



Bayangan Konsep (Concept Image) Mahasiswa pada Konsep Kombinasi Ditinjau dari Perbedaan Gender dan Kemampuan Matematika

Budi Nurwahyu¹; Y.E.S. Tatag², St. Suwarsono³

¹Program studi Matematika, Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin, Makassar

²Program studi Pendidikan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Surabaya

³Program studi Pendidikan Matematika, Fakultas Pendidikan MIPA, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta

Email: budinurwahyu@gmail.com

DOI: <http://dx.doi.org/10.15294/kreano.v7i2.5901>

Received: May, 2016; Accepted: September, 2016; Published: December, 2016

Abstrak

Bayangan konsep seseorang merupakan kumpulan gambar mental yang disertai dengan sifat-sifat dan proses-proses yang terkait dengan konsep tersebut yang ada dalam pikiran. Oleh karenanya bayangan konsep berbentuk konsepsi-konsepsi nonverbal terhadap suatu konsep formal. Paper ini mengungkapkan tentang profil bayangan konsep mahasiswa program studi matematika tentang konsep kombinasi, khususnya untuk mahasiswa laki-laki dengan kemampuan rendah Matematika Dasar dan mahasiswa perempuan dengan kemampuan tinggi Matematika Dasar. Penelitian ini menggunakan penelitian pendekatan deskriptif kualitatif. Di dalam penelitian ini diungkapkan pula adanya miskonsepsi mahasiswa dan konflik kognitif serta respon intuitif terhadap konsep kombinasi dan pemecahan masalah yang terkait dengan kombinasi. Selain itu, adanya kategori bayangan konsep instrumental dan bayangan konsep relasional yang dimiliki mahasiswa terhadap konsep kombinasi serta dalam melakukan pemecahan masalah yang terkait kombinasi.

Abstract

Someone's concept image to a concept be a collection of all mental pictures together with properties and processes associated to the concept in his/her mind. Therefore, concept image as a non-verbal perceptions of a formal concept. This paper is to show the profile of concept image about concept of combination of the mathematics students who have high ability in basic mathematic. This study used qualitative descriptive approach. In this study was shown students' concept image and thinking process of concept combination k objekt of n objek as a reciprocal connection between concept images and formal concepts and also shown category of concept image including instrumental concept image and relational concept image that belonged the students about concept of combination k object of n object.

Keywords: mental picture; concept image; relational concept image; instrumental concept image

PENDAHULUAN

Menurut Sfard (1987, 1991, 1992) dan Sfard & Linchevki (1994), konsep abstrak dapat dipahami dalam dualisme bentuk yang berlainan yaitu secara struktur (*structurally*) sebagai objek dan secara operasional (*operationally*) sebagai proses. Konsep dipandang sebagai objek, di dalam konsep melekat atribut, ciri maupun sifat-sifat (*properties*) dari konsep tersebut. Seseorang dikatakan telah mempunyai objek dari konsep tersebut, jika orang terse-

but mampu menunjukkan ciri ataupun sifat dari konsep tersebut, bisa dalam bentuk definisinya, aksioma, teorema, rumus atau prinsip matematika lainnya. Sedangkan konsep dipandang sebagai proses, di dalam konsep melekat adanya kegiatan mental terkait pada konsep tersebut, yaitu proses merupakan suatu struktur kognitif yang melibatkan imajinasi tentang transformasi mental dari suatu aktifitas yang dilakukan berkali-kali (interiorisasi). Seseorang dikatakan telah mempunyai

proses konsep tersebut, jika orang tersebut mampu membahas konsep tersebut dengan menggunakan objek-objek matematika. Menurut Tall dan Gray (1994), untuk merepresentasikan konsep sebagai objek dan proses dari suatu konsep, diperlukan suatu simbol yang sama untuk konsep tersebut, oleh karenanya menurut Tall dan Gray di dalam simbol terkandung proses dan konsep.

