

## SIFAT-SIFAT REPRESENTASI *QUIVER* SEDERHANA

VY Kurniawan ✉

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Sebelas Maret, Indonesia

### Info Artikel

*Sejarah Artikel:*  
Diterima Agustus 2016  
Disetujui September 2016  
Dipublikasikan Oktober 2016

*Keywords:*  
generator; semigroup; Airy equation

### Abstrak

Graf berarah dapat dipandang sebagai pasangan 4-tupel yang terdiri dari dua himpunan serta dua pemetaan dan disebut sebagai *quiver*  $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ . Untuk suatu *quiver*  $Q$  dapat didefinisikan representasi *quiver*  $\mathcal{R} = (V_i, f_\alpha)$ . Representasi *quiver* merupakan penempatan ruang vektor pada setiap titik-titik dari *quiver*  $Q$  dan pemetaan linier pada setiap panah-panahnya. Sebuah representasi yang tidak memiliki subrepresentasi sejati selain nol disebut sebagai representasi sederhana. Pada makalah ini, dipelajari sifat-sifat dari suatu representasi *quiver* sederhana. Selanjutnya sifat-sifat tersebut digunakan untuk menyelidiki syarat perlu dan cukup dari suatu representasi sederhana.

### Abstract

A directed graph can be viewed as a 4-tuple  $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$  where  $Q_0, Q_1$  are finite sets of vertices and arrows respectively, and  $s, t$  are two maps from  $Q_1$  to  $Q_0$ . A directed graph is often called a *quiver*. For a *quiver*  $Q$ , we can define a *quiver representation*  $\mathcal{R} = (V_i, f_\alpha)$ . A representation of a *quiver*  $Q$  is an assignment of a vector space to each vertex and a linear mapping to each arrow. A representation which has no proper subrepresentation except zero is called a simple representation. In this paper, we study the properties of a simple representation of *quiver*. These properties will be used to investigate the necessary and sufficient condition of a simple representation of *quiver*.

© 2016 Universitas Negeri Semarang

✉ Alamat korespondensi:  
Jalan Ir. Sutami No. 36A, Jebres, Kota Surakarta, Jawa Tengah 57126,

ISSN 0215-9945

**PENDAHULUAN**

Studi tentang representasi *quiver* telah dimulai pada awal tahun tujuh puluhan. Barot (2006) menyebutkan, saat ini telah ditemukan sejumlah hubungan yang erat antara representasi *quiver* dengan topik aljabar yang lain, khususnya aljabar Lie, aljabar Hall dan grup kuantum dan baru-baru ini adalah aljabar cluster. Pada kajian mutakhir tentang teori persistensi bahkan ada yang menunjukkan kegunaan representasi *quiver* untuk bidang analisis data, salah satunya yang ditulis oleh Steve (2015). Oleh karena itu, banyak peneliti mencoba mengembangkan teori representasi *quiver* ini, antara lain Weist (2015), David (2015), dan Riedtmann (2016).

Berbicara tentang representasi *quiver* tentunya tidak lepas dari graf berarah. Graf berarah dapat dipandang sebagai pasangan *4-tupel* yang terdiri dari dua himpunan serta dua pemetaan dan disebut sebagai *quiver*  $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ . Himpunan yang dimaksud adalah himpunan titik  $Q_0$  dan himpunan panah  $Q_1$ . Sementara kedua pemetaannya adalah pemetaan dari himpunan panah ke himpunan titik, yaitu  $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$ , dimana  $s(\alpha) \in Q_0$  disebut sebagai sumber dari panah  $\alpha \in Q_1$  dan  $t(\alpha) \in Q_0$  disebut sebagai target dari panah  $\alpha \in Q_1$ . Representasi dari *quiver*  $Q$  didefinisikan sebagai suatu penempatan ruang vektor pada setiap titik-titik dari *quiver*  $Q$  dan pemetaan linier antara ruang vektor pada setiap panah-panahnya dan dinotasikan dengan  $\mathcal{R} = (V_i, f_\alpha)$ . Representasi  $\mathcal{S} = (W_i, g_\alpha)$  disebut sebagai subrepresentasi dari  $\mathcal{R}$  jika untuk setiap  $i \in Q_0$ ,  $W_i$  adalah subruang dari  $V_i$ , dan untuk setiap  $\alpha \in Q_1$ , pemetaan linier  $f_\alpha : V_{s(\alpha)} \rightarrow V_{t(\alpha)}$  yang dibatasi pada  $W_{s(\alpha)}$  merupakan pemetaan yang sama dengan  $g_\alpha : W_{s(\alpha)} \rightarrow W_{t(\alpha)}$ . Suatu representasi yang tidak memiliki subrepresentasi sejati selain nol disebut sebagai representasi sederhana. Pada makalah ini, dipelajari sifat-sifat dari suatu representasi *quiver* sederhana. Selanjutnya sifat-sifat tersebut digunakan untuk menyelidiki syarat perlu dan cukup dari suatu representasi sederhana.

