tubuh dapat bekerja untuk pulih dari infeksi (Waliya *et al.*, 2017). (5) Setiap individu manusia yang sembuh dari infeksi virus *avian influenza* memiliki kekebalan sementara, sehingga manusia kembali rentan terinfeksi virus *avian influenza* (Derouich & Boutayeb, 2008; Kharis & Arifudin, 2017).

Asumsi-asumsi yang ditambahkan dalam penyusunan model matematika, yaitu (1) Laju kelahiran pada manusia sebanding dengan ukuran populasinya. (2) Laju kematian terinfeksi pada manusia dan unggas mempunyai nilai yang sama dengan laju kelahiran. (3) Penyebaran virus flu burung ditularkan dari unggas sakit ke unggas rentan dan dari unggas sakit ke manusia rentan serta manusia sakit ke manusia rentan. (4) Setiap individu yang lahir merupakan individu rentan. (5) Setiap unggas mempunyai peluang yang sama untuk terjangkit. (6) Setiap individu manusia mempunyai peluang yang sama untuk terjangkit. (7) Setiap manusia terinfeksi dapat disembuhkan melalui *treatment* (*treatment*) maupun kekebalan alami pada manusia. (8) Individu manusia yang telah sembuh dapat terinfeksi kembali. (9) Kematian pada sub kedua populasi terinfeksi pada hanya terjadi karena infeksi penyakit. Populasi manusia dibagi menjadi empat kelas, sedangkan populasi burung dibagi menjadi dua kelas. Berdasarkan kelas-kelas tersebut, dibentuk model matematika dengan variabel-variabel dan parameter-parameter yang ada dalam model matematika. Dapat dilihat pada Tabel 1 dan Tabel 2.

Tabel 1. Daftar variabel

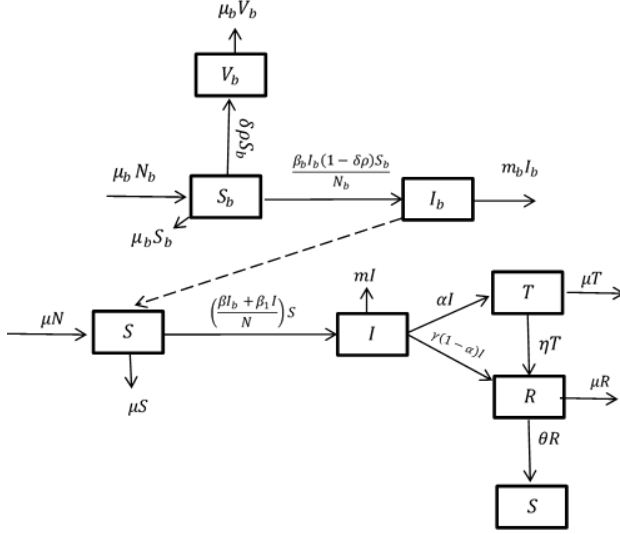
Variabel	Keterangan
$N(t)$	Jumlah populasi manusia pada waktu $t$
$S(t)$	Banyak manusia yang rentan terinfeksi penyakit pada waktu $t$
$I(t)$	Banyak manusia yang terinfeksi penyakit pada waktu $t$
$T(t)$	Banyak manusia yang diberikan <i>treatment</i> pada waktu $t$
$R(t)$	Banyak manusia yang telah sembuh dari penyakit pada waktu $t$
$N_b(t)$	Jumlah populasi manusia pada waktu $t$
$S_b(t)$	Banyak unggas yang rentan terinfeksi penyakit pada waktu $t$
$I_b(t)$	Banyak unggas yang terinfeksi penyakit pada waktu $t$

Tabel 2. Daftar parameter

Parameter	Keterangan
$\mu$	Proporsi kematian alami pada populasi manusia ( $0 \leq \mu \leq 1$ )
$\mu_b$	Proporsi kematian alami pada populasi unggas ( $0 \leq \mu_b \leq 1$ )
$\beta$	Peluang kontak manusia rentan dengan unggas terinfeksi ( $0 \leq \beta \leq 1$ )
$\beta_1$	Peluang kontak manusia rentan dengan manusia terinfeksi ( $0 \leq \beta_1 \leq 1$ )
$\beta_b$	Peluang kontak unggas rentan dengan unggas terinfeksi ( $0 \leq \beta_b \leq 1$ )
$m$	Proporsi kematian karena infeksi pada populasi manusia (diasumsikan sama dengan $\mu$ )
$m_b$	Proporsi kematian karena infeksi pada populasi unggas (diasumsikan sama dengan $\mu_b$ )
$\gamma$	Proporsi manusia yang sembuh
$\delta$	Proporsi unggas yang di vaksinasi
$\rho$	Peluang keberhasilan vaksinasi
$\theta$	Proporsi kehilangan kekebalan

$\alpha$ : proporsi manusia menjalani treatment;  $\eta$ : proporsi individu kelas treatment yang sembuh

Secara skematis penyebaran virus *avian influenza* dengan pemberian *treatment* dalam populasi manusia terinfeksi dan vaksinasi burung rentan digambarkan dalam diagram *transfer* pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram transfer penyebaran virus flu burung

Model matematika yang dibentuk diberikan pada Sistem (1).

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \mu N - \left( \frac{\beta_1 I_b}{N} + \frac{\beta_1 I}{N} + \mu \right) S + \theta R \\
 \frac{dI}{dt} &= \left( \frac{\beta_1 I_b}{N} + \frac{\beta_1 I}{N} \right) S - (\alpha + m + \gamma(1 - \alpha)) I \\
 \frac{dT}{dt} &= \alpha I - (\mu + \eta) T \\
 \frac{dR}{dt} &= \gamma(1 - \alpha) I + \eta T - (\mu + \theta) R \quad (1) \\
 \frac{dS_b}{dt} &= \mu_b N_b - S_b \left( \frac{\beta_b(1 - \delta\rho) I_b}{N_b} + \mu_b + \delta\rho \right) \\
 \frac{dI_b}{dt} &= \left( \frac{\beta_b(1 - \delta\rho) S_b}{N_b} - m_b \right) I_b \\
 \frac{dV_b}{dt} &= \delta\rho S_b - \mu_b V_b \\
 N &= S + I + T + R \\
 N_b &= S_b + I_b + V_b
 \end{aligned}$$

Untuk mempermudah analisis model matematika diasumsikan bahwa  $m = \mu$ ,  $m_b = \mu_b$ ,  $\gamma(1 - \alpha) = \gamma_1$ ,  $\beta_b(1 - \delta\rho) = \beta_2$ ,  $N = P$  dan  $N_b = K$ . Diperoleh  $R = P - (S + I + T)$  dan  $S_b = K - (I_b + V_b)$ . Sehingga Sistem (1) menjadi

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= (\mu + \theta)P - \left( \frac{\beta_1 I_b}{P} + \frac{\beta_1 I}{P} + \mu + \theta \right) S - \theta I - \theta T \\
 \frac{dI}{dt} &= \left( \frac{\beta_1 I_b}{P} + \frac{\beta_1 I}{P} \right) S - (\alpha + \mu + \gamma_1) I \\
 \frac{dT}{dt} &= \alpha I - (\mu + \eta) T \quad (2) \\
 \frac{dV_b}{dt} &= \delta\rho K - \delta\rho I_b - (\delta\rho + \mu_b) V_b \\
 \frac{dI_b}{dt} &= \left[ \beta_2 - \left( \frac{\beta_2 V_b}{K} + \frac{\beta_2 I_b}{K} + \mu_b \right) \right] I_b
 \end{aligned}$$

### Analisis Model Matematika

Dari Sistem (2) akan dicari titik kesetimbangannya dengan membuat nol ruas kanan sehingga diperoleh Sistem (3).

$$(\mu + \theta)P - \left(\frac{\beta I_b}{P} + \frac{\beta_1 I}{P} + \mu + \theta\right)S - \theta I - \theta T = 0$$

$$\left(\frac{\beta I_b}{P} + \frac{\beta_1 I}{P}\right)S - (\alpha + \mu + \gamma_1)I = 0$$

$$\alpha I - (\mu + \eta)T = 0 \quad (3)$$

$$\left[\beta_2 - \left(\frac{\beta_2 V_b}{K} + \frac{\beta_2 I_b}{K} + \mu_b\right)\right]I_b = 0$$

$$\delta \rho K - \delta \rho I_b - (\delta \rho + \mu_b)V_b = 0$$

Hasil analisis yang diperoleh dari Sistem (3) menghasilkan Teorema 1. Tahapan selanjutnya adalah analisis kestabilan titik ekuilibrium Sistem (2). Dalam analisis tersebut, digunakan matriks Jacobian dari Sistem (2). Kemudian diperoleh Teorema 2 kestabilan titik kesetimbangan Sistem (2).