Sejalan dengan pemikiran dari Tall dan Gray tersebut, sebelumnya Tall dan Vinner (1981) sebelumnya juga telah mengajukan suatu model mental untuk pemahaman konsep matematika yang dikenal sebagai bayangan konsep (*concept image*). Oleh karenanya Tall dan Vinner menjelaskan bahwa pemahaman terhadap suatu konsep matematika menyangkut pemahaman konsep secara struktural sebagai objek yang didalamnya melekat akan sifat-sifat konsep tersebut dan pemahaman konsep secara operasional yang didalamnya terkandung proses-proses mental yang menghasilkan konsep tersebut dan untuk mengkomunikasikan konsep tersebut diperlukan representasi mental (gambar mental) dari konsep tersebut. Oleh karenanya Tall dan Vinner (1981) mengungkapkan bahwa bayangan konsep (*concept image*) sebagai kumpulan gambar mental beserta dengan proses-proses dan sifat-sifat yang terkait (*associated*) dengan konsep tersebut yang ada di dalam pikiran individu.

Menurut Tall (2004), mengungkapkan bahwa dalam pemahaman konsep matematika tingkat lanjut, terdapat 3 (tiga) tingkatan dalam pemahaman matematika tingkat lanjut yang oleh Tall disebut sebagai *Three worlds of Mathematics*, yaitu 1). dunia perwujudan (*the embodied world*), dalam pemahaman konsep matematika, individu menggunakan persepsi fisik dari dunia nyata dengan melakukan eksperimen mentalnya untuk menciptakan konsepsi-konsepsi dari konsep-konsep matematika. Konsepsi yang dimaksud adalah sebagai perwujudan dari interpretasi seseorang terhadap suatu objek yang diamatinya. Jadi disini lebih banyak bekerja menggunakan intuisi secara alami. Menurut Tall (2004) pemahaman konsep pada tingkatan *embodied world*, mahasiswa cenderung menggunakan gambar yang tidak ditranslasikan kedalam

bentuk representasi simbolik, namun konsep yang dipelajarinya menjadi suatu konsep yang dapat dipikirkan secara simbolik. Oleh karenanya, menurut Domingos (2009) bayangan konsep yang dimiliki oleh mahasiswa dengan tingkatan pemahaman *embodied world* dikategorikan sebagai bayangan konsep permulaan (*incipient concept image*), 2). *proceptual world*, disini individu-individu memulai menggunakan tindakan prosedural pada konsepsi-konsepsi dari dunia *embodied world*, seperti memanipulasi (menghitung) dengan menggunakan simbol-simbol sebagai suatu konsep yang utuh, sebagai proses untuk berbuat dan konsep untuk berpikir. Menurut Domingos (2009) bayangan konsep yang dimiliki oleh mahasiswa dengan tingkatan pemahaman *proceptual world* dikategorikan sebagai bayangan konsep instrumental (*instrumental concept image*), 3). *formal world*, disini individu akrab dengan melakukan ekspresi definisi yang bersifat formal dan teori-teori aksiomatik yang berisi bukti-bukti formal dan deduksi, yang mengkaitkan konsep lain dan melakukan translasi dari satu bentuk representasi ke bentuk representasi yang lain. Menurut Domingos (2009) bayangan konsep yang dimiliki oleh mahasiswa dengan tingkatan pemahaman *formal world* dikategorikan sebagai bayangan konsep relasional (*relational concept image*). Oleh karena itu menurut Domingos, bayangan konsep permulaan (*incipient concept image*) merupakan bayangan konsep yang langsung melakukan operasi terhadap maksud konsep yang dipahaminya secara sederhana yang mempunyai peluang untuk bisa menggunakan simbol-simbol, sedangkan bayangan konsep instrumental (*Instrumental concept image*) merupakan bayangan konsep yang mengkaitkan penggunaan representasi visual tertentu seperti gambar, tabel, diagram ataupun grafik, serta menggunakan simbol-simbol, dan bayangan konsep relasional (*relational concept image*) merupakan bayangan konsep yang menggunakan transformasi dari bentuk representasi ke bentuk representasi yang lain serta menggunakan teori-teori aksiomatik.