**Representasi Quiver dan Morfisma Representasi**

Pada bagian ini akan diberikan pengertian beserta contoh dari representasi *quiver* dan isomorfisma representasi.

**Definisi 1** (Derksen & Weyman 2005).

**Representasi**  $\mathcal{R} = (V_i, f_\alpha)$  dari *quiver*  $Q$  adalah himpunan ruang vektor  $\{V_i \mid i \in Q_0\}$  bersama dengan himpunan pemetaan linier  $\{f_\alpha : V_{s(\alpha)} \rightarrow V_{t(\alpha)} \mid \alpha \in Q_1\}$ , dimana  $Q_0$  dan  $Q_1$  merupakan himpunan titik dan himpunan panah dari  $Q$ .

Untuk lebih memahami definisi dari representasi *quiver*, berikut akan diberikan contohnya.

**Contoh 1.** Diberikan *quiver*  $Q$  dengan dua buah titik dan sebuah panah yang menghubungkan kedua titik tersebut seperti pada Gambar 1.

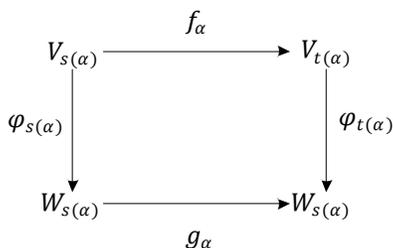


**Gambar 1.** *Quiver* dengan dua buah titik dan sebuah panah

Salah satu representasi dari *quiver*  $Q$  adalah  $R = (V_i, f_\alpha)$  dimana  $V_1 = K^n$ ,  $V_2 = K^m$ , dan  $f_\alpha = A_{n \times m}$  dengan  $A_{n \times m}$  adalah matriks berukuran  $n \times m$ .

Setelah memahami pengertian dari representasi *quiver*, selanjutnya akan dibahas tentang morfisma representasi. Gagasan tentang morfisma muncul sebagai suatu generalisasi dari isomorfisma, dimana syarat bijektifitas dihilangkan. Morfisma dari representasi  $V$  ke representasi  $W$  (yang keduanya dari suatu *quiver* yang sama) merupakan keluarga pemetaan linier  $\varphi_i : V_i \rightarrow W_i$  dengan  $i \in Q_0$  seperti yang akan didefinisikan sebagai berikut.

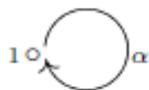
**Definisi 2** (Barot: 2006). Diberikan dua buah representasi dari *quiver*  $Q$  yaitu  $V = (V_i, f_\alpha)$  dan  $W = (W_i, g_\alpha)$ . **Morfisma representasi**  $\varphi : V \rightarrow W$  adalah koleksi pemetaan linier  $\{\varphi_i : V_i \rightarrow W_i \mid i \in Q_0\}$  sedemikian hingga diagram berikut



berlaku komutatif untuk semua  $\alpha \in Q_1$ , atau dengan kata lain  $\varphi_{t(\alpha)}f_\alpha = g_\alpha\varphi_{s(\alpha)}$ . Lebih jauh, jika  $\varphi_i$  punya invers untuk setiap  $i \in Q_0$ , maka morfisma  $\varphi$  disebut **isomorfisma**. Selanjutnya, representasi  $V$  dan  $W$  dikatakan **isomorfis**.

Untuk lebih memahami definisi dari morfisma representasi, berikut akan diberikan sebuah contoh.