#### Teorema 1

$$\text{Diberikan } \mathcal{R}_0 = \frac{\beta_1}{\alpha + \mu + \gamma_1} \text{ dan } r_0 = \frac{\beta_2}{\delta \rho + \mu_b}.$$

1. Jika  $\mathcal{R}_0 < 1$  dan  $r_0 < 1$ , maka sistem (2) hanya mempunyai satu titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit  $P_0 = (S, I, T, I_b, V_b) = (P, 0, 0, 0, \frac{\delta \rho K}{\delta \rho + \mu_b})$ .
2. Jika  $\mathcal{R}_0 > 1$  dan  $r_0 < 1$ , maka sistem (2) mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu titik  $P_0$  dan  $P_1 = (S, I, T, I_b, V_b) = \left(\frac{P(\alpha + \mu + \gamma_1)}{\beta_1}, I, \frac{\alpha I}{\mu + \eta}, 0, \frac{\delta \rho K}{\delta \rho + \mu_b}\right)$  dengan  $I = \frac{(\mu + \theta)P(\alpha + \mu + \gamma_1)(\mathcal{R}_0 - 1)}{\beta_1(\alpha + \mu + \gamma_1 + \theta) + \frac{\beta_1 \alpha \theta}{\mu + \eta}}$ .
3. Jika  $\mathcal{R}_0 > 1$  dan  $r_0 > 1$ , maka sistem (2) diperoleh tiga titik ekuilibrium yaitu  $P_0, P_1$  dan  $P_2 = (S, I, T, I_b, V_b) = \left(\frac{P(\alpha + \mu + \gamma_1)I^*}{\beta I_b + \beta_1 I^*}, I^*, \frac{\alpha I^*}{\mu + \eta}, I_b\right)$  dengan  $I_b = \frac{K(\delta \rho + \mu_b)}{\beta_2}(r_0 - 1)$ ,  $I^* = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ ,  $A = (\alpha + \mu + \gamma_1)\beta_1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_1 \alpha \theta}{\mu + \eta}$ ,  $B = (\alpha + \mu + \gamma_1)\beta I_b + (\mu + \theta)P(\alpha + \mu + \gamma_1) + \beta I_b \theta + \frac{\beta \alpha \theta}{\mu + \eta} I_b - (\mu + \theta)P\beta_1$  dan  $C = -(\mu + \theta)P\beta I_b$ .

#### Teorema 2

$$\text{Diberikan } \mathcal{R}_0 = \frac{\beta_1}{\alpha + \mu + \gamma_1} \text{ dan } r_0 = \frac{\beta_2}{\delta \rho + \mu_b}, P_0 = (S, I, T, I_b, V_b) = \left(P, 0, 0, 0, \frac{\delta \rho K}{\delta \rho + \mu_b}\right), P_1 = (S, I, T, I_b, V_b) = \left(\frac{P(\alpha + \mu + \gamma_1)}{\beta_1}, I, \frac{\alpha I}{\mu + \eta}, 0, \frac{\delta \rho K}{\delta \rho + \mu_b}\right), \text{ dan } P_2 = (S, I, T, I_b, V_b) = \left(\frac{P(\alpha + \mu + \gamma_1)I^*}{\beta I_b + \beta_1 I^*}, I^*, \frac{\alpha I^*}{\mu + \eta}, I_b, \frac{\delta \rho K}{\delta \rho + \mu_b}\right).$$

dengan  $I^* = \frac{(\mu + \theta)P(\alpha + \mu + \gamma_1)(\mathcal{R}_0 - 1)}{\beta_1(\alpha + \mu + \gamma_1 + \theta) + \frac{\beta_1 \alpha \theta}{\mu + \eta}}, I_b = \frac{K(\delta \rho + \mu_b)}{\beta_2}(r_0 - 1), I^* = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, A = (\alpha + \mu + \gamma_1)\beta_1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_1 \alpha \theta}{\mu + \eta}, B = (\alpha + \mu + \gamma_1)\beta I_b + (\mu + \theta)P(\alpha + \mu + \gamma_1) + \beta I_b \theta + \frac{\beta \alpha \theta}{\mu + \eta} I_b - (\mu + \theta)P\beta_1$  dan  $C = -(\mu + \theta)P\beta I_b$ .

Jika  $\mathcal{R}_0 < 1$  dan  $r_0 < 1$ , maka titik ekuilibrium  $P_0$  stabil asimtotik lokal.

Jika  $\mathcal{R}_0 > 1$  dan  $r_0 < 1$ , maka titik ekuilibrium  $P_0$  tidak stabil dan  $P_1$  stabil asimtotik lokal.

Jika  $\mathcal{R}_0 > 1$  dan  $r_0 > 1$ , maka titik ekuilibrium  $P_0$  dan  $P_1$  tidak stabil, sedangkan  $P_2$  stabil asimtotik lokal apabila  $\frac{(\mu_b + \delta \rho)\rho}{\delta} > 1$  dan  $\frac{K\rho^2}{2\mu_b} \cdot \frac{(\mu_b + \delta \rho)\rho}{\delta} > 1$ .

### Proporsi Minimum Manusia Terinfeksi yang Diberi *Treatment*

Untuk menentukan proporsi minimum manusia terinfeksi yang diberi *treatment* agar penyebaran virus flu burung tidak meluas digunakan syarat  $\mathcal{R}_0 < 1$ .

$$\text{Dipunyai } \mathcal{R}_0 = \frac{\beta_1}{\alpha + \mu + \gamma_1}.$$

$$\text{Jelas } \mathcal{R}_0 < 1 \Leftrightarrow \frac{\beta_1}{\alpha + \mu + \gamma_1} < 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha > \frac{\beta_1 - (\mu + \gamma)}{1 - \gamma}.$$

Jadi proporsi minimum manusia terinfeksi yang diberi *treatment* dirumuskan dengan

$$\alpha > \frac{\beta_1 - (\mu + \gamma)}{1 - \gamma}.$$

### Simulasi Numerik Model Matematika

Untuk mengamati dinamika penyebaran virus flu burung dengan pemberian *treatment* pada manusia dalam populasi konstan maka diperlukan simulasi numerik dari Sistem (2). Pada penelitian ini akan dianalisis dengan nilai parameter-parameter yang dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3. Nilai parameter-parameter pada sistem (2)

Parameter	Nilai	Keterangan
$\mu_b$	0,04	Chong <i>et al.</i> 2016
$\mu$	0,00128	Tasmi & Nuraini, 2016
$m_b$	0,04	Diasumsikan sama dengan $\mu_b$
$m$	0,00128	Diasumsikan sama dengan $\mu$
$\beta_b$	0 sd 1	Diasumsikan
$\beta_1$	0 sd 1	Diasumsikan
$\beta$	0,5	Tasmi & Nuraini, 2016
$\gamma$	0,03	Tasmi & Nuraini, 2016
$\theta$	0,0417	Tasmi & Nuraini, 2016
$\alpha$	0,134	Kim <i>et al.</i> , 2016
$\eta$	0,1	Tasmi & Nuraini, 2016
$P$	1000	Diasumsikan
$K$	5000	Diasumsikan

Nilai  $K = 5000$  artinya terdapat 5000 individu unggas yang masuk populasi unggas setiap harinya.  $P = 1000$  artinya terdapat 1000 individu manusia yang masuk populasi unggas setiap harinya.  $\mu_b = 0,04$  artinya rata-rata terdapat 4 individu unggas yang lahir setiap 100 hari.  $\mu = 0,00128$  artinya rata-rata terdapat 128 individu manusia yang lahir setiap 10000 hari.  $m_b = 0,04$  artinya rata-rata terdapat 4 individu unggas yang mati akibat virus flu burung setelah 100 hari.  $m = 0,00128$  artinya rata-rata terdapat 128 manusia yang meninggal akibat virus flu burung setelah 10.000 hari.  $\beta = 0,5$  artinya rata-rata terdapat 5 individu manusia rentan yang menjadi terinfeksi apabila ada 10 individu manusia rentan yang kontak langsung dengan unggas terinfeksi.  $\gamma = 0,03$  artinya rata-rata terdapat 3 individu yang sembuh tanpa menjalani *treatment* apabila ada 100 individu manusia yang terinfeksi.  $\theta = 0,0417$  artinya rata-rata terdapat 417 individu manusia yang mengalami penurunan kekebalan tubuh setelah 10.000 hari.  $\alpha = 0.134$  artinya rata-rata terdapat 134 individu manusia terinfeksi yang menjalani *treatment* dalam 1.000 hari.  $\eta = 0.1$  artinya rata-rata terdapat 1 individu manusia terinfeksi yang menjalani *treatment* menjadi sembuh dalam 10 hari.