Pada pembelajaran matematika tingkat lanjut, para mahasiswa umumnya belajar bentuk-bentuk formal yang terdiri atas aksioma-

aksioma, definisi-definisi, konsep dasar yang tidak didefinisikan (misal sebuah titik dan sebuah garis dalam geometri), aturan-aturan logika, dan bahasa matematika, sebagai suatu sistem aksiomatik formal (*formal axiomatic system*). Di lain pihak, untuk memahami konsep formal yang disajikan di dalam buku-buku teks dan perkuliahan di dalam kelas, mahasiswa akan membuat interpretasi pribadi sebagai ekspresi dari bayangan konsep definisi miliknya dan ini sebagai bagian dari bayangan konsepnya. Menurut Kovousian (2008), kombinatorik (permutasi dan kombinasi) mempunyai keunikan dalam pembelajarannya, karena tidak banyak menggunakan pengetahuan utama matematika, tapi orang dapat memecahkan masalah kombinatorik dengan cara-cara kreatif, dan masalah kombinatorik sangat menarik serta menantang, sedangkan berpikir kreatif merupakan gabungan dari berpikir intuitif dan analitis, dan intuitif adalah bagian dari bayangan konsep.

Menurut Viner (1981), bayangan konsep yang dimiliki mahasiswa lebih penting dari pada definisi konsep itu sendiri. Hal ini disebabkan untuk melihat pemahaman mahasiswa terhadap suatu konsep, maka yang harus dilihat adalah profil dari semua representasi visual yang ada dalam pikiran mahasiswa, sifat-sifat dan proses-proses yang berkaitan dengan konsep. Demikian juga setiap bayangan konsep senantiasa berhubungan dengan definisi konsep itu sendiri, dimana definisi konsep adalah kata-kata yang digunakan mahasiswa untuk menspesifikasi konsep (Tall & Vinner, 1981). Namun definisi konsep yang dimiliki oleh mahasiswa kadang-kadang berbeda atau bertentangan dengan definisi matematika formalnya (Meel, 2003).

Pentingnya penelitian ini untuk dilakukan karena bayangan konsep mahasiswa membuktikan sangat baik dan berguna dalam memfasilitasi diskusi tentang suatu konsep matematika bagi para mahasiswa matematika yang dipimpin oleh dosen (Viirman 2014). Demikian pula menurut Vinner (1983) yang mengklaim bahwa untuk menguasai konsep, seseorang memerlukan bayangan konsep bukan definisi konsep, sebab definisi konsep sifatnya tidak aktif dan bisa lupa, namun di dalam pikiran, bayangan konsep selalu dapat

diaktifkan kembali. Selain itu menurut Hsieh (2014) dalam penelitiannya mengungkapkan bahwa bayangan konsep mempunyai 3 (tiga) peranan penting dalam proses berpikir mahasiswa dalam pembelajaran matematika tingkat lanjut, yaitu 1) membantu untuk mengembangkan konsep matematika para mahasiswa, 2) sebagai metode efektif untuk membantu mempertahankan pengetahuan di dalam pikiran mahasiswa, dan 3) sebagai kunci untuk membantu dalam menggunakan pengetahuan mahasiswa.

Dari adanya kesenjangan antara pemahaman matematika dalam bentuk konsep formal yang dituntut dosen kepada para mahasiswa matematika dengan pemahaman yang dimiliki para mahasiswa matematika tersebut tentang konsep kombinasi, maka yang menjadi masalah pokok dalam penelitian ini adalah bagaimana bayangan konsep mahasiswa program studi matematika tentang kombinasi yang ditinjau dari perbedaan gender dan kemampuan matematika. Subjek yang digunakan dalam penelitian ini 2 (dua) orang subyek, yaitu 1 (satu) orang subyek dari mahasiswa berjenis kelamin perempuan dengan kemampuan tinggi pada Matematika Dasar dan 1 (satu) orang subyek dari mahasiswa berjenis kelamin laki-laki dengan kemampuan rendah pada Matematika Dasar.

METODE

Penelitian ini adalah penelitian kualitatif. Subjek penelitian adalah mahasiswa semester 3 Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin, Makassar yang telah selesai menempuh perkuliahan matematika dasar I dan II. Pengumpulan data bayangan konsep dari konsep kombinasi dilakukan dengan pemberian Tes Kombinasi (TKP) dan wawancara. Data-data penelitian dianalisis untuk memperoleh bayangan konsep subjek penelitian tentang konsep kombinasi.