**Contoh 2.** Diberikan quiver  $Q$  dengan sebuah titik dan sebuah loop seperti pada Gambar 2.



**Gambar 2.** Quiver dengan sebuah titik dan sebuah loop

Untuk setiap bilangan bulat positif  $n$  dan matriks persegi  $M$  berukuran  $n \times n$  dapat didefinisikan sebuah representasi quiver  $V^M = (V_1^M, f_\alpha)$  dengan  $V_1^M = K^n$  dan  $f_\alpha = M$ .

Didefinisikan dua buah representasi dari quiver di atas yaitu  $V^A = (K^n, A)$  dan  $V^B = (K^n, B)$ . Jelas bahwa  $A$  dan  $B$  adalah matriks berukuran  $n \times n$ . Dari sini dapat didefinisikan morfisma representasi  $\varphi : V^A \rightarrow V^B$  dengan pemetaan linier  $\varphi_1 = K^n \rightarrow K^n$  sehingga  $\varphi_1 A = B \varphi_1$ .

Selanjutnya, jika pemetaan linier  $\varphi_1$  punya invers maka berlaku  $\varphi_1 A \varphi_1^{-1} = B$  dan representasi  $V^A$  dan  $V^B$  isomorfis. Dengan kata lain,  $V^A$  dan  $V^B$  isomorfis jika dan hanya jika  $A$  dan  $B$  saling konjugasi.

**Representasi Sederhana**

Sebelum membahas tentang representasi sederhana, berikut akan diberikan terlebih dahulu definisi dari subrepresentasi yang akan dipakai

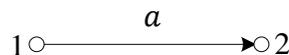
dalam mendefinisikan representasi sederhana (*simple representation*).

**Definisi 3** (Brion: 2008). Diberikan  $\mathcal{R} = (V_i, f_\alpha)$  merupakan representasi dari quiver  $Q$ . Representasi  $\mathcal{S} = (W_i, g_\alpha)$  disebut sebagai **subrepresentasi** dari  $\mathcal{R}$  jika :

- (i) Untuk setiap  $i \in Q_0$ ,  $W_i$  adalah subruang dari  $V_i$ , dan
- (ii) Untuk setiap  $\alpha \in Q_1$ , pemetaan linier  $g_\alpha : W_{s(\alpha)} \rightarrow W_{t(\alpha)}$  merupakan pemetaan yang sama dengan  $f_\alpha : V_{s(\alpha)} \rightarrow V_{t(\alpha)}$  yang dibatasi pada  $W_{s(\alpha)}$ .

Berikut diberikan sebuah contoh subrepresentasi.

**Contoh 3.** Diberikan quiver dengan dua buah titik dan sebuah panah yang menghubungkan kedua titik seperti pada Gambar 2.



**Gambar 3.** Quiver dengan dua buah titik dan sebuah panah

Selanjutnya didefinisikan representasi  $R = (V_i, f_\alpha)$  dari  $Q$  dengan  $V_1 = K, V_2 = K$  dan  $f_\alpha = i$  yang merupakan pemetaan identitas. Representasi  $R$  dapat digambarkan sebagai berikut.

$$R : K \xrightarrow{f_\alpha = i} K$$

Salah satu subrepresentasi dari  $R$  adalah  $S = (W_i, g_\alpha)$  dengan  $W_1 = 0, W_2 = K$ , dan pemetaan  $g_\alpha = 0$ . Jelas bahwa  $W_1$  merupakan subruang dari  $V_1$ , dan  $W_2$  subruang dari  $V_2$ . Sedangkan pemetaan  $g_\alpha = 0$  sama dengan  $f_\alpha = i$  yang dibatasi pada  $W_1 = 0$ . Subrepresentasi  $S$  dapat digambarkan digambarkan sebagai berikut..

$$S : 0 \xrightarrow{g_\alpha = 0} K$$

Tidak semua representasi  $\mathcal{R}$  memiliki subrepresentasi selain nol dan  $\mathcal{R}$  sendiri. Representasi yang demikian disebut sebagai

representasi sederhana (*simple representation*) yang definisinya diberikan sebagai berikut.