Penelitian ini menganalisis dinamika penyebaran virus flu burung dalam tiga kondisi yang berbeda, yaitu  $\mathcal{R}_0 < 1$  dan  $r_0 < 1$ ,  $\mathcal{R}_0 > 1$  dan  $r_0 < 1$ , serta  $\mathcal{R}_0 > 1$  dan  $r_0 > 1$ . Untuk menganalisis model matematika penyebaran virus flu burung dengan pemberian *treatment* pada manusia dalam populasi konstan dilakukan dengan cara membuat variasi nilai  $\beta_1$  dan  $\beta_b$ . Dipunyai  $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta_1}{\alpha + \mu + \gamma_1}$  dan  $r_0 = \frac{\beta_2}{\delta\rho + \mu_b}$  sehingga dapat dicari nilai bebas  $\beta_1$  dan  $\beta_b$ . Dengan mengasumsikan  $\mathcal{R}_0 = 1$  dan  $r_0 = 1$  diperoleh nilai

batas  $\beta_1 = 0,16126$  dan  $\beta_b = 0,045$ . Untuk menganalisis ketika kondisi  $\mathcal{R}_0 < 1$  dan  $r_0 < 1$  maka  $\beta_1 < 0,16126$  dan  $\beta_b < 0,045$  dengan nilai  $\beta_1 = 0,001; 0,06; 0,1; 0,14$  dan  $\beta_b = 0,02; 0,03; 0,035; 0,041$ , ketika kondisi  $\mathcal{R}_0 > 1$  dan  $r_0 < 1$  maka  $\beta_1 > 0,16126$  dan  $\beta_b < 0,045$  dengan nilai  $\beta_1 = 0,17; 0,35; 0,6; 0,8$  dan  $\beta_b = 0,02; 0,03; 0,035; 0,041$  serta ketika kondisi  $\mathcal{R}_0 > 1$  dan  $r_0 > 1$  maka  $\beta_1 > 0,16126$  dan  $\beta_b > 0,045$  dengan nilai  $\beta_1 = 0,17; 0,35; 0,6; 0,8$  dan  $\beta_b = 0,05; 0,35; 0,4; 0,48$ .

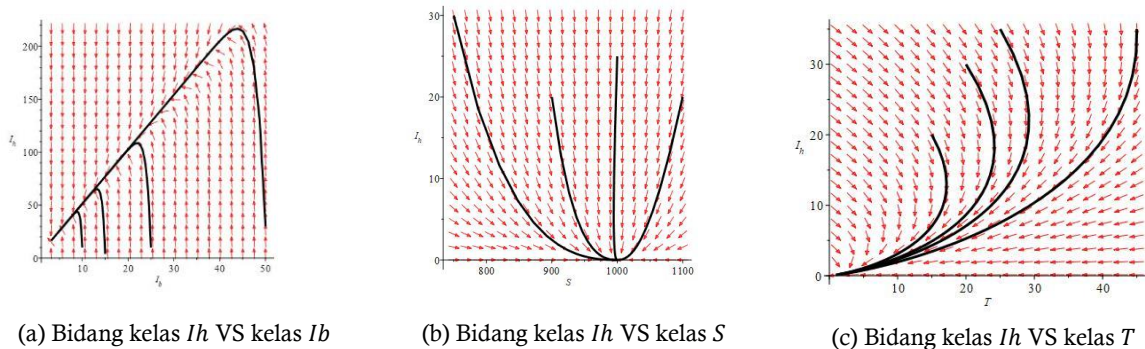
#### Simulasi untuk $\mathcal{R}_0 < 1$ dan $r_0 < 1$

Analisis model matematika penyebaran virus flu burung dengan *treatment* pada manusia dalam populasi konstan dilakukan dengan cara membuat nilai  $\beta_1$  suatu konstan dan memvariasikan nilai  $\beta_b$ , dan sebaliknya. yang dapat dilihat pada Tabel 4.

Tabel 4. Variasi nilai-nilai  $\beta_b$  dan  $\beta_1$

$\beta_1$	$\beta_b$	$r_0$	$\mathcal{R}_0$
0.01	0.02	0.453	0.0062
0.06	0.03	0.68	0.372
0.1	0.035	0.93	0.62
0.14	0.041	0.93	0.992

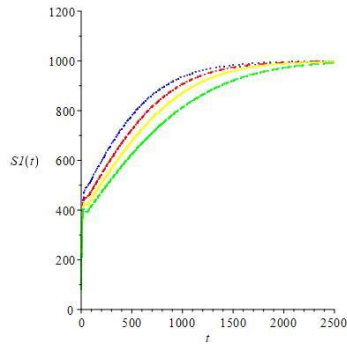
Simulasi di  $P_0$  nilai awal ( $S(0) = 80$ ), ( $I(0) = 20$ ), ( $T(0) = 16$ ), ( $I_b(0) = 60$ ), ( $V_b(0) = 80$ ) dengan nilai  $\beta_1$  suatu konstan dan  $\beta_b$  bervariasi, begitu juga sebaliknya dengan nilai awal yang diberikan diperoleh satu titik ekuilibrium  $P_0 = (S, I, T, I_b, V_b) = (1000; 0; 0; 0,445, 3)$ . Medan vektor untuk titik di  $\mathcal{R}_0 < 1$  dan  $r_0 < 1$  dengan  $\beta_1 = 0,06$   $\beta_b = 0,041$  terlihat pada Gambar 2.



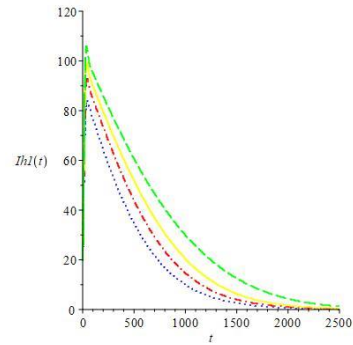
Gambar 2. Medan vektor di sekitar titik  $P_0$  untuk  $\mathcal{R}_0 < 1$  dan  $r_0 < 1$  dengan  $\beta_1 = 0,06$  dan  $\beta_b = 0,041$

Simulasi numerik dengan  $\beta_1 = 0,001; 0,06; 0,01; 0,16$  dan  $\beta_b = 0,041$  dengan nilai  $\beta_b = 0,041$  dan variasi  $\beta_1$  diperoleh grafik penyebaran flu burung pada Gambar 3. Pada Gambar 3 dianalisis dalam kondisi bebas penyakit ( $\mathcal{R}_0 < 1$  dan  $r_0 < 1$ ) dengan menjadikan nilai  $\beta_1 = 0,06$  ( $\mathcal{R}_0 < 1$ ) dan memvariasikan nilai  $\beta_b$  ( $r_0 < 1$ ) serta kebalikannya, terlihat bahwa seluruh kelas menuju ke satu titik yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit  $P_0 = (1000; 0; 0; 0; 445,64)$ . Terlihat bahwa ukuran populasi manusia rentan flu burung  $S(t)$  pada Gambar 3a mengalami kenaikan yang disebabkan adanya penambahan individu dari manusia yang telah sembuh hingga konstan di titik 1000 pada waktu  $t$  tertentu. Ukuran populasi manusia terinfeksi  $I(t)$  pada Gambar 3b mengalami kenaikan sampai waktu  $t$  tertentu karena adanya penambahan individu dari kelompok manusia rentan yang terinfeksi virus flu burung, kemudian mengalami penurunan karena sebagian dari manusia terinfeksi menjalani *treatment* dan sebagian sembuh oleh kekebalan alaminya serta sebagian meninggal akibat terjangkit virus flu burung hingga konstan di titik 0 pada waktu  $t$  tertentu. Ukuran populasi manusia yang menjalani *treatment*  $T(t)$  pada Gambar 3c mengalami kenaikan akibat penambahan individu dari kelompok manusia terinfeksi yang menjalani *treatment*, kemudian mengalami penurunan akibat sebagian dari manusia yang menjalani *treatment* berangsur-angsur pulih dan sebagian mengalami kematian alami hingga konstan di titik 0 pada waktu  $t$  tertentu. Ukuran populasi unggas terinfeksi  $I_b(t)$  pada Gambar 3d mengalami penurunan sampai pada waktu  $t$  tertentu, penurunan tersebut terjadi karena unggas mengalami kematian akibat terinfeksi virus flu burung, kemudian konstan di titik 0 karena tidak ada penambahan dari unggas rentan yang terinfeksi. Ini berarti untuk jangka waktu tertentu infeksi karena virus flu burung akan menghilang dalam

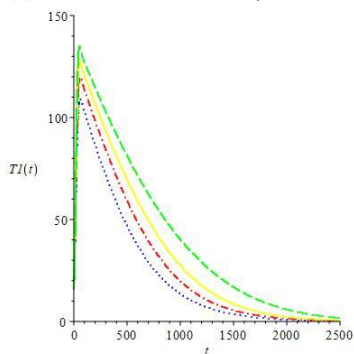
populasi. Ukuran populasi unggas  $V_b(t)$  pada Gambar 3e mengalami kenaikan yang disebabkan adanya unggas yang telah diberi vaksin hingga konstan di titik 445.64 pada waktu  $t$  tertentu.



