

PEMODELAN MATEMATIKA PADA EPIDEMI INFLUENZA DENGAN STRATEGI VAKSINASI

M Kharis[✉] AN Cahyono

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Agustus 2015
Disetujui September 2015
Dipublikasikan Oktober 2015

Keywords:
equilibrium point,
equilibrium point stability,
the minimum proportion of
vaccination

Abstrak

Pada tahun 2009 merebak epidemi flu burung kemudian diikuti epidemi flu babi. Epidemi flu tersebut menyebabkan beberapa kasus kematian dan banyak manusia yang masuk ke rumah sakit. Salah satu usaha yang dilakukan untuk menanggulangi wabah ini adalah dengan melakukan vaksinasi. Vaksinasi dilakukan terhadap orang yang belum terkena influenza. Melihat fakta bahwa penyakit ini bersifat epidemik, maka sangat dimungkinkan untuk membentuk model matematika dari kasus influenza tersebut. Model yang dihasilkan berbentuk SIRS dengan populasi konstan. Dalam penelitian ini digunakan metode tinjauan pustaka, analisis, dan pembuatan simulasi. Simpulan yang diperoleh berupa model matematika dan analisisnya serta nilai minimal persentase individu yang divaksinasi supaya wabah tidak meluas.

Abstract

In 2009, bird flu epidemic outbreak and it is followed by swine flu epidemic. Flu epidemic causes many mortality in human and more of human must be treated in hospital. One of the efforts to combat this plague is vaccination. Vaccination was given to susceptible human. From the fact that the disease is epidemic, it is possible to establish a mathematical model of the influenza cases. The resulting model is SIRS with constant population. In this study, it was used methods include literature reviews, analysis, and simulation. The conclusions obtained in the form of mathematical models and analysis as well as the minimum percentage of individuals who are vaccinated so that the plague has not spread.

© 2015 Universitas Negeri Semarang

[✉] Alamat korespondensi:
E-mail: mkharismcc@gmail.com

PENDAHULUAN

Pada tahun 2009 merebak epidemi flu burung kemudian diikuti epidemi flu babi. Epidemi flu tersebut menyebabkan beberapa kasus kematian dan banyak manusia yang masuk ke rumah sakit (Jansen *et al* 2007 ; Yang *et al* 2009). Casagrandi *et al* (2006) menyebutkan bahwa virus yang menyebabkan epidemi flu dapat dibedakan dalam tiga tipe berbeda yaitu tipe A, B, dan C. Virus tipe A secara epidemiologi sangat berpengaruh terhadap kehidupan manusia karena dapat menggabungkan gen-gennya dengan strain-strain virus yang beredar di populasi binatang seperti burung, babi, dan kuda. Virus tipe A mempunyai kemampuan untuk bermutasi atau menghasilkan strain-strain baru sehingga manusia yang sudah sembuh dari epidemi flu mempunyai kemungkinan untuk tertular lagi.

Salah satu usaha yang dilakukan untuk menanggulangi wabah ini adalah dengan melakukan vaksinasi. Vaksinasi dilakukan terhadap orang yang belum terkena influenza. Carman *et al* (2000) menyebutkan bahwa vaksinasi memberikan kontribusi besar dalam penurunan jumlah pasien flu. Dalam Govaert *et al* (1994) disebutkan bahwa ada penurunan pasien flu pada orang dewasa setelah dilakukan vaksinasi. Kwong *et al* (2009) menyatakan bahwa vaksinasi mempunyai potensi yang lebih tinggi dalam mengurangi jumlah penderita flu dibandingkan dengan penggunaan antibiotik. Potter *et al* (1997) juga menyatakan bahwa vaksinasi direkomendasikan sebagai salah satu strategi untuk mencegah wabah influenza pada orang usia lanjut dalam jangka waktu yang panjang. Bridges *et al* (2000) menyatakan bahwa vaksinasi pada orang usia produktif (< 65 tahun) dapat mengurangi tingkat penularan influenza (jumlah penderita flu). Nichol *et al* (2003) menyebutkan bahwa pada orang tua, vaksinasi terhadap influenza dikaitkan dengan penurunan risiko rawat inap untuk penyakit jantung, penyakit serebrovaskular, dan influenza serta resiko kematian dari semua penyebab selama musim influenza. Temuan ini menyoroti manfaat dari upaya vaksinasi dan dukungan untuk meningkatkan tingkat vaksinasi di kalangan orang tua.