Pada penelitian ini hanya dipilih 2 subyek, yaitu subyek 1 sebagai subjek perempuan dengan kemampuan matematika tinggi dan subyek 2 sebagai subjek laki-laki dengan kemampuan matematika rendah.

Instrumen TKP terdiri atas 2 item soal yang dapat dilihat pada Gambar 1.

1. a. Definisikan dan ilustrasikan kombinasi k obyek dari n obyek
 b. Jelaskan cara menghitung banyaknya semua kombinasi k obyek dari n obyek
2. Dari 12 orang mahasiswa akan ditempatkan kerja praktek pada tiga kota, yaitu kota A, B dan C. Akan dihitung berapa banyaknya cara menempatkan 3 orang ditempatkan di kota A, 4 orang ditempatkan di kota B, dan 5 orang ditempatkan di kota C.
 - a. Selesaikan masalah tersebut dengan cara kombinasi
 - b. Selesaikan masalah tersebut dengan cara permutasi

Gambar 1. Instrumen TKP

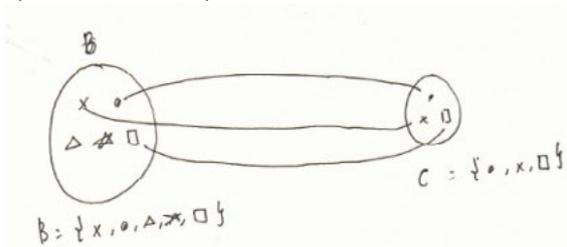
Kemudian dilakukan wawancara untuk mengklarifikasi data-data yg diperoleh hasil TKP dan data-data yang belum terungkap secara tertulis pada pemberian TKP. Wawancara untuk klarifikasi data yang dimaksud adalah memberikan pertanyaan singkat untuk memastikan kembali jawaban tertulis subjek dan mengungkap data bayangan konsep secara mendalam. Juga dilakukan triangulasi dengan menggunakan soal-soal TKP tahap kedua yang setara untuk mendapatkan data yang valid.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bayangan konsep subjek 1

Konsep Kombinasi k objek dari n objek

Gambar mental subjek 1 tentang kombinasi k objek dari n objek yang pertama adalah sebagai subhimpunan k objek dari himpunan n objek konkret ataupun objek abstrak dan kedua sebagai pemilihan objek dari himpunan objek tanpa memperhatikan urutan pemilihannya (Gambar 1 dan 2).



Gambar 2. Representasi gambar mental subjek

tentang kombinasi k objek dari n objek



Gambar 3. Representasi gambar mental subjek 1 tentang generalisasi kombinasi k objek dari n objek

Gambar mental subjek 1 tentang menghitung banyaknya semua kombinasi k objek dari n objek adalah sebagai merumuskan banyaknya kelompok atau kumpulan dari semua permutasi objek dari objek yang mempunyai objek-objek yang sama (Gambar 4 dan 5).

Menghitung banyaknya kombinasi:
 contoh: A = {a, b, c, d, e, f}, akan dipilih 3 elemen, misal B = {a, c, d, f}
 B = {a, c, d, f} dapat disusun permutasi menjadi (a, c, d, f), (c, a, d, f), (c, d, a, f), (d, a, c, f), (d, c, a, f), (f, a, c, d), (f, c, a, d), (f, d, a, c), (f, d, c, a), (f, a, d, c), (f, c, d, a), (f, d, c, a), (f, a, c, d), (f, c, a, d), (f, d, a, c), (f, d, c, a), (f, a, c, d), (f, c, a, d), (f, d, a, c), (f, d, c, a)

Gambar 4. Representasi gambar mental subjek 1 merumuskan banyaknya semua Kombinasi k objek dari n objek menggunakan contoh prototif