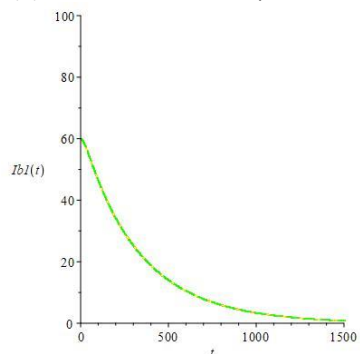
(a) Grafik Kelas  $S$  terhadap waktu  $t$



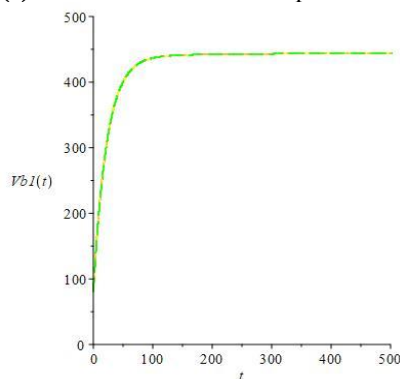
(b) Grafik Kelas  $I$  terhadap waktu  $t$



(c) Grafik Kelas  $T$  terhadap waktu  $t$



(d) Grafik Kelas  $I_b$  terhadap waktu  $t$



(e) Grafik Kelas  $V_b$  terhadap waktu  $t$

Gambar 3. Dinamika banyak populasi (a)  $S$ , (b)  $I$ , (c)  $T$ , dan (d)  $I_b$  terhadap waktu  $t$  dengan  $\beta_1 = 0.07$  dan  $\beta_b = 0.001; 0.013; 0.02; 0.035$

#### Simulasi untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ dan $r_0 < 1$

Analisis model matematika penyebaran virus flu burung dengan *treatment* pada manusia dalam populasi konstan dilakukan dengan cara membuat nilai  $\beta_1$  suatu konstan dan memvariasikan nilai  $\beta_b$ , dan sebaliknya, yang dapat dilihat pada Tabel 5.

Tabel 5. Variasi nilai-nilai  $\beta_b$  dan  $\beta_1$

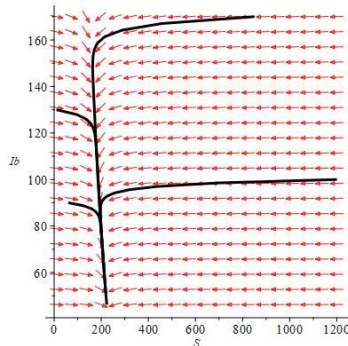
$\beta_1$	$\beta_b$	$r_0$	$R_0$
0.17	0.02	0.453653	1.5419
0.35	0.03	0.680478	2.170408
0.6	0.035	0.793892	3.720699
0.8	0.041	0.929988	4.960932



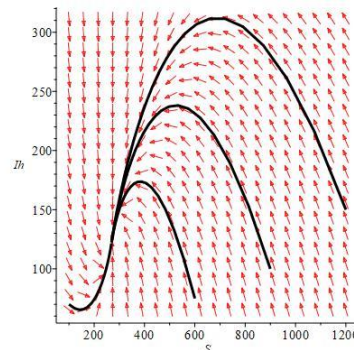
Simulasi di  $P_1$  nilai awal  $(S(0) = 80), (I(0) = 20), (T(0) = 16), (I_b(0) = 60), (V_b(0) = 80)$ . Dengan nilai  $\beta_1 = 0.6$  dan memvariasikan nilai  $\beta_b$  dan nilai awal yang diberikan diperoleh satu titik kesetimbangan  $P_1 = (S, I, T, I_b, V_b) = (268,76; 121,75; 161,08; 0; 445,64)$  kemudian dengan memvariasikan nilai  $\beta_1$  dan nilai  $\beta_b = 0.035$ , diperoleh variasi titik ekuilibrium  $P_1$  pada Tabel 6. Medan vektor untuk titik di  $\mathcal{R}_0 > 1$  dan  $r_0 < 1$  dengan  $\beta_1 = 0,6$  dan  $\beta_b = 0.041$  terlihat pada Gambar 4. Simulasi numerik dengan  $\beta_1 = 0.6$  dan  $\beta_b = 0.02; 0.03; 0.035; 0.041$  dengan nilai  $\beta_1 = 0.6$  dan nilai variasi  $\beta_b$  diperoleh grafik penyebaran flu burung pada Gambar 5

Tabel 6. Titik ekuilibrium untuk  $\beta_b = 0.035$  dan variasi  $\beta_1$

$\beta_1$	$S^*$	$I^*$	$T^*$	$I_b^*$	$V_b$
0,17	948,58	8,55	11,3		
0,35	460,74	89,78	118,79		
0,6	268,76	121,75	161,08	0	445.64
0,8	201,57	132,94	175,88		



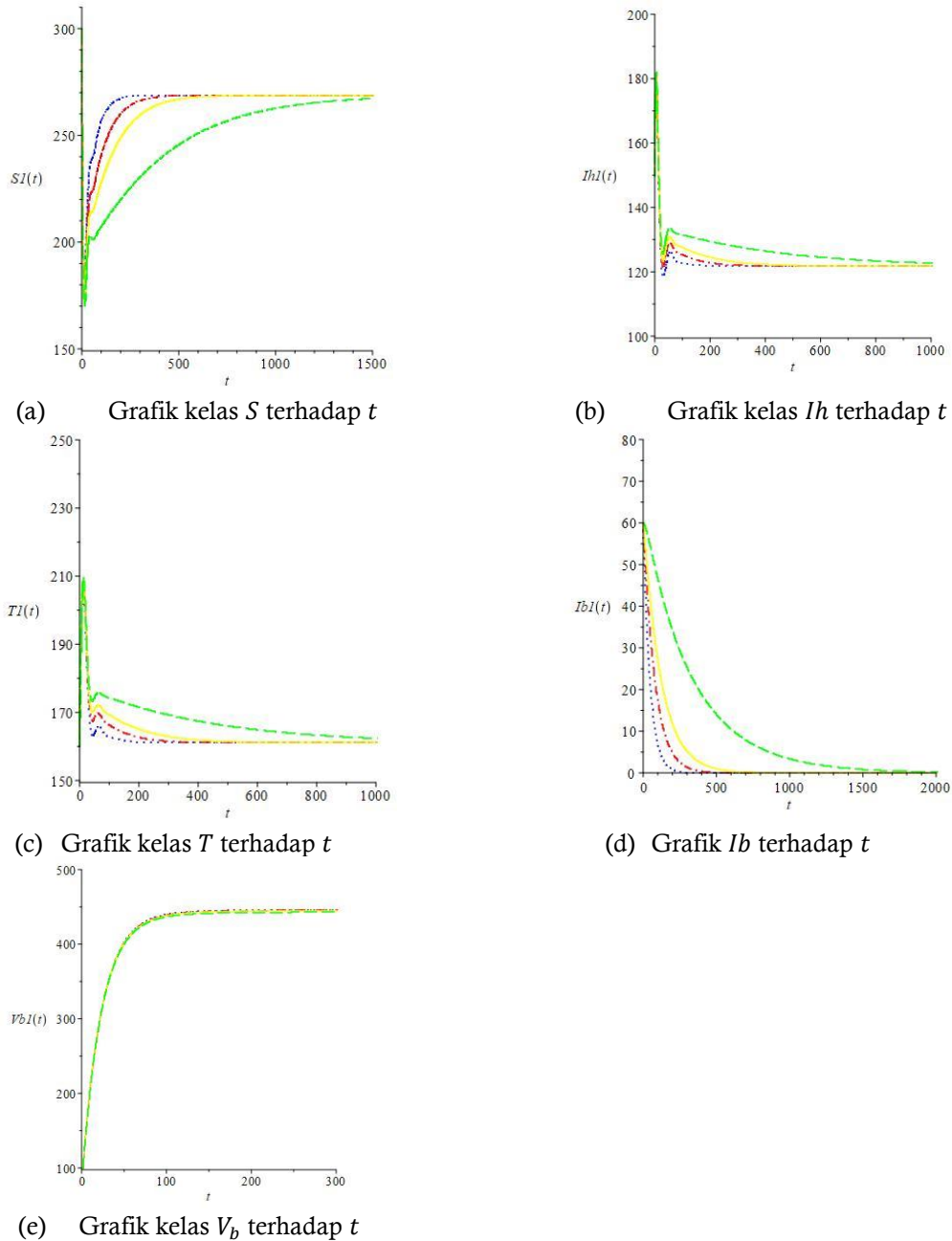
(a) Bidang kelas  $S$  VS kelas  $I_b$



(b) Bidang kelas  $S$  VS kelas  $I_h$

Gambar 4. Medan vektor di sekitar titik  $P_1$  untuk  $\mathcal{R}_0 > 1$  dan  $r_0 < 1$  dengan  $\beta_1 = 0,6$  dan  $\beta_b = 0.035$