**Definisi 4** (Brion: 2008). *Sebuah representasi tak nol  $\mathcal{R}$  disebut representasi sederhana jika subrepresentasi dari  $\mathcal{R}$  hanyalah representasi nol dan  $\mathcal{R}$  itu sendiri.*

Untuk lebih memahami pengertian dari representasi sederhana, selanjutnya akan diberikan beberapa contoh dan sifat dari representasi sederhana. Contoh yang paling sederhana adalah *quiver* dengan sebuah titik dan sebuah loop. Representasi dari *quiver* yang demikian merupakan representasi sederhana jika dan hanya jika titik tunggalnya direpresentasikan sebagai ruang vektor berdimensi satu. Berikut akan diberikan lemma yang menjelaskan hal tersebut.

**Lemma 5.** *Diberikan quiver  $Q$  dengan sebuah titik dan sebuah loop seperti pada gambar berikut*



*Representasi  $V$  dari quiver  $Q$  sederhana jika dan hanya jika  $V_1$  berdimensi satu.*

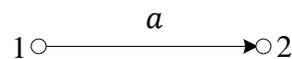
**Bukti**

( $\Rightarrow$ ) Diketahui  $V = (V_1, f_\alpha)$  representasi sederhana, berarti  $V$  tidak memiliki subrepresentasi lain selain representasi nol dan  $V$  sendiri. Andaikan  $V_1$  berdimensi lebih dari satu, maka  $V_1$  mempunyai subruang sejati. Diambil salah satu subruang berdimensi satu dari  $V_1$  yaitu  $W$ , maka dapat dibentuk subrepresentasi dari  $V$  yaitu  $S = (W, g = f|_W)$ . Terjadi kontradiksi, sehingga terbukti bahwa  $V_1$  berdimensi satu.

( $\Leftarrow$ ) Diketahui  $V_1$  berdimensi satu, maka  $V_1$  tidak punya subruang selain 0 dan  $V_1$  sendiri. Dengan demikian subrepresentasi dari  $V$  hanyalah representasi nol dan  $V$  sendiri. Jadi, terbukti bahwa  $V$  merupakan representasi sederhana. ■

Contoh yang berikutnya adalah *quiver* dengan dua buah titik dan sebuah panah tanpa ada siklus ataupun loop.

**Contoh 4.** Diberikan *quiver* dengan dua buah titik dan sebuah panah yang menghubungkan kedua titik seperti pada gambar berikut



Representasi sederhana dari  $Q$  adalah

$$E_1 : K \xrightarrow{f_\alpha = 0} 0 \quad \text{dan} \quad E_2 : 0 \xrightarrow{f_\alpha = 0} K$$

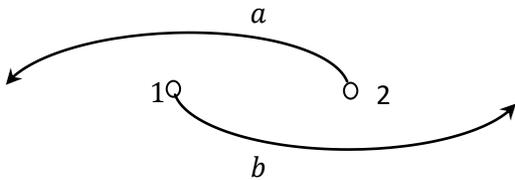
Jelas bahwa representasi  $E_1$  dan  $E_2$  merupakan representasi sederhana, karena  $K$  hanya memiliki subruang  $K$  dan  $0$  sehingga subrepresentasi dari  $E_1$  dan  $E_2$  hanyalah representasi nol dan dirinya sendiri.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa representasi sederhana dari  $Q$  hanya  $E_1$  dan  $E_2$ , atau dengan kata lain representasi selain  $E_1$  dan  $E_2$  bukan merupakan representasi sederhana dari  $Q$ . Diambil sebarang representasi  $V = (V_i, f_\alpha)$  selain  $E_1$  dan  $E_2$ , berarti ada dua kemungkinan sebagai berikut

- i) Salah satu dari  $V_i$  berdimensi lebih dari satu dan yang lain  $V_i = 0$ . Beri label  $x$  pada titik dengan  $V_x \neq 0$ . Dapat didefinisikan subrepresentasi  $W = (W_i, g_\alpha)$  dengan  $W_x$  adalah subruang berdimensi satu dari  $V_x$  dan  $g_\alpha = f_\alpha|_{S(\alpha)}$ . Dengan demikian  $V$  bukanlah representasi sederhana karena memiliki subrepresentasi sejati selain nol yaitu  $W$ .
- ii) Kedua  $V_i$  ( $V_1$  dan  $V_2$ ) tidak nol. Dapat didefinisikan subrepresentasi  $W = (W_i, g_\alpha)$  dengan  $W_1 = 0$ ,  $W_2 = V_2$ , dan  $g_\alpha = 0$ . Dengan demikian  $V$  bukanlah representasi sederhana karena memiliki subrepresentasi sejati selain nol yaitu  $W$ .