Secara umum, misalkan terdapat himpunan A sebanyak n elemen, dan akan dipilih sebanyak k elemen. Dari k elemen tersebut dapat disusun permutasi sebanyak $k!$. Sedangkan banyaknya kombinasi dari k elemen dari n elemen adalah ${}^n C_k$. Dan permutasinya adalah ${}^n P_k$. ${}^n P_k$ adalah $3k!$ ${}^n C_k$, sehingga ${}^n C_k$ adalah ${}^n P_k$ dibagi dengan $k!$. Jadi: ${}^n C_k = \frac{{}^n P_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Gambar 5. Representasi generalisasi gambar mental subjek 1 merumuskan banyaknya semua kombinasi k

Menurut subjek 1, kombinasi k objek dari n objek sebagai suatu himpunan bagian k elemen dari n elemen yang elemennya saling berlainan, akibatnya subjek 1 tidak mengenal kombinasi berulang. Dengan demikian, subjek 1 mengalami miskonsepsi (*misconception*) terhadap konsep kombinasi. Proses yang digunakan subjek 1 untuk mengungkapkan

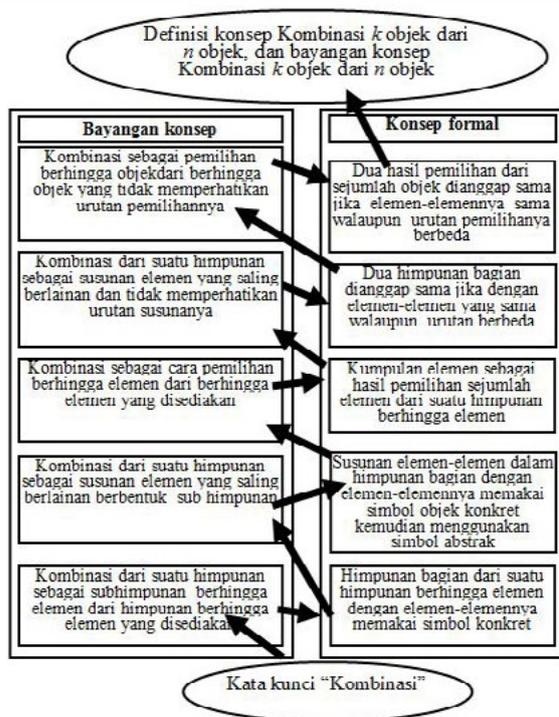
konsep kombinasi k objek dari n objek, yaitu menggunakan himpunan yang elemennya simbol-simbol objek konkret tertentu (Gambar 2) kemudian menggeneralisasi dengan menggunakan simbol-simbol abstrak (Gambar 3); menyimbolkan kombinasi dengan menggunakan simbol $\{..\}$ yang terinspirasi dari simbol himpunan atau himpunan bagian; merumuskan banyaknya kombinasi k objek dari n objek, sebagai merumuskan banyaknya kelompok, dimana setiap kelompok merupakan kumpulan semua permutasi k elemen yang mempunyai elemen-elemen yang sama; untuk merumuskannya subjek 1 menggunakan contoh prototif dahulu (Gambar 4) kemudian melakukan generalisasi dengan cara mengkaitkan konsep banyaknya semua kombinasi dengan banyaknya semua permutasi (Gambar 5). Sedangkan konstruksi proses berpikir subjek 1 untuk memahami konsep Kombinasi k objek dari n objek sebagai hubungan resiprokal antara bayangan-bayangan konsep yang dimiliki dengan konsep formal yang digunakannya, dijelaskan dalam Gambar 6.

Sifat-sifat yang digunakan subjek 1 dan terkait dengan konsep kombinasi k objek dari n objek, yaitu karena elemen-elemen dalam himpunan bagian tidak memperhatikan urutan, maka kombinasi k objek dari n objek dapat dipandang sebagai himpunan bagian k elemen dari himpunan n elemen; Karena elemen-elemen di dalam himpunan bagian saling berlainan, maka tidak dikenal kombinasi berulang. Mendefinisikan kombinasi k objek dari n objek sebagai "cara memilih k objek dari n objek yang tanpa mempertimbangkan urutan pemilihan", Definisi ini sesuai dengan definisi formal kombinasi k objek dari n objek, dan sesuai dengan gambar mentalnya yang menunjukkan cara pemilihan elemen k elemen dari himpunan n elemen.