Terlihat bahwa populasi manusia rentan flu burung  $S(t)$  pada Gambar 5a mengalami penurunan sampai waktu  $t$  tertentu yang disebabkan karena sebagian manusia rentan terinfeksi oleh virus flu burung dan sebagian mengalami kematian alami. Kemudian mengalami kenaikan yang disebabkan karena adanya penambahan individu dari kelompok manusia yang telah sembuh. Selanjutnya pada Gambar 6, sistem mengalami dinamik hingga konstan di titik  $S(t) = 268.76$ . Ukuran populasi manusia terinfeksi  $I(t) = Ih(t)$  pada Gambar 5b mengalami kenaikan sampai waktu  $t$  tertentu karena adanya penambahan individu dari kelompok manusia rentan yang terinfeksi virus flu burung, kemudian mengalami penurunan karena sebagian dari manusia terinfeksi menjalani *treatment* dan sebagian sembuh oleh kekebalan alaminya serta sebagian meninggal akibat terjangkit virus flu burung pada waktu  $t$  tertentu. Selanjutnya pada Gambar 6, sistem mengalami dinamik hingga konstan di titik  $I(t) = 121.75$ . Ukuran populasi manusia yang menjalani *treatment*  $T(t)$  pada Gambar 5c mengalami kenaikan akibat penambahan individu dari kelompok manusia terinfeksi yang menjalani *treatment*, kemudian mengalami penurunan akibat sebagian dari manusia yang menjalani *treatment* berangsur-angsur pulih dari penyakit dan sebagian mengalami kematian alami pada waktu  $t$  tertentu. Selanjutnya pada Gambar 6, sistem mengalami dinamik hingga konstan di titik  $T(t) = 161.08$ . Ukuran populasi unggas terinfeksi  $I_b(t)$  pada Gambar 5d mengalami penurunan hingga konstan di titik 0 karena tidak ada penambahan dari populasi unggas rentan. Ini berarti untuk jangka waktu tertentu virus flu burung akan menghilang dalam populasi dengan waktu yang cukup lama. Ukuran populasi unggas  $V_b(t)$  pada Gambar 5e mengalami kenaikan yang disebabkan adanya unggas yang telah diberi vaksin hingga konstan di titik 445.64 pada waktu  $t$  tertentu. Apabila dengan menjadikan  $\beta_b$  suatu konstan dan  $\beta_1$  bervariasi, diperoleh grafiknya berdinamika hingga konstan di beberapa titik sesuai pada Tabel 6.



Gambar 5. Dinamika Banyak Populasi (a)  $S$  (b)  $Ih$ , (c)  $T$ , (d)  $Ib$  dan (e)  $V_b$  terhadap waktu  $t$  dengan  $\beta_1 = 0.6$  dan  $\beta_b = 0.02; 0.03; 0.035; 0.041$

### Simulasi untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ dan $r_0 > 1$

Analisis model matematika penyebaran virus flu burung dengan *treatment* pada manusia dalam populasi konstan dilakukan dengan cara membuat nilai  $\beta_1$  suatu konstan dan memvariasikan nilai  $\beta_b$ , dan membuat  $\beta_b$  suatu konstan dan  $\beta_1$  bervariasi yang dapat dilihat pada Tabel 7. Simulasi di  $P_2$  nilai awal ( $S(0) = 15$ ), ( $I(0) = 150$ ), ( $T(0) = 200$ ), ( $I_b(0) = 700$ ), ( $V_b(0) = 350$ ). Dengan nilai  $\beta_1 = 0.73$  dan memvariasikan nilai  $\beta_b$  dan nilai awal yang diberikan diperoleh variasi titik ekuilibrium  $P_2$  pada Tabel 8. Medan vektor untuk titik di  $\mathcal{R}_0 > 1$  dan  $r_0 > 1$  dengan  $\beta_1 = 0.8$  dan  $\beta_b = 0.35$  terlihat pada Gambar 6. Simulasi numerik dengan  $\beta_1 = 0.8$  dan  $\beta_b = 0.05; 0.35; 0.4; 0.48$  dengan nilai  $\beta_1 = 0.8$  suatu konstan dan nilai variasi  $\beta_b$  diperoleh grafik penyebaran flu burung pada Gambar 7.

Tabel 7. Nilai  $\mathcal{R}_0 > 1$  dengan variasi nilai  $\beta_b$

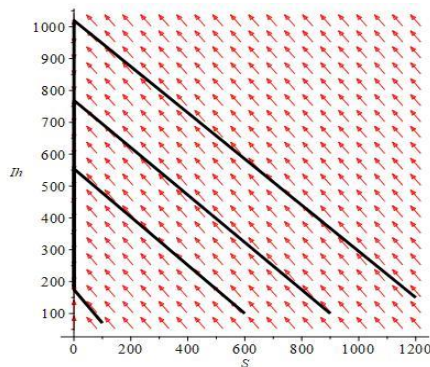
$\beta_1$	$\beta_b$	$R_0$	$r_0$
0.17	0.05	1.05	1.134
0.35	0.35	2.17	7.938
0.6	0.4	3.72	9.07
0.8	0.48	4.96	10.88

Tabel 8. Titik ekuilibrium untuk  $\beta_1 = 0.8$  dan variasi  $\beta_b$

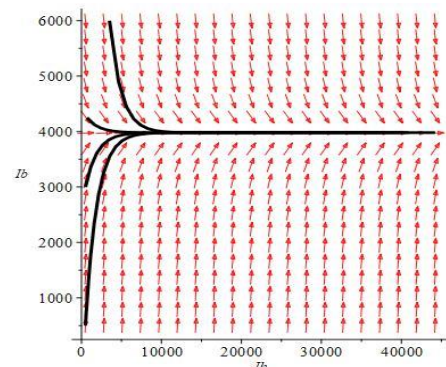
$\beta_b$	$S^*$	$I^*$	$T^*$	$I_b^*$	$V_b$
0.05				591.3	
0.35				4470.1	
0.4	201.5	132.9	175.8	4448.9	445.6
0.48				4540.7	

Tabel 9. Titik ekuilibrium untuk  $\beta_b = 0.35$  dan variasi  $\beta_1$

$\beta_1$	$S^*$	$I^*$	$T^*$	$I_b^*$	$V_b$
0.17	948.5	8.56	11.3		
0.35	460.9	89.8	118.8		
0.6	268.7	121.7	161.1	4370.2	445
0.8	201.5	132.94	175.9		



a) Bidang kelas  $S$  vs  $I_h$

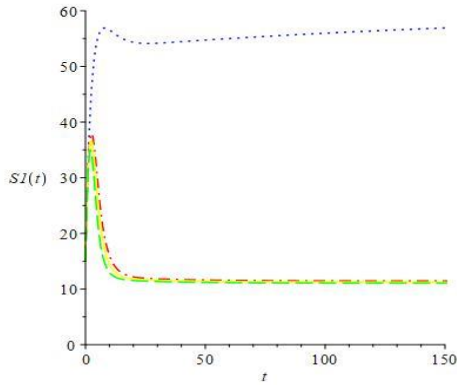


b) Bidang kelas  $I_b$  vs  $I_h$

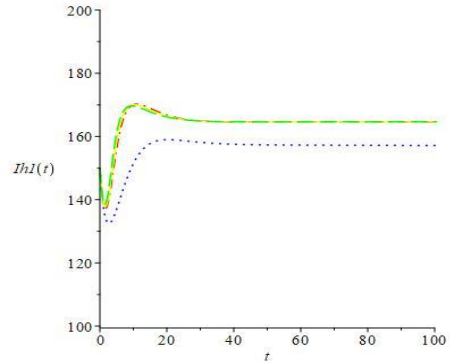
Gambar 6. Medan vektor di sekitar titik  $P_2$  untuk  $R_0 > 1$  dan  $r_0 > 1$  dengan  $\beta_1 = 0.8$  dan  $\beta_b = 0.35$