Untuk mengetahui perbedaan sifat representasi dari suatu *quiver* yang memiliki siklus, berikut akan diberikan *quiver* yang sama-sama memiliki dua buah titik. Perbedaannya dari contoh sebelumnya, pada *quiver* ini terdapat sebuah siklus.

**Contoh 5.** Diberikan *quiver*  $Q$  dengan dua buah titik dan dua panah yang membentuk siklus seperti pada Gambar 4.



**Gambar 4.** Quiver dengan dua buah titik dan dua panah yang membentuk siklus

Representasi sederhana dari  $Q$  adalah

$$E_1 : K \begin{array}{c} \xleftarrow{f_a = 0} \\ \xrightarrow{f_b = 0} \end{array} 0 \qquad E_2 : 0 \begin{array}{c} \xleftarrow{f_a = 0} \\ \xrightarrow{f_b = 0} \end{array} K$$

Selain yang telah diberikan diatas, untuk setiap  $\lambda \in K \setminus \{0\}$ , dapat didefinisikan representasi sederhana sebagai berikut

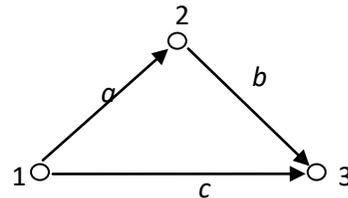
$$V : K \begin{array}{c} \xleftarrow{f_a = \lambda} \\ \xrightarrow{f_b = 1} \end{array} K$$

Untuk membuktikan contoh ini diandaikan representasi  $V$  diatas tidak sederhana, berarti  $V$  memiliki subrepresentasi lain selain representasi nol dan  $V$  sendiri. Katakan subrepresentasi sejati dari  $V$  tersebut adalah  $W = (W_i, g_\alpha)$ . Karena  $W$  bukan representasi nol dan masing-masing dari  $V_i$  berdimensi satu, maka salah satu dari  $W_1 = 0$  atau  $W_2 = 0$ . Misalkan  $W_1 = 0$  maka  $g_a$  tidak terdefinisi sebagai pemetaan linier karena hanya  $0 \in K$  yang mempunyai kawan di  $W_1$ . Misalkan  $W_2 = 0$ , maka  $g_b$  tidak terdefinisi sebagai pemetaan linier karena hanya  $0 \in K$  yang mempunyai kawan di  $W_2$ . Dengan demikian  $V$  tidak mempunyai subrepresentasi selain representasi nol dan  $V$  sendiri. Terbukti bahwa  $V$  representasi sederhana. ■

Dari Contoh 5 bisa dilihat bahwa quiver dengan sebuah siklus mempunyai representasi sederhana selain representasi kanonik yang dimiliki oleh quiver tanpa siklus. Untuk lebih memperkuat dugaan adanya perbedaan sifat antara representasi dari suatu quiver yang memiliki siklus dengan representasi dari suatu quiver tanpa siklus, berikut akan diberikan dua contoh quiver yang sama-sama memiliki tiga buah titik. Bedanya panah-panah pada quiver yang satu tidak membentuk siklus, sedangkan

pada quiver yang lain arah panah-panahnya menyebabkan adanya sebuah siklus.

**Contoh 6.** Diberikan quiver  $Q$  dengan tiga buah titik dan tiga panah tanpa siklus seperti pada Gambar 5.



**Gambar 5.** Quiver dengan dengan tiga buah titik dan tiga panah tanpa siklus

Representasi sederhana dari  $Q$  hanyalah representasi kanonik  $E_1, E_2,$  dan  $E_3$  sebagai berikut

$$E_1 : \begin{array}{ccc} & 0 & \\ & \nearrow 0 & \searrow 0 \\ K & \xrightarrow{0} & 0 \end{array} \qquad E_2 : \begin{array}{ccc} & K & \\ & \nearrow 0 & \searrow 0 \\ 0 & \xrightarrow{0} & 0 \end{array} \qquad E_3 : \begin{array}{ccc} & 0 & \\ & \nearrow 0 & \searrow 0 \\ 0 & \xrightarrow{0} & K \end{array}$$