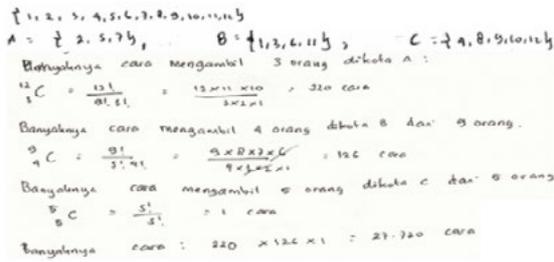
Kedua bayangan konsep subjek 1 dari konsep kombinasi k objek dari n objek koheren (*coherent*) dan bayangan konsep subjek tentang konsep kombinasi k objek dari n objek mengkaitkan dengan konsep himpunan bagian dari suatu himpunan, oleh karenanya bayangan konsepnya dikategorikan sebagai bayangan konsep relasional. Demikian juga bayangan konsep subjek 1 dari konsep merumuskan banyaknya semua kombinasi k objek dari n objek dikaitkan dengan konsep dan prinsip banyaknya semua permutasi k objek dari n objek, oleh karenanya bayangan konsepnya termasuk dalam kategori bayangan konsep relasional (*relational concept image*).

Konsep penyelesaian masalah secara kombinasi menjadi penyelesaian masalah secara permutasi

Gambar mental subjek 1 adalah melakukan penyelesaian masalah dari banyaknya cara pengambilan untuk beberapa sejumlah elemen dari himpunan elemen (Gambar 7), menjadi banyaknya cara menyusun ulang deretan jenis objek dalam susunan yang urutannya diperhatikan (Gambar 9).

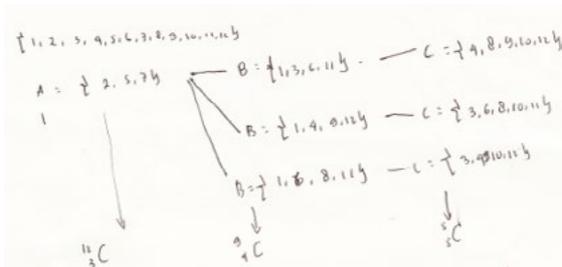


Gambar 6. Konstruksi berpikir subjek 1 untuk memahami konsep Kombinasi k objek dari n objek

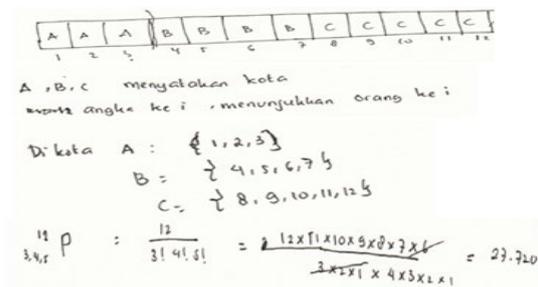


Gambar 7. Representasi pemecahan masalah secara kombinasi

Proses yang digunakan subjek 1 untuk menyelesaikan secara kombinasi, adalah menggunakan dasar pemikiran karena objek yang ditempatkan kedalam sejumlah tempat yang berlainan tidak memperhatikan urutan penempatannya, maka merupakan suatu kombinasi; membuat contoh subhimpunan yang saling lepas (partisi) dari suatu himpunan (Gambar 7); mengkaitkan prinsip perkalian bilangan bulat dengan perkalian banyaknya semua kombinasi (Gambar 8).



Gambar 8. Representasi gambar mental subjek menggunakan rumus perkalian kombinasi