Dalam artikel ini, masalah yang akan dibahas model matematika dari wabah influenza dengan strategi vaksinasi. Pembahasana meliputi analisa terhadap model yang dihasilkan untuk menentukan titik ekuilibrium dan kestabilan titik ekuilibrium dari model matematika tersebut. Selanjutnya diberikan simulasi dengan nilai-nilai parameter tertentu.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini yaitu tinjauan pustaka, Analisis, dan penyusunan simulasi. Langkah-langkah yang akan dilakukan dalam penelitian ini meliputi: (a) pengumpulan fakta-fakta terkait penyebaran wabah influenza dari tulisan-tulisan yang relevan, (b) penyusunan asumsi-asumsi sebagai pendukung dan pelengkap dalam penyusunan model matematikanya, (c) pembentukan model matematika, (d) analisis terhadap model dimulai dengan mencari titik kesetimbangan dari model kemudian memeriksa kestabilan titik kesetimbangan tersebut, (e) simulasi numerik dari hasil-hasil analisis untuk memberikan gambaran geometris dari hasil analisis tersebut, dan (f) penarikan kesimpulan.

Fakta-fakta yang berhasil dikumpulkan dari berbagai sumber meliputi (1) Dalam Casagrandi *et al* (2006) disebutkan bahwa virus yang menyebabkan epidemi flu dapat dibedakan dalam tiga tipe berbeda yaitu tipe A, B, dan C. Virus tipe A secara epidemiologi sangat berpengaruh terhadap kehidupan manusia. Virus tipe A mempunyai kemampuan untuk bermutasi atau menghasilkan *strain-strain* baru sehingga manusia yang sudah sembuh dari epidemi flu mempunyai kemungkinan untuk tertular lagi (2) dalam Carman *et al* (2000), Govaert *et al* (1994), Kwong *et al* (2009), Potter *et al* (1997), Bridges *et al* (2000), dan Nichol *et al* (2003) disebutkan bahwa bahwa vaksinasi memberikan kontribusi besar dalam penurunan jumlah pasien flu pada berbagai usia.

Asumsi-asumsi yang ditambahkan dalam penyusunan model matematika antara lain (1) Populasi diasumsikan konstan dan homogen sehingga setiap individu yang rentan mempunyai

kemungkinan yang sama untuk terinfeksi. (2) Semua individu yang lahir merupakan individu yang rentan terhadap penyakit. (3) Kematian murni (bukan karena virus) terjadi pada semua kelas dengan laju yang sama pada masing-masing kelas dalam suatu populasi. (4) Laju kematian murni pada setiap kelas sama dan diasumsikan sama dengan laju kelahiran. (4) Tidak terjadi kematian karena penyakit. (5)

Vaksinasi diberikan kepada setiap individu pada kelas rentan tanpa membedakan usia.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Daftar variabel-variabel dan parameter-parameter yang ada dalam model matematika diberikan dalam tabel 1 dan tabel 2 di bawah ini.

Tabel 1. Daftar Variabel-variabel

No	Variabel	Keterangan
	N	Jumlah populasi manusia
	S	Jumlah manusia rentan
	I	Jumlah manusia terinfeksi
	R	Jumlah manusia yang sembuh

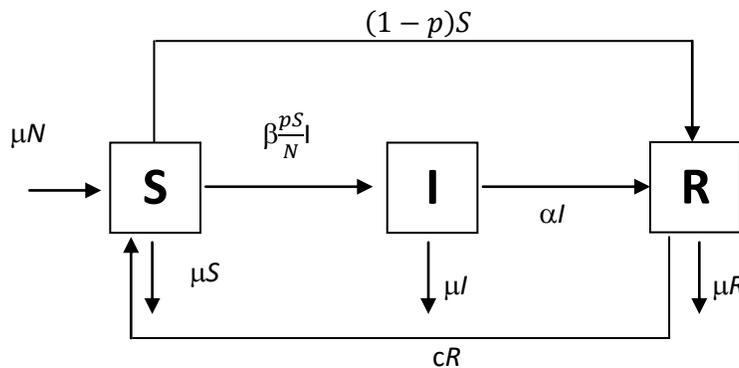
Tabel 2. Daftar Parameter-parameter

No	Parameter	Keterangan
	μ	Laju kelahiran pada populasi yang diasumsikan sama dengan laju kematian
	β	Peluang terjadinya kontak infeksi manusia yang rentan dengan manusia yang terinfeksi
	α	Laju kesembuhan tiap individu yang sakit
	c	Laju penurunan kekebalan tiap individu
	$1 - p$	Proporsi individu rentan yang divaksinasi
	p	Proporsi individu rentan yang tidak divaksinasi

Nilai-nilai parameter di atas adalah positif (> 0) kecuali p dapat bernilai nol.

Berdasarkan fakta-fakta dan asumsi-asumsi di atas disusun diagram transfer penyebaran wabah

influenza dengan strategi vaksinasi. Gambar diagram transfer diberikan dalam Gambar 1.