Terlihat bahwa populasi manusia rentan  $S(t)$  pada Gambar 7a mengalami kenaikan sampai waktu  $t$  tertentu yang disebabkan karena adanya penambahan individu manusia yang telah sembuh. Setelah itu, mengalami penurunan yang disebabkan sebagian manusia terjangkit virus flu burung dan sebagian mengalami kematian alami. Selanjutnya pada Gambar 7, sistem mengalami dinamika hingga konstan di titik  $S(t) = 57.23; 38.52; 37.85; 34.68$ . Ukuran populasi manusia terinfeksi  $I(t) = I_h(t)$  pada Gambar 7b mengalami penurunan karena sebagian dari manusia terinfeksi menjalani *treatment* dan sebagian sembuh oleh kekebalan alaminya serta sebagian meninggal akibat terjangkit virus flu burung. Kemudian mengalami kenaikan sampai waktu  $t$  tertentu karena adanya penambahan individu dari kelompok manusia rentan yang terinfeksi virus flu burung pada waktu  $t$  tertentu. Selanjutnya, sistem mengalami dinamika hingga konstan di titik  $I(t) = 132.94$ . Ukuran populasi manusia yang menjalani *treatment*  $T(t)$  pada Gambar 7c mengalami kenaikan akibat penambahan individu dari kelompok manusia terinfeksi yang menjalani *treatment*, kemudian mengalami penurunan akibat sebagian dari manusia yang menjalani *treatment* berangsur-angsur pulih dari penyakit serta sebagian mengalami kematian alami pada waktu  $t$  tertentu. Kemudian, sistem mengalami dinamika hingga konstan di titik  $T(t) = 175.88$ . Pada Gambar 7 d terlihat bahwa populasi unggas terinfeksi  $I_b(t)$  mengalami kenaikan hingga konstan di titik  $I_b(t) = 591.34; 4470.19; 4448.91; 4540.76$ . Kenaikan tersebut dikarenakan adanya penambahan unggas rentan

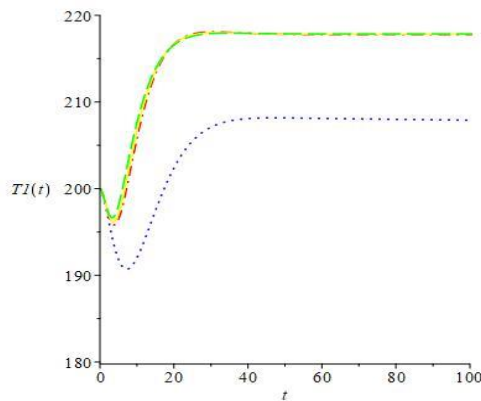
yang terinfeksi virus flu burung. Dapat dilihat bahwa penyakit tidak akan hilang saat  $r_0 > 1$ , sehingga diperlukan adanya tindakan yang dapat menghilangkan wabah atau mencegah penyebaran virus flu burung lebih luas. Ukuran populasi unggas rentan yang divaksinasi  $Vb(t)$  pada Gambar 7 (e) mengalami penurunan sampai waktu  $t$  tertentu karena adanya penambahan unggas rentan yang diberikan vaksinasi terinfeksi dan meninggal akibat terjangkiti virus flu burung hingga konstan pada waktu  $t$  tertentu. Apabila dengan menjadikan nilai  $\beta_b$  suatu konstan dan  $\beta_1$  bervariasi, akan diperoleh dinamika grafik hingga konstan di beberapa titik seperti pada Tabel 9.



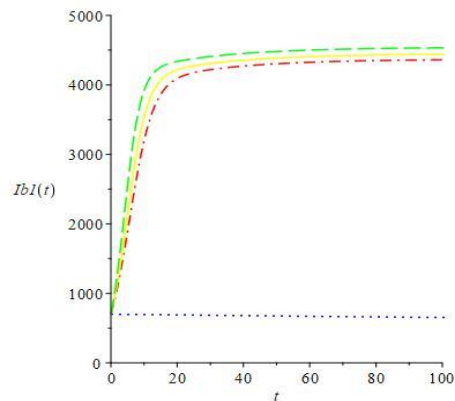
(a) Grafik kelas  $S$  terhadap  $t$



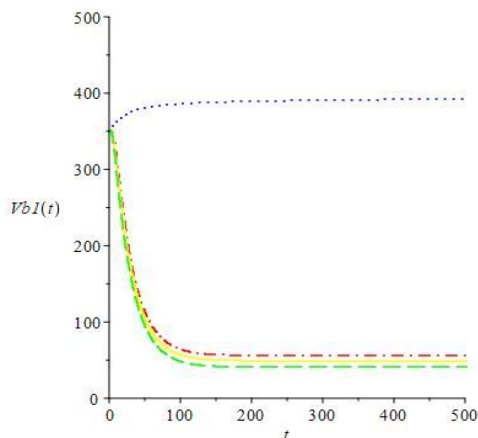
(b) Grafik kelas  $I_h$  terhadap  $t$



(c) Grafik kelas  $S$  terhadap  $t$



(d) Grafik kelas  $I_h$  terhadap  $t$



(e) Grafik kelas  $S$  terhadap  $t$

Gambar 7. Dinamika banyaknya populasi (a)  $S$ , (b)  $I$ , (c)  $T$  (d)  $I_b$  dan (e)  $V_b$  terhadap waktu  $t$  dengan  $\beta_1 = 0.8$  dan  $\beta_b = 0.05; 0.35; 0.4; 0.48$

### Simulasi pengaruh pemberian *treatment*

Untuk mencegah terjadinya wabah flu burung, maka diperlukan upaya pencegahan atau penanganan, salah satunya berupa pemberian *treatment* pada populasi manusia. Dalam penelitian ini, analisis dilakukan dengan cara membuat variasi nilai pemberian *treatment* ( $\alpha$ ). Dipunyai  $R_0 = \frac{\beta_1}{\alpha + \mu + \gamma_1}$ , untuk menjadi bebas penyakit maka  $R_0 < 1 \Leftrightarrow \frac{\beta_1}{\alpha + \mu + \gamma_1} < 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{\beta_1 - (\gamma + \mu)}{1 - \gamma}$ . Sehingga diperoleh proporsi minimum nilai  $\alpha$ . Berikut variasi nilai minimum  $\alpha$  pada Tabel 10. Diberikan nilai variasi  $\alpha = 0.4; 0.66; 0.8; 0.99$  dengan  $\beta_1 = 0.35$  dan  $\beta_b = 0.35$ , diperoleh variasi titik ekuilibrium pada Tabel 11. Hasil simulasi nilai variasi  $\alpha = 0.5; 0.63; 0.8; 0.99$  dengan  $\beta_1 = 0.35$  dan  $\beta_b = 0.35$  serta menggunakan parameter-parameter pada Tabel 3 akan disajikan pada Gambar 8. Untuk mengetahui pengaruh pemberian *treatment* dalam populasi  $S(t)$ ,  $Ih(t)$  dan  $T(t)$  terhadap waktu  $t$  dengan  $\alpha = 0.5; 0.63; 0.8; 0.99$  dapat dilihat pada Gambar 9.

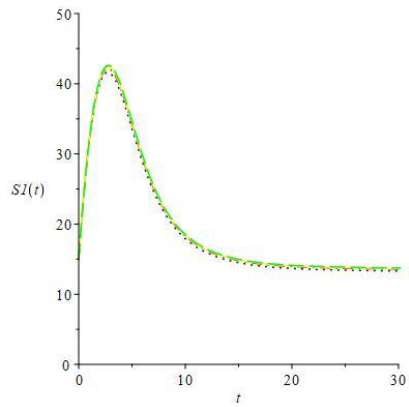
Tabel 10. Variasi nilai minimum  $\alpha$  berdasarkan  $\beta_1$

$\beta_1$	$\frac{\beta_1 - (\gamma + \mu)}{1 - \gamma}$	Minimum $\alpha$
0.17	0.14301	0.145
$\beta_1$	$\frac{\beta_1 - (\gamma + \mu)}{1 - \gamma}$	Minimum $\alpha$
0.35	0.32857	0.33
0.6	0.58631	0.6
0.8	0.7925	0.8

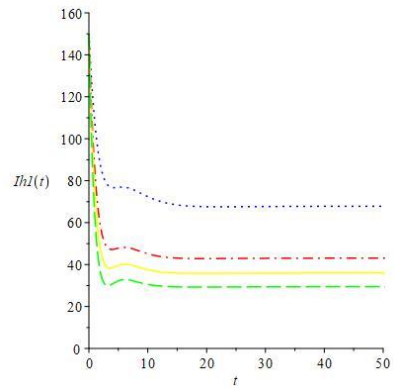
Tabel 11. Variasi titik ekuilibrium untuk  $\alpha = 0.4; 0.66; 0.8; 0.99$