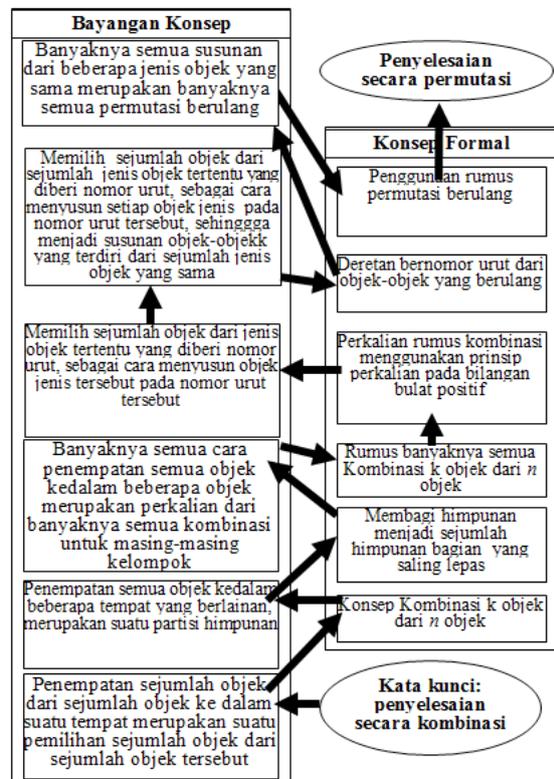
Gambar 9. Subjek merepresentasi gambar mental pemecahan masalah secara permutasi

Sedangkan untuk menyelesaikan secara permutasi, yaitu jika elemen i terpilih untuk dimasukkan ke dalam suatu nama kelompok

A, maka A berada dalam posisi ke- i dalam susunan elemen, sehingga akan membentuk permutasi berulang (Gambar 9). Sedangkan konstruksi proses berpikir subjek untuk memahami konsep penyelesaian masalah dari secara kombinasi menjadi secara permutasi sebagai hubungan resiprokal antara bayangan-bayangan konsep yang dimiliki dengan konsep formal yang digunakannya, dijelaskan dalam Gambar 10.

Sifat-sifat yang digunakan subjek 1 untuk menyelesaikan masalah secara kombinasi, yaitu prinsip perkalian pada bilangan bulat, sifat transformasi kombinasi ke permutasi berulang.

Jadi bayangan konsep subjek 1 tentang konsep penyelesaian masalah secara kombinasi menjadi penyelesaian masalah secara permutasi dikaitkan dengan prinsip perkalian bilangan bulat maupun prinsip permutasi berulang, oleh karenanya bayangan konsepnya dikategorikan bayangan konsep relasional (*relational concept image*).



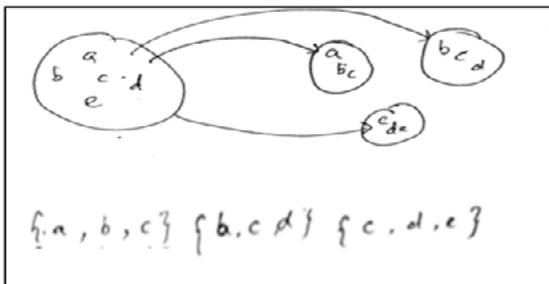
Gambar 10. Konstruksi berpikir subjek 1 untuk menyelesaikan masalah dari secara kombinasi menjadi

penyelesaian masalah secara permutasi

Bayangan konsep subjek 2

Konsep Kombinasi k objek dari n objek

Gambar mental subjek 2 tentang kombinasi k objek dari n objek adalah sebagai himpunan bagian k elemen dari n elemen untuk suatu objek abstrak tertentu (Gambar 11). Gambar mental subjek 2 untuk menghitung banyaknya semua kombinasi k objek dari n objek sebagai merumuskan banyaknya semua kombinasi objek dari objek dengan menghubungkan rumus permutasi objek dari objek dengan rumus kombinasi elemen dari elemen (Gambar 12).



Gambar 11. Representasi gambar mental subjek 2 tentang Kombinasi k objek dari n objek