Gambar 1. Diagram Transfer Model Influenza dengan Strategi Vaksinasi

Model matematika yang dibentuk merupakan suatu sistem persamaan diferensial diberikan di bawah ini.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu N + cR - \mu S - \beta \frac{pS}{N} I - (1-p)S \\ \frac{dI}{dt} &= \beta \frac{pS}{N} I - (\mu + \alpha)I \quad (1) \\ \frac{dR}{dt} &= (1-p)S + \alpha I - (\mu + c)R \\ S + I + R &= N \end{aligned}$$

Analisa Model Matematika

Dari Sistem (1) diperoleh $\frac{dN}{dt} = 0$.

Jadi $N(t) = k > 0$ dengan k merupakan bilangan bulat positif.

Apabila masing-masing sisi pada masing-masing persamaan Sistem (1) dibagi dengan N , diperoleh Sistem (2) berikut.

$$\frac{d(\frac{S}{N})}{dt} = \mu + c \frac{R}{N} - \mu \frac{S}{N} - \beta p \frac{S}{N} \frac{I}{N} - (1-p) \frac{S}{N}$$

$$\frac{d(\frac{I}{N})}{dt} = \beta p \frac{S}{N} \frac{I}{N} - (\mu + \alpha) \frac{I}{N} \quad (2)$$

$$\frac{d(\frac{R}{N})}{dt} = (1-p) \frac{S}{N} + \alpha \frac{I}{N} - (\mu + c) \frac{R}{N}$$

$$\frac{S}{N} + \frac{I}{N} + \frac{R}{N} = 1$$

Didefinisikan $s = \frac{S}{N}$, $i = \frac{I}{N}$, dan $r = \frac{R}{N}$. Sistem (2)

dapat kita tuliskan menjadi Sistem (3) berikut.

$$\frac{ds}{dt} = \mu + cr - \mu s - \beta psi - (1-p)s$$

$$\frac{di}{dt} = \beta psi - (\mu + \alpha)i \quad (3)$$

$$\frac{dr}{dt} = (1-p)s + \alpha i - (\mu + c)r$$

$$s + i + r = 1$$

Sistem yang akan dianalisa adalah Sistem (3) karena mempunyai bentuk yang lebih sederhana dan Sistem (3) ekuivalen dengan Sistem (1) sehingga hasil yang diperoleh dari proses analisa dapat digunakan untuk mendapatkan hasil analisa Sistem (1).

Teorema 1.

Diberikan $R_0 = \frac{\beta p(\mu+c)}{(\mu+\alpha)[\mu+c+(1-p)]}$.

Berdasarkan nilai R_0 tersebut,

1. Jika $R_0 \leq 1$ maka Sistem (3) hanya mempunyai satu titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit $Q_0 = (s, i, r) = (\frac{\mu+c}{\mu+c+(1-p)}, 0, \frac{1-p}{\mu+c+(1-p)})$.
2. Jika $R_0 > 1$ maka Sistem (3) hanya mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit P_0 dan titik ekuilibrium tak bebas penyakit $Q_1 = (s, i, r) = (\frac{\mu+\alpha}{\beta p}, \frac{\beta p(\mu+c)-(\mu+\alpha)[\mu+c+(1-p)]}{\beta p(\mu+\alpha+c)}, \frac{(1-p)(\mu+\alpha)+\alpha[\beta p-(\mu+\alpha)]}{\beta p(\mu+\alpha+c)})$.

Bukti:

Titik ekuilibrium ditentukan dengan membuat

$\frac{ds}{dt}, \frac{di}{dt}$, dan $\frac{dr}{dt}$ pada Sistem (3) menjadi nol. Diperoleh Sistem (4) berikut ini.

$$\begin{aligned} \mu + cr - \mu s - \beta psi - (1-p)s &= 0 \\ \beta psi - (\mu + \alpha)i &= 0 \quad (4) \\ (1-p)s + \alpha i - (\mu + c)r &= 0 \\ s + i + r &= 1 \end{aligned}$$

Dari persamaan kedua Sistem (4) diperoleh $\beta psi - (\mu + \alpha)i = 0 \Leftrightarrow i[\beta ps - (\mu + \alpha)] = 0$
 $\Leftrightarrow i = 0 \vee s = \frac{\mu+\alpha}{\beta p}$.

Kasus $i = 0$:

Saat $i = 0$, dari persamaan ketiga Sistem (4) diperoleh $r = \frac{(1-p)s}{\mu+c}$.

Nilai r tersebut disubstitusikan ke persamaan $s + r = 1$, diperoleh $s = \frac{\mu+c}{\mu+c+(1-p)}$.