Akan ditunjukkan bahwa representasi selain  $E_1, E_2,$  dan  $E_3$  bukan merupakan representasi sederhana. Didefinisikan sebarang representasi  $V = (V_i, f_\alpha)$  selain  $E_1, E_2,$  dan  $E_3$ . Berarti ada dua kemungkinan dari  $V$ , yaitu

1. Terdapat lebih dari satu  $V_i$  yang tak nol,
2. Terdapat satu saja  $V_i$  yang tak nol tapi berdimensi lebih dari satu.

Kemungkinan 1, jika terdapat lebih dari satu  $V_i$  yang tak nol. Beri label  $x$  untuk indeks  $V_i$  tak nol yang terbesar. Dapat dibentuk subrepresentasi  $W = (W_i, g_\alpha)$  dari  $V$  dengan

$$W = \left( W_i = \begin{cases} W_x, & \text{untuk } i = x \\ \{0\}, & \text{untuk } i \text{ yang lain} \end{cases}; g_\alpha = 0 \text{ untuk } \alpha = a, b, c \right),$$

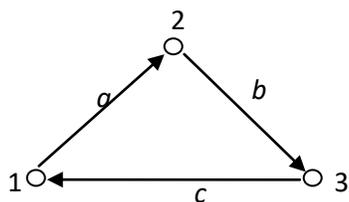
dengan  $W_x$  adalah subruang berdimensi satu dari  $V_x$ .

Dengan demikian  $V$  bukan representasi sederhana karena  $V$  mempunyai subrepresentasi selain nol dan  $V$  sendiri.

Kemungkinan 2, hanya terdapat sebuah  $V_i$  yang tak nol dan berdimensi lebih dari satu. Dengan

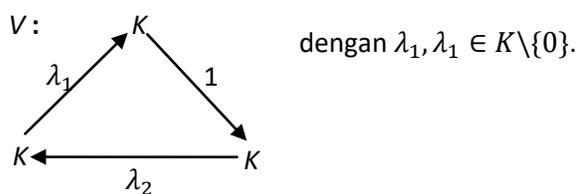
mengambil subruang berdimensi satu dari  $V_i$  yang tak nol tersebut akan diperoleh subrepresentasi yang isomorfis dengan salah satu dari  $E_1, E_2$ , atau  $E_3$ . Dengan demikian  $V$  bukanlah representasi sederhana. Jadi, terbukti bahwa tidak ada representasi sederhana dari *quiver*  $Q$  selain  $E_1, E_2$ , dan  $E_3$ . ■

**Contoh 7.** Diberikan *quiver*  $Q$  dengan tiga buah titik dan tiga panah yang membentuk siklus seperti pada Gambar 6



**Gambar 6.** *Quiver* dengan dengan tiga buah titik dan tiga panah yang membentuk siklus

Jelas bahwa  $E_1, E_2$ , dan  $E_3$  merupakan representasi sederhana dari  $Q$ . Berbeda dengan Contoh 4.3.7, *quiver*  $Q$  ini ternyata mempunyai representasi sederhana selain  $E_1, E_2$ , dan  $E_3$ . Representasi sederhana tersebut adalah  $V = (V_i, f_\alpha)$  seperti diberikan dengan gambar sebagai berikut



Untuk membuktikan contoh ini diandaikan representasi  $V$  bukan representasi sederhana, berarti  $V$  punya subrepresentasi selain representasi nol dan  $V$  sendiri. Katakan subrepresentasi tersebut  $W = (W_i, g_\alpha)$ . Karena subruang dari  $K$  hanyalah  $\{0\}$  dan  $K$  sendiri, maka minimal salah satu dari  $W_i = \{0\}$  untuk  $i = 1, 2$ , atau  $3$ . Akibatnya pemetaan linier dengan image  $W_i = \{0\}$  tidak terdefinisi karena tidak semua anggota domainnya punya kawan. Dengan demikian  $V$  tidak mempunyai subrepresentasi selain nol dan  $V$  sendiri. Jadi, terbukti bahwa  $V$  merupakan representasi sederhana. ■

Beberapa contoh di atas memberikan dugaan kuat bahwa representasi sederhana dari suatu *quiver* akan diperoleh apabila *quiver* tersebut tidak memiliki siklus dan representasinya berbentuk kanonik. Berikut akan diberikan terlebih dahulu definisi dari representasi kanonik.