$\alpha$	$S^*$	$I^*$	$T^*$	$I_b^*$	$V_b$
0,4	13,19	54,46	268,84		
0,66	13,32	44,07	274,1		
0,8	13,42	35,27	278,57	4370,19	445.6
0,99	13,5	28,83	281,83		

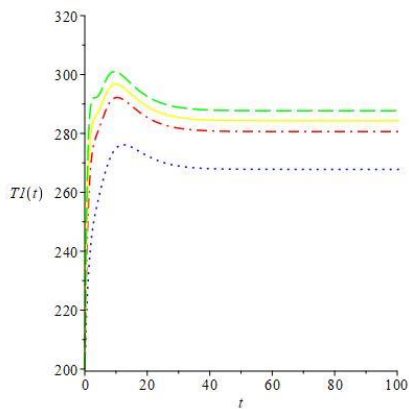
Terlihat bahwa populasi manusia rentan  $S(t)$  pada Gambar 8a mengalami kenaikan sampai waktu  $t$  tertentu yang disebabkan karena adanya penambahan individu manusia rentan terhadap penyakit. Setelah itu, mengalami penurunan yang disebabkan sebagian manusia terinfeksi virus flu burung dan sebagian mengalami kematian alami. Pada Gambar 8 mengalami dinamika hingga konstan di titik  $S(t) = 13.19; 13.32; 13.42; 13.5$ . Ukuran populasi manusia terinfeksi  $I(t) = Ih(t)$  pada Gambar 8b mengalami penurunan karena sebagian dari manusia terinfeksi menjalani *treatment* dan sebagian sembuh oleh kekebalan alaminya serta sebagian meninggal akibat terinfeksi virus flu burung. Kemudian mengalami kenaikan sampai waktu  $t$  tertentu karena adanya penambahan individu dari kelompok manusia rentan yang terinfeksi virus flu burung pada waktu  $t$  tertentu. Pada Gambar 8 sistem mengalami dinamika hingga konstan di titik  $I(t) = 54.46; 44.07; 35.27; 28.83$ . Ukuran populasi manusia yang menjalani *treatment*  $T(t)$  pada Gambar 10a mengalami kenaikan akibat penambahan individu dari kelompok manusia terinfeksi, kemudian mengalami penurunan yang disebabkan sebagian dari manusia yang menjalani *treatment* berangsur-angsur pulih serta sebagian mengalami kematian alami pada waktu  $t$  tertentu. Pada Gambar 8, sistem mengalami dinamika hingga konstan di titik  $T(t) = 268.84; 274.1; 278.57; 281.83$ . Ukuran populasi unggas terinfeksi  $I_b(t)$  pada Gambar 8d mengalami kenaikan hingga konstan di satu titik  $I_b(t) = 4370,19$ . Kenaikan tersebut dikarenakan adanya penambahan unggas rentan yang terinfeksi virus flu burung.. Dapat dilihat bahwa penyakit tidak akan hilang saat  $r_0 > 1$  pada populasi unggas, sehingga diperlukan adanya tindakan yang dapat menghilangkan wabah atau endemik virus flu burung. Ukuran populasi unggas rentan yang divaksinasi  $V_b(t)$  pada Gambar 8 (e) mengalami penurunan sampai waktu  $t$  tertentu karena adanya penambahan unggas rentan yang diberikan vaksinasi dan meninggal akibat terjangkiti virus flu burung hingga konstan pada waktu  $t$  tertentu.



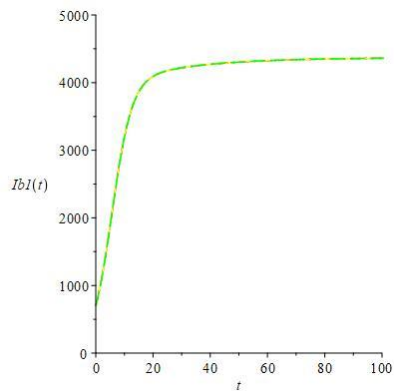
(a) Grafik kelas  $S$  terhadap  $t$



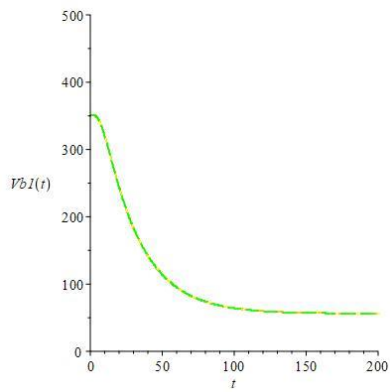
(b) Grafik kelas  $Ih$  terhadap  $t$



(c) Grafik kelas  $T$  terhadap  $t$

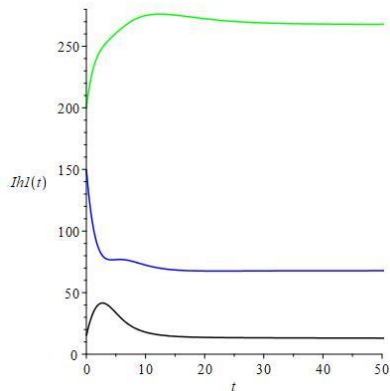


(d) Grafik kelas  $Ib$  terhadap  $t$

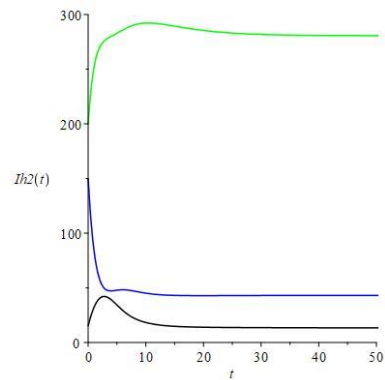


(e) Grafik  $V_b$  terhadap  $t$

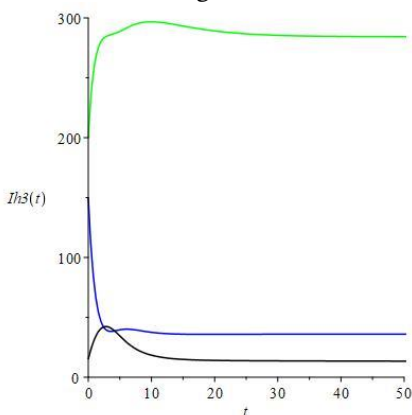
Gambar 8. Dinamika banyaknya populasi (a)  $S$ , (b)  $I$ , (c)  $T$ , (d)  $I_b$  dan (e)  $V_b$  terhadap waktu  $t$  dengan  $\beta_b = 0.35$ ,  $\beta_1 = 0.35$  dan  $\alpha = 0.4; 0.66; 0.8; 0.99$



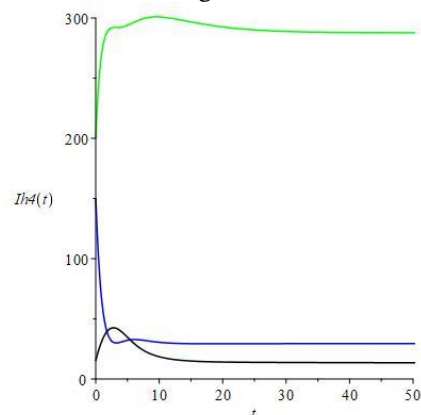
(a) Grafik kelas  $S(t)$ ,  $Ih(t)$  dan  $T(t)$  dengan  $\alpha = 0.4$



(b) Grafik kelas  $S(t)$ ,  $Ih(t)$  dan  $T(t)$  dengan  $\alpha = 0.66$



(c) Grafik kelas  $S(t)$ ,  $Ih(t)$  dan  $T(t)$  dengan  $\alpha = 0.8$



(d) Grafik kelas  $S(t)$ ,  $Ih(t)$  dan  $T(t)$  dengan  $\alpha = 0.99$

Gambar 9. Banyak populasi  $S(t)$ ,  $Ih(t)$  dan  $T(t)$  terhadap waktu  $t$  dengan (a)  $\alpha = 0.4$  (b)  $\alpha = 0.66$  (c)  $\alpha = 0.8$  dan (d)  $\alpha = 0.99$

Pada Gambar 9 terlihat bahwa banyak individu kelas manusia menjalani *treatment*  $T(t)$  mempengaruhi kelas  $S(t)$  dan  $Ih(t)$ . Artinya, apabila  $T(t)$  mengalami kenaikan yang disebabkan adanya penambahan manusia terinfeksi yang menjalani *treatment* maka kelas manusia rentan  $S(t)$  ikut mengalami kenaikan, dikarenakan adanya penambahan individu manusia yang telah sembuh dan kehilangan kekebalan. Kemudian, apabila  $T(t)$  mengalami kenaikan maka kelas manusia terinfeksi  $Ih(t)$  mengalami penurunan dan begitupun sebaliknya. Beberapa kemungkinan tersebut terjadi dikarenakan pada proses *treatment* membutuhkan waktu yang cukup lama agar dinyatakan individu telah sembuh dari penyakit virus flu burung.