Jadi $r = \frac{1-p}{\mu+c+(1-p)}$.

Dari perhitungan di atas, diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit

$$Q_0 = (s, i, r) = (\frac{\mu+c}{\mu+c+(1-p)}, 0, \frac{1-p}{\mu+c+(1-p)})$$

Kasus $i \neq 0$:

Dari analisa di atas, jelas $s = \frac{\mu + \alpha}{\beta p}$. Nilai s tersebut disubstitusikan ke persamaan ketiga Sistem (4), diperoleh $r = \frac{(1-p)(\mu + \alpha) + \alpha \beta p i}{\beta p(\mu + c)}$.

Nilai r tersebut disubstitusikan ke persamaan pertama Sistem (4), diperoleh

$$i = \frac{\beta p(\mu + c) - (\mu + \alpha)[\mu + c + (1-p)]}{\beta p(\mu + \alpha + c)}$$

Jelas $i > 0$ saat $R_0 > 1$. Hal Ini berakibat $r > 0$ karena $i > 0$.

$$\text{Jadi } r = \frac{(1-p)(\mu + \alpha) + \alpha[\beta p - (\mu + \alpha)]}{\beta p(\mu + \alpha + c)}$$

Dari analisa di atas diperoleh titik ekuilibrium tidak bebas penyakit

$$Q_1 = (s, i, r) = \left(\frac{\mu + \alpha}{\beta p}, \frac{\beta p(\mu + c) - (\mu + \alpha)[\mu + c + (1-p)]}{\beta p(\mu + \alpha + c)}, \frac{(1-p)(\mu + \alpha) + \alpha[\beta p - (\mu + \alpha)]}{\beta p(\mu + \alpha + c)} \right)$$

Tahapan selanjutnya adalah analisa kestabilan titik ekuilibrium Sistem (3). Dalam analisa tersebut, digunakan matriks jacobian dari Sistem (3). Adapun matriks jacobian dari Sistem (3) diberikan sebagai berikut.

$$J(Q) = \begin{bmatrix} -\mu - \beta p i - (1-p) & -\beta p s & c \\ \beta p i & \beta p s - (\mu + \alpha) & 0 \\ 1-p & \alpha & -(\mu + c) \end{bmatrix}$$

dengan $Q = (s, i, r)$. Kestabilan titik ekuilibrium diberikan pada Teorema 2.

Teorema 2.

$$\text{Diberikan } R_0 = \frac{\beta p(\mu + c)}{(\mu + \alpha)[\mu + c + (1-p)]}$$

Berdasarkan nilai R_0 tersebut,

1. Jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit Q_0 stabil asimtotis lokal.
2. Jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit P_0 tidak stabil dan titik ekuilibrium tak bebas penyakit Q_1 stabil asimtotis lokal.

Bukti:

Nilai eigen dari matriks $J(Q_0)$ adalah $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = -[\mu + c + (1-p)]$ dan

$$\lambda_3 = \frac{\beta p(\mu + c) - (\mu + \alpha)[\mu + c + (1-p)]}{\mu + c + (1-p)} = \frac{R_0 - 1}{(\mu + \alpha)(\mu + c + (1-p))^2}$$

Jelas λ_1 dan λ_2 selalu bernilai negatif karena parameter-parameter yang digunakan bernilai positif (khusus p dapat bernilai 0), sedangkan nilai λ_3 bernilai negatif apabila $R_0 < 1$, bernilai 0 apabila $R_0 = 1$, dan bernilai positif apabila $R_0 > 1$. Untuk nilai $R_0 = 1$ tidak diikutkan dalam analisa selanjutnya karena tidak memenuhi kondisi titik hiperboliks. Berdasarkan hasil analisa tersebut, diperoleh bahwa titik Q_0 stabil asimtotis lokal apabila $R_0 < 1$ dan tidak stabil apabila $R_0 > 1$.

Persamaan karakteristik dari matriks $J(Q_1)$ adalah

$$\frac{1}{\mu + \alpha + c} [(\lambda + \mu)(k_2 \lambda^2 + k_1 \lambda + k_0)] = 0$$

dengan $k_2 = \mu + \alpha + c$,

$k_1 = \beta p(\mu + c) + c(\mu + c + 1 - p)$, dan

$$k_0 = (\mu + \alpha + c)[\beta p(\mu + c) - (\mu + \alpha)(\mu + c + 1 - p)].$$