**Definisi 6.** Diberikan *quiver*  $Q$ . Suatu representasi tak nol dikatakan **representasi kanonik**, ditulis  $E_x = (V_i, f_\alpha)$ , jika memiliki bentuk sebagai berikut

$$E_x = \left( V_i = \begin{cases} K, & \text{untuk } i = x \\ \{0\}, & \text{untuk } i \text{ yang lain} \end{cases}, f_\alpha = 0 \text{ untuk semua } \alpha \in Q_1 \right).$$

Selanjutnya, akan diberikan sebuah lemma yang menjamin adanya sebuah titik yang bukan merupakan sumber dari sebarang panah dalam suatu *quiver* yang tidak memiliki siklus.

**Lemma 7.** Jika  $Q = (Q_0, Q_1)$  merupakan sebuah *quiver* yang tidak memiliki siklus, maka terdapat sebuah titik  $x \in Q_0$  yang bukan merupakan sumber dari sebarang panah  $\alpha \in Q_1$ . Selanjutnya titik yang demikian disebut sebagai **sink**.

**Bukti:**

Diandaikan semua titik di *quiver*  $Q$  merupakan sumber dari suatu panah. Dengan kata lain, untuk setiap  $u_i \in Q_0, u_i = s(\alpha)$  untuk suatu  $\alpha \in Q_1$ . Dipilih  $u_1 \in Q_0$  dan dibentuk sebuah lintasan dengan proses sebagai berikut: pilih  $\alpha_n$  sedemikian hingga  $s(\alpha_n) = u_n$ . Selanjutnya tulis  $u_{n+1} = t(\alpha_n)$ , dan proses diulang. Karena himpunan titik  $Q_0$  merupakan himpunan berhingga maka pada suatu proses akan diperoleh  $u_{n+1} = u_n$  untuk suatu  $i \leq n$ . Dengan demikian lintasan  $p = \alpha_i \dots \alpha_n$  merupakan sebuah siklus. Terjadi kontradiksi karena diketahui bahwa *quiver*  $Q$  tidak memiliki siklus. Dengan demikian terbukti bahwa terdapat sebuah titik  $x \in Q_0$  yang bukan merupakan sumber dari sebarang panah  $\alpha \in Q_1$ . ■

Setelah mempelajari beberapa contoh dari representasi sederhana, dapat disimpulkan syarat perlu dan cukup dari suatu representasi sederhana adalah seperti diberikan pada teorema berikut.

**Teorema 8.** Diberikan  $Q$  sebuah quiver yang tidak memiliki siklus. Suatu representasi tak nol  $V$  dari quiver  $Q$  merupakan representasi sederhana jika dan hanya jika  $V$  representasi kanonik.

**Bukti:**

( $\Leftarrow$ ) Diketahui  $V$  merupakan representasi kanonik, berarti hanya terdapat sebuah  $V_i = K$  untuk suatu  $i \in Q_0$  dan  $V_i = \{0\}$  untuk semua  $i \in Q_0$  yang lain. Karena  $K$  hanya memiliki subruang  $K$  dan  $\{0\}$ , maka subrepresentasi yang mungkin dari  $V$  hanyalah representasi nol dan representasi  $V$  sendiri. Dengan demikian  $V$  merupakan representasi sederhana.