Berdasarkan Gambar 8, dengan  $\beta_b = 0.35$ ,  $\beta_1 = 0.35$  dan memvariasikan nilai  $\alpha = 0.4; 0.66; 0.8; 0.99$  terlihat bahwa grafik menuju ke titik ekuilibrium bebas penyakit ( $R_0 < 1$ ) dan tidak terjadi epidemi. Diperoleh fakta bahwa pemberian *treatment*  $\alpha = 0.4; 0.66; 0.8; 0.99 > 0.45$  maka populasi manusia terinfeksi  $Ih(t)$  akan menurun dan penyakit flu burung akan hilang pada populasi manusia.

Berdasarkan pembahasan di atas, diperoleh fakta bahwa hasil penelitian ini sesuai dengan penelitian yang dilakukan oleh Tasmi & Nuraini (2016) yang menyatakan bahwa semakin besar pemberian *treatment* maka populasi manusia terinfeksi flu burung ( $Ih(t)$ ) semakin menurun atau berkurang.

## SIMPULAN

Model matematika tentang penyebaran virus flu burung dengan *treatment* pada manusia dalam populasi konstan sebagai berikut.

$$\frac{dS}{dt} = (\mu + \theta)P - \left(\frac{\beta I_b}{P} + \frac{\beta_1 I}{P} + \mu + \theta\right)S - \theta I - \theta T$$

$$\frac{dI}{dt} = \left(\frac{\beta I_b}{P} + \frac{\beta_1 I}{P}\right)S - (\alpha + \mu + \gamma_1)I$$

$$\frac{dT}{dt} = \alpha I - (\mu + \eta)T$$

$$\frac{dI_b}{dt} = \left[\beta_2 - \left(\frac{\beta_2 V_b}{K} + \frac{\beta_2 I_b}{K} + \mu_b\right)\right]I_b$$

$$\frac{dV_b}{dt} = \delta \rho K - \delta \rho I_b - (\delta \rho + \mu_b)V_b$$

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh angka rasio reproduksi dasar manusia  $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta_1}{\alpha + \mu + \gamma_1}$  dan unggas  $r_0 = \frac{\beta_2}{\delta \rho + \mu_b}$ . Analisis yang telah dilakukan juga menghasilkan tiga titik ekuilibrium yaitu (a) titik ekuilibrium  $P_0$  (b) titik ekuilibrium  $P_0$  dan  $P_1$  serta (c) titik ekuilibrium  $P_0$ ,  $P_1$  dan  $P_2$ . Setelah diperoleh titik ekuilibrium, dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit  $P_0$  stabil asimtotik lokal apabila  $\mathcal{R}_0 < 1$  dan  $r_0 < 1$ , titik ekuilibrium  $P_0$  tidak stabil dan  $P_1$  stabil asimtotik lokal apabila  $\mathcal{R}_0 > 1$  dan  $r_0 < 1$ , dan titik ekuilibrium  $P_0$  dan  $P_1$  tidak stabil, sedangkan  $P_2$  stabil asimtotik lokal apabila  $\mathcal{R}_0 > 1$ ,  $r_0 > 1$ ,  $\frac{(\mu_b + \delta \rho)\rho}{\delta} > 1$  dan  $\frac{K\rho^2}{2\mu_b} \cdot \frac{(\mu_b + \delta \rho)\rho}{\delta} > 1$ .

Diperoleh beberapa hasil setelah simulasi dilakukan yaitu semakin kecil peluang kontak antara unggas terinfeksi dengan unggas rentan dan peluang kontak antara manusia terinfeksi dengan manusia rentan maka populasi manusia terinfeksi virus flu burung semakin kecil. Kemudian, apabila semakin besar pemberian *treatment* pada manusia terinfeksi maka populasi manusia terinfeksi semakin kecil dan berlaku sebaliknya. Kemudian diperoleh proporsi minimum pemberian *treatment* pada manusia terinfeksi untuk mencegah meluasnya virus flu burung ialah  $\alpha > \frac{\beta_1 - (\gamma + \mu)}{1 - \gamma}$ .

## DAFTAR PUSTAKA

- Adisasmitho, W., Aisyah, D. N., Aditama, T. Y., Kusriastuti, R., Trihono, A. Suwandono, O. D. Sampurno, Prasenohadi, N. A. Sapada, M. J. N. Mamahit, A. Swenson, N. A. Dreyer & Coker, R. (2013). Human influenza A H5N1 in Indonesia: health care service-associated delays in treatment initiation. *BMC Public Health*, 13(571), 1-6.
- Brown, I., Kuiken, T., Mulatti, P., Smietanka, K., Staubach, C., Stroud, D., Therkildsen, O. R., Willeberg, P., Baldinelli, F., Verdonck, F., & Adlhoch, C. (2017). Avian influenza overview September – November 2017. *EFSA Journal*, 15(12) 1-70.
- Che, S., Xue, Y., & Ma, L. (2014). The stability of highly pathogenic avian influenza epidemic model with saturated contact rate. *Applied Mathematics*, 5, 3365-3371.
- Chong, N. S., Dionne, B., & Smith, R. (2016). An avian-only filippov model incorporating culling of both susceptible and infected birds in combating avian influenza. *Journal Mathematical Biology*, 73(3) 751-784.
- Derouich, M., & Boutayeb, A. (2008). An avian influenza mathematical model. *Jurnal Applied Mathematic Sciences*, 2(36), 1749-1760.
- Kim, S., Lee, J., & Jung, E. (2016). Mathematical model of transmission dynamics and optimal control strategies for 2009 A/H1N1 influenza in the Republic of Korea. *Journal of Theoretical Biology*, 412, 74-85.
- Kimbir, A. R., Aboiyar, T., & Okolo, P. N. (2014). A model analysis for the transmission dynamics of avian influenza. *Mathematical Theory and Modelling*, 4(13), 15-28.
- Kharis, M., & Arifudin, R. (2017). Mathematical model of seasonal influenza with treatment in constan population. *Journal of Physics: Conference Series*. doi:10.1088/1742-6596/824/1/012034
- Mangiri, A., Luliano, A. D., Wahyuningrum, Y., Praptiningsih, C. Y., Lafond, K. E., Storms, A. D., Samaan, G., Ariawan, I., Soeharno, N., Kreslake, J. M., Storey, J. D., & Uyeki, T. M. (2017). Physician's knowledge, attitudes, and practices regarding seasonal influenza, pandemic influenza, and highly pathogenic avian influenza A (H5N1) virus infections of humans in Indonesia. *Influenza and Other Respiratory Viruses*, 11(1), 93-99.
- Shimizu, K., Wulandari, L., Poetranto, E. D., Setyoningrum, R. A., Yudhawati, R., Sholikhah, A., Natri, A. M., Poetranto, A. L., Candra, A. Y. R., Puruhito, E. F., Takahara, Y., Yamagishi, Y., Yamaoke, M., Hotta, H., Ustumi, T., Lusida, M. I., Soetjpto, Shimizu, Y. K., Soegiarto, G., & Mori, Y. (2016). Seroevidence for a high prevalence of subclinical infection with avian



- influenza A (H5N1) virus among workers in a live-poultry market in Indonesia. *The Journal of Infectious Disease*, 214(12), 1929-1936
- Thangavel, R. R., & Bouvier, N. M. (2014). Animal models for influenza virus pathogenesis, transmission, and immunology. *Journal of Immunological Methods*, 410, 60-79.
- Tasmi & Nuraini, N. (2016). Optimal vaccination and treatment schedules in a deterministic avian influenza model. *Journal of Mathematical and Fundamental Sciences*, 48(2), 164-177.
- Waliya, P., Gupta, D. K., Sheikh, A. A., Dar, R. R., Bhagat, R., & Mishra, A. (2017). Avian influenza: a pandemic threat. *The Pharma Innovation Journal*, 6(11), 526-531.
- World Health Organization. (2017). Cumulative number of confirmed human cases for avian influenza A (H5N1) reported to WHO, 2003-2018. Tersedia di [http://www.who.int/influenza/human\\_animal\\_interface/H5N1\\_cumulative\\_table\\_archives/en/](http://www.who.int/influenza/human_animal_interface/H5N1_cumulative_table_archives/en/) [diakses 6-2-2018]