Karena parameter-parameter dalam model bernilai positif (kecuali p dapat bernilai nol) maka k_2 dan k_1 selalu positif untuk segala kondisi R_{0a} , sedangkan nilai k_0 bernilai positif apabila $R_{0a} > 1$. Persamaan karakteristik tersebut memberikan nilai-nilai eigen:

$$\lambda_1 = -\mu, \lambda_2 = \frac{-k_1 - \sqrt{k_1^2 - 4 \cdot k_2 \cdot k_0}}{2k_2} \text{ dan } \lambda_3 = \frac{-k_1 + \sqrt{k_1^2 - 4 \cdot k_2 \cdot k_0}}{2k_2}$$

Jelas $\lambda_1 < 0$ dan $k_1^2 > k_1^2 - 4 \cdot k_2 \cdot k_0$ karena $4 \cdot k_2 \cdot k_0 > 0$. Jadi λ_2 dan λ_3 selalu mempunyai bagian real negatif apabila $R_0 > 1$. Jadi Q_1 stabil asimtotis lokal apabila $R_0 > 1$.

Simulasi Model Matematika

Simulasi diberikan untuk memberikan gambaran geometris terkait dengan hasil analisa yang telah dilakukan. Simulasi dibuat dengan menggunakan bantuan program Maple 12 dan dilakukan dengan memberikan nilai-nilai untuk masing-masing parameter sesuai dengan kondisi R_0

dengan teorema yang telah diberikan di atas. Beberapa Nilai-nilai parameter yang diberikan merupakan nilai-nilai yang diasumsikan. Dalam model ini diasumsikan populasi tetap (konstan), hal ini memberikan dampak pada pemilihan nilai parameter yang mungkin tidak sesuai dengan fakta di lapangan. Nilai parameter yang dimaksud adalah nilai laju kelahiran dan laju kematian tiap individu yang dianggap sama padahal kenyataannya adalah berbeda. Dalam Casagrandi *et al* (2006) diberikan beberapa nilai parameter dalam Tabel 3.

Tabel 3. Nilai beberapa parameter dalam Casagrandi *et al* (2006)

Parameter	Min	Max
μ	$\frac{1}{80}$ per tahun	$\frac{1}{40}$ per tahun
α	$\frac{365}{7}$ per tahun	$\frac{365}{2}$ per tahun
$c = \gamma$	$\frac{1}{5}$ per tahun	$\frac{1}{2}$ per tahun

Nilai $\mu^{-1} = 40$ tahun sampai 80 tahun artinya rata-rata usia hidup manusia adalah 40 tahun sampai 80 tahun. Nilai $\alpha^{-1} = \frac{2}{365}$ tahun sampai $\frac{7}{365}$ tahun artinya rata-rata masa infeksi adalah 2 sampai 7 hari. Nilai $c^{-1} = \gamma^{-1} = 2$ tahun sampai 5 tahun artinya rata-rata waktu di mana virus yang mewabah mendominasi (waktu sebelum muncul virus baru yang mendominasi). Dalam artikel ini, nilai parameter dalam Tabel 3 yang akan digunakan hanya nilai α minimum dan c maksimum. Pemilihan ini dilakukan dengan mengambil rentang waktu masa infeksi lebih panjang dan periode munculnya virus yang baru lebih pendek. Hal ini dilakukan

mengingat wabah ini perlu adanya tindakan secepatnya sehingga diambil nilai parameter tersebut. Dalam artikel ini, nilai-nilai parameter diukur dalam satuan hari sehingga $\alpha = \frac{1}{7} = 0.14286$ per hari dan $c = \frac{1}{2 \times 365} = 0.00137$ per hari. Diasumsikan nilai $\mu = \frac{1}{100} = 0.04$ artinya rata-rata ada 4 bayi yang lahir dan ada 4 orang yang meninggal tiap 100 hari. Arti dari $\beta = 0,4$ adalah rata-rata ada 4 manusia rentan yang menjadi terinfeksi dari setiap 10 kontak yang terjadi antara manusia rentan dengan manusia yang terinfeksi. Nilai $p = 0.9$ artinya tiap hari ada 90% dari jumlah keseluruhan manusia rentan yang tidak divaksinasi. Jadi nilai $1 - p = 0.1$ artinya tiap hari ada 10% dari jumlah keseluruhan manusia rentan yang divaksinasi.

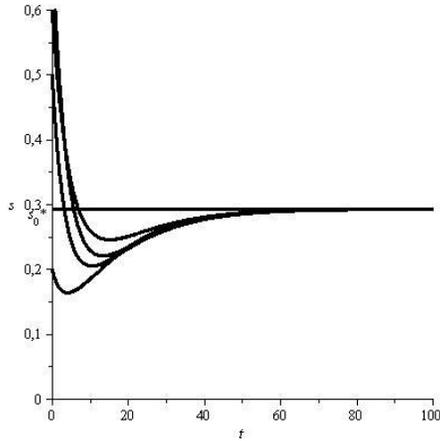
Simulasi untuk $R_0 < 1$.