( $\Rightarrow$ ) Diketahui  $V$  merupakan representasi sederhana dari quiver  $Q$  yang tidak memiliki siklus. Akan dibuktikan  $V$  merupakan representasi kanonik. (dibuktikan dengan kontradiksi). Diandaikan  $V$  bukan representasi kanonik, katakan  $V = (V_i, f_\alpha)$ . Karena  $Q$  tidak memiliki siklus, menurut Lemma 3.10, maka terdapat sebuah titik  $i \in Q_0$  yang merupakan sink atau tidak merupakan sumber dari sebarang panah  $\alpha \in Q_1$ . Katakan titik tersebut adalah  $x_1 \in Q_0$  sedemikian hingga  $s(\alpha) \neq x_1 (\forall \alpha \in Q_1)$ . Jika  $V_{x_1} \neq \{0\}$ , maka label untuk titik tersebut adalah  $x$ . Jika  $V_{x_1} = \{0\}$ , didefinisikan  $Q^1 = (Q_0^1 = Q_0 \setminus \{x\}, Q_1^1 = Q_1 \setminus \{\alpha \in Q_1 | t(\alpha) = x_1\})$ . Karena  $Q_0^1 \subset Q_0, Q_1^1 \subset Q_1$ , dan  $Q$  tidak memuat siklus, maka  $Q^1$  juga tidak memuat siklus. Menurut Lemma 4.3.10, terdapat sebuah titik, katakan  $x_2 \in Q_0^1$ , sedemikian hingga  $s(\alpha) \neq x_2 (\forall \alpha \in Q_1^1)$ . Selanjutnya, didefinisikan representasi  $V^1$  dari quiver  $Q^1$  dengan  $V^1$  adalah representasi  $V$  yang dibatasi pada  $Q^1$ . Jika  $V_{x_2} \neq \{0\}$ , maka titik  $x_2$  tersebut diberi label  $x$ . Jika  $V_{x_2} = \{0\}$ , maka proses diulang. Karena  $V$  merupakan representasi tak nol dari  $Q$ , maka suatu saat akan ditemukan  $x_n \in Q_0$  sedemikian hingga  $V_{x_n} \neq \{0\}$  dan titik tersebut diberi label  $x$ .

Selanjutnya, didefinisikan subrepresentasi  $W = (W_i, g_\alpha)$  dari representasi  $V$  sebagai berikut;

$$W = \left( W_i = \begin{cases} W_x, & \text{untuk } i = x \\ \{0\}, & \text{untuk } i \text{ yang lain} \end{cases}, g_\alpha = 0 \text{ untuk semua } \alpha \in Q_1 \right),$$

dengan  $W_x$  adalah subruang berdimensi satu dari  $V_x$ .

Dengan demikian representasi  $V$  memiliki subrepresentasi sejati selain representasi nol, sehingga  $V$  bukan representasi sederhana. Terjadi kontradiksi dengan asumsi awal, sehingga pengandaian harus diingkar dan terbukti bahwa  $V$  merupakan representasi kanonik. ■

**PENUTUP**

Dari diskusi di atas, dapat ditarik kesimpulan beberapa sifat penting representasi quiver sederhana sebagai berikut: (1) Diberikan quiver  $Q$  dengan sebuah titik dan sebuah loop seperti pada gambar berikut



Representasi  $V$  dari quiver  $Q$  sederhana jika dan hanya jika  $V_i$  berdimensi satu. (2) Diberikan  $Q$  yang merupakan sebuah quiver yang tidak memiliki siklus. Suatu representasi tak nol  $V$  dari quiver  $Q$  merupakan representasi sederhana jika dan hanya jika  $V$  representasi kanonik.

**DAFTAR PUSTAKA**

Barot M. 2006. Representations of Quivers, Notes for The ICTP-Conference. Instituto de Matmáticas Universidad Nacional Autónoma de México. Mexico: Ciudad Universitaria.

Brion M. 2008. Representations of Quivers, Notes de l'école d'été "Geometric Methods in Representation Theory". Grenoble.

David A N. 2015. Cyclic symmetries of  $A_n$ -quiver representations, *Advances in Mathematics* Vol. 269: 346-363.

Derksen H & Weyman J. 2005. Quiver Representations. *Notice of The AMS* 52 (2): 200-206.

Krause H. 2007 *Representations of Quivers via Reflection Functor*. Institut Fur Mathematik, Universitat Paderborn, Paderborn, Germany.

Riedtmann C. 2016 Explicit description of generic representations for quivers of type  $\mathbb{A}_n$  or  $\mathbb{D}_n$ , *Journal of Algebra* 452: 474-486.

Steve YO. 2015. *Persistence Theory: From Quiver Representations to Data Analysis (Mathematical Surveys and Monographs*, American Mathematical Society, United State of America.

Weist T. 2015. On the recursive construction of indecomposable quiver, *Journal of Algebra* 443: 49-74.