Nilai-nilai parameter untuk simulasi saat $R_0 < 1$ diberikan dalam Tabel 4.

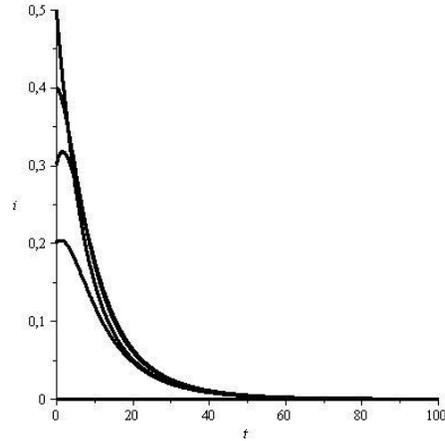
Tabel 4. Nilai-nilai parameter untuk $R_0 < 1$

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
β	0.4	c	0.00137
μ	0.04	p	0.9
α	0.14286	$1 - p$	0.1

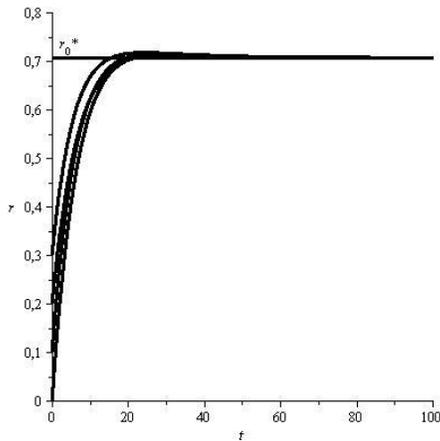
Dari Tabel 4 diperoleh nilai $R_0 = 0.57612 < 1$ dan titik ekuilibrium $Q_0 = (s_0, i_0, r_0) = (0.29264, 0, 0.70736)$. Grafik-grafik dari nilai $s, i,$ dan r disajikan pada Gambar 2, Gambar 3, dan Gambar 4.



Gambar 2. Proporsi manusia yang rentan saat t untuk $R_0 < 1$



Gambar 3. Proporsi manusia yang terinfeksi saat t untuk $R_0 < 1$



Gambar 4. Proporsi manusia yang sembuh saat t untuk $R_0 < 1$

Pada Gambar 2 terlihat bahwa nilai $s(t)$ menuju ke s_0 sepanjang bertambahnya t . Dengan kata lain $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = s_0$. Pada Gambar 3 terlihat bahwa nilai $i(t)$ menuju ke 0 sepanjang bertambahnya t . Dengan kata lain $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0$. Hal ini berarti seiring bertambahnya waktu, jumlah manusia yang terinfeksi semakin berkurang berakibat wabah juga menghilang. Pada Gambar 4 terlihat bahwa nilai $r(t)$ menuju ke r_0 sepanjang

bertambahnya t . Dengan kata lain $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = r_0$. Hal ini berarti seiring bertambahnya waktu, jumlah manusia yang kebal atau sembuh dari penyakit ini sekitar 70% dari total populasi. Hal ini karena laju penularan yang tidak begitu besar dan adanya tindakan vaksinasi pada manusia yang rentan. Pada Gambar 2 sampai dengan Gambar 4 terlihat bahwa $\lim_{t \rightarrow \infty} (s, i, r)(t) = Q_0$. Jadi titik kesetimbangan Q_0 stabil asimtotis lokal.

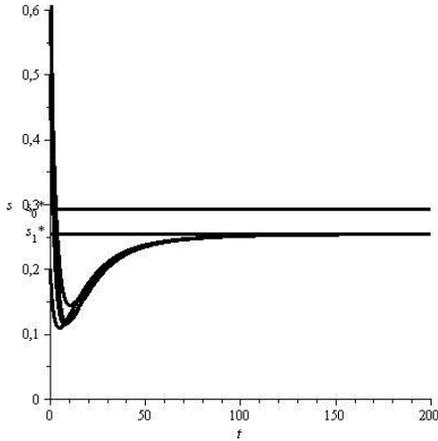
Simulasi untuk $R_0 > 1$.

Nilai-nilai parameter untuk simulasi saat $R_0 > 1$ diberikan dalam Tabel 5.

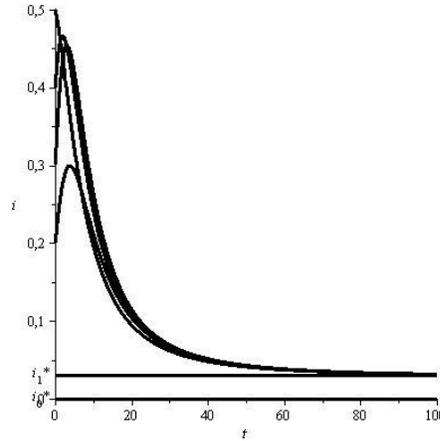
Tabel 5. Nilai-nilai parameter untuk $R_0 > 1$

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
β	0.8	c	0.00137
μ	0.04	p	0.9
α	0.14286	$1 - p$	0.1

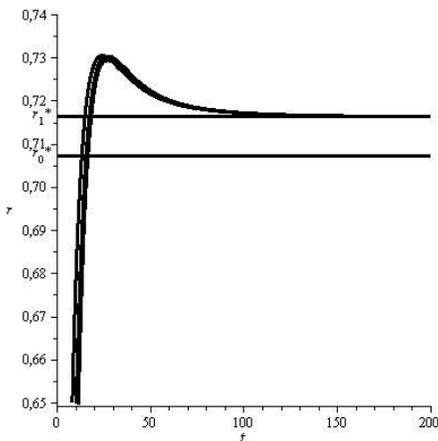
Dari Tabel 5 diperoleh nilai $R_0 = 1.15224 > 1$ dan $Q_1 = (s_1, i_1, r_1) = (0.25397, 0.02967, 0.71636)$. Grafik-grafik dari nilai s , i , dan r disajikan pada Gambar 5, Gambar 6, dan Gambar 7.



Gambar 5. Proporsi manusia yang rentan saat t untuk $R_0 > 1$



Gambar 6. Proporsi manusia yang terinfeksi saat t untuk $R_0 > 1$



Gambar 7. Proporsi manusia yang sembuh saat t untuk $R_0 > 1$

Pada Gambar 5 terlihat bahwa nilai $s(t)$ menuju ke s_1 sepanjang bertambahnya t dan tidak menuju s_0 . Hal ini terlihat dari nilai $s(t)$ untuk $t = 0$ yang dekat dengan s_0 menjauhi s_0 dan menuju s_1 . Dengan kata lain $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = s_1$ dan menjauhi s_0 . Pada Gambar 6 terlihat bahwa nilai $i(t)$ menuju ke i_1 sepanjang bertambahnya t . Dengan kata lain

$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = i_1$. Hal ini berarti seiring bertambahnya waktu, jumlah manusia yang terinfeksi tetap ada berakibat wabah mempunyai kemungkinan untuk meluas. Pada Gambar 7 terlihat bahwa nilai $r(t)$ menuju ke r_1 sepanjang bertambahnya t dan tidak menuju r_0 . Hal ini terlihat dari nilai $r(t)$ untuk $t = 0$ yang dekat dengan r_0 menjauhi r_0 dan menuju r_1 . Dengan kata lain $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = r_1$ dan menjauhi r_0 . Dari Gambar 5 sampai dengan Gambar 7 terlihat bahwa $\lim_{t \rightarrow \infty} (s, i, r)(t) = Q_1$ dan menjauhi Q_0 . Jadi titik kesetimbangan Q_1 stabil asimtotis lokal dan Q_0 tidak stabil.

Penentuan proporsi minimum manusia yang divaksinasi.

Dari Tabel 5 akan dilakukan perubahan nilai $1 - p$ untuk menentukan kapan nilai R_0 berubah dari > 1 menjadi < 1 artinya akan ditentukan nilai $1 - p$ minimum sehingga wabah akan hilang. Tabel perubahan nilai $1 - p$ dan R_0 diberikan dalam Tabel 6 – 9.

Tabel 6. Nilai-nilai $1 - p$ untuk perubahan kondisi nilai R_0 untuk $\beta = 0.7$

p	$1 - p$	R_0	p	$1 - p$	R_0
0	1	0	0.6	0.4	0.215287
0.1	0.9	0.016823	0.7	0.3	0.324745
0.2	0.8	0.037646	0.8	0.2	0.524901
0.3	0.7	0.064085	0.89	0.11	0.931152
0.4	0.6	0.098769	0.9	0.1	1.008221
0.5	0.5	0.146267	1	0	3.828125

Tabel 7. Nilai-nilai $1 - p$ untuk perubahan kondisi nilai R_0 untuk $\beta = 0.8$

p	$1 - p$	R_0	p	$1 - p$	R_0
0	1	0	0.6	0.4	0.246043
0.1	0.9	0.019227	0.7	0.3	0.371138
0.2	0.8	0.043023	0.8	0.2	0.599886
0.3	0.7	0.07324	0.88	0.12	0.987012
0.4	0.6	0.112879	0.9	0.1	1.152253
0.5	0.5	0.167162	1	0	4.375

Tabel 8. Nilai-nilai $1 - p$ untuk perubahan kondisi nilai R_0 untuk $\beta = 0.9$

p	$1 - p$	R_0	p	$1 - p$	R_0
0	1	0	0.6	0.4	0,276798
0.1	0.9	0,02163	0.7	0.3	0,41753
0.2	0.8	0,048401	0.8	0.2	0,674872
0.3	0.7	0,082395	0.86	0.14	0,96549
0.4	0.6	0,126989	0.9	0.1	1,296285
0.5	0.5	0,188057	1	0	4,921875

Tabel 9. Nilai-nilai $1 - p$ untuk perubahan kondisi nilai R_0 untuk $\beta = 1$

p	$1 - p$	R_0	p	$1 - p$	R_0
0	1	0	0.6	0.4	0,307554
0.1	0.9	0,024033	0.7	0.3	0,463922
0.2	0.8	0,053779	0.8	0.2	0,749858
0.3	0.7	0,09155	0.84	0.16	0,94375
0.4	0.6	0,141099	0.9	0.1	1,440316
0.5	0.5	0,208953	1	0	5,46875

Dari Tabel 6 – 9 diperoleh bahwa nilai $1 - p$ minimum untuk menanggulangi wabah apabila diberikan nilai-nilai parameter lain seperti dalam tabel 5 dengan nilai β berkisar dari 0.7 sampai 1 adalah 0,16 artinya minimal ada 16% yang divaksinasi dari jumlah keseluruhan manusia yang rentan agar wabah tidak meluas.

PENUTUP

Model matematika wabah influenza dengan strategi vaksinasi pada manusia yang rentan berbentuk SIRS dengan populasi konstan. Hasil analisa dari model tersebut berupa diperoleh dua titik kesetimbangan dan nilai *reproduction number*

sebagai kriteria untuk melihat kemungkinan meluas dan menghilangnya wabah ini. Diperoleh juga kestabilan dari kedua titik tersebut. Dari hasil pengolahan nilai-nilai parameter yang diberikan diperoleh nilai $1 - p^* \geq 0.16$ maka wabah tidak akan meluas artinya minimal ada 16% yang divaksinasi dari jumlah keseluruhan manusia yang rentan apabila ingin wabah influenza menghilang.

DAFTAR PUSTAKA

- Bridges CB, Thompson WW, Meltzer MI, Reeve GR, Talamonti WJ, Cox NJ, Lilac HA, Hal H, Klimov A & Fukuda K. 2000. Effectiveness and Cost-Benefit of Influenza Vaccination of Healthy Working Adults A Randomized Controlled Trial. *JAMA* 284 (13): 1655 - 1663
- Carman WF, Elder AG, Wallace LA, McAulay K, Walker A, Murray GD & Stott DJ. 2000. Effects of influenza vaccination of health-care workers on mortality of elderly people in long-term care: a randomised controlled trial. *The Lancet* 355 (9198): 93 - 97.
- Casagrandi R, Bolzoni L, Levin SA & Andreasen V. 2006. The SIRC Model and Influenza A. *Mathematical Biosciences* 200: 152-169.
- Govaert TME, Thijs CTMCN, Masurel N, Sprenger MJW, Dinant GJ & Knottnerus JA. 1994. The Efficacy of Influenza Vaccination in Elderly Individuals. *JAMA* 272(21):1661-1665
- Jansen AGSC, Sanders EAM, Hoes AW, van Loon AM & Hak E. 2007. Influenza and respiratory syncytial virus-associated mortality and hospitalisations. *Eur Respir J* 30: 1158-1166.
- Kwong JC, Maaten S, Upshur REG, Patrick DM & Marra F. 2009. The Effect of Universal Influenza Immunization on Antibiotic Prescriptions: An Ecological Study. *Clinical Infectious Diseases* 49: 750 - 756
- Nichol KL, Nordin J, Mullooly J, Lask R, Fillbrandt K & Iwane M. 2003. Influenza Vaccination and Reduction in Hospitalizations for Cardiac Disease and Stroke among the Elderly. *N Engl J Med* 348:1322 - 1332.
- Potter J, Stott DJ, Roberts MA, Elder AG, O'Donnell B, Knight PV & Carman WF. 1997. Influenza Vaccination of Health Care Workers in Long-Term-Care Hospitals Reduces the Mortality of Elderly Patients, *The Journal of Infectious Diseases* 175:1-6
- Yang Y, Sugimoto JD, Halloran ME, Basta NE, Chao DL, Matrajt L, Potter G, Kenah E, & Longini JIM. 2009. The Transmissibility and Control of Pandemic Influenza A (H1N1) Virus. *Scienceexpress Report*.