Terdapat hubungan

$${}^n C_k = \frac{{}^n P_k}{k!}$$

karena $k! {}^n C_k = {}^n P_k$, maka

$${}^n C_k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

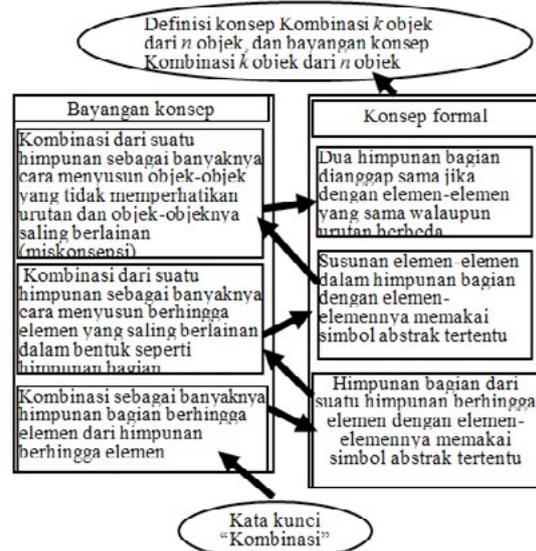
$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Gambar 12. Representasi gambar mental subjek 2 tentang merumuskan banyaknya semua Kombinasi k objek dari n objek

Menurut subjek 2, kombinasi k objek dari n objek sebagai suatu himpunan bagian k elemen dari n elemen yang elemennya saling berlainan, akibatnya subjek 2 tidak mengenal kombinasi berulang. Dengan demikian, subjek mengalami miskonsepsi (*misconception*) terhadap konsep kombinasi. Proses yang digunakan subjek 2 untuk mengungkapkan konsep kombinasi k objek dari n objek, yaitu

mendefinisikan kombinasi k objek dari n objek; mengilustrasikan dalam bentuk contoh kombinasi k objek dari n objek abstrak tertentu; menyimbolkan kombinasi dengan menggunakan simbol $\{..\}$ yang terinspirasi dari simbol himpunan atau himpunan bagian; menyusun semua kombinasi k objek dari n objek dengan cara mendaftar semua k elemen dengan aturan urutan elemen yang diambil dari himpunan n elemen; merumuskan banyaknya kombinasi k objek dari n objek, hanya menggunakan hubungan rumus permutasi dan kom-

binasi $k! \times C_k^n = P_k^n$ dan rumus $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$. Sedangkan konstruksi proses berpikir subjek untuk memahami konsep kombinasi k objek dari n objek sebagai hubungan resiprokal antara bayangan-bayangan konsep yang dimiliki dengan konsep formal yang digunakannya, dijelaskan dalam Gambar 13.



Gambar 13. Konstruksi berpikir subjek 2 untuk memahami konsep Kombinasi k objek dari n objek

Sifat-sifat yang digunakan subjek dan terkait dengan konsep kombinasi k objek dari n objek, yaitu karena elemen-elemen dalam himpunan bagian tidak memperhatikan urutan, maka kombinasi k objek dari n objek dapat dipandang sebagai himpunan bagian k elemen dari himpunan n elemen; Karena elemen-elemen di dalam himpunan bagian saling berlainan, maka tidak dikenal kombinasi

berulang. Mendefinisikan kombinasi k objek dari n objek sebagai "banyaknya susunan k objek dari n objek yang tanpa mempertimbangkan urutan", Definisi ini tidak konsisten (*unconsistent*) dengan definisi formal kombinasi k objek dari n objek, namun sesuai dengan gambar mentalnya yang menunjukkan banyaknya himpunan bagian sejumlah elemen yang dapat dibuat dari elemen-elemen dalam suatu himpunan.

Bayangan konsep subjek 2 dari konsep kombinasi k objek dari n objek hanya menggunakan kumpulan objek-objek yang tidak memperhatikan urutan susunannya, oleh karenanya bayangan konsepnya dikategorikan bayangan konsep instrumental (*instrumental concept image*), dan bayangan konsep subjek 2 untuk konsep merumuskan banyaknya semua kombinasi k objek dari n objek termasuk dalam kategori bayangan konsep instrumental (*instrumental concept image*)

Konsep penyelesaian masalah secara kombinasi menjadi penyelesaian masalah secara permutasi

Gambar mental subjek 2 adalah sebagai menghitung banyaknya cara menempatkan semua elemen dari dalam himpunan n elemen ke dalam sejumlah himpunan bagian yang saling lepas (Gambar 14), menjadi menghitung banyaknya semua cara menyusun n elemen berulang (Gambar 15).



Masalah ini dapat dijabarkan masalah kombinasi tanpa perulangan karena urutan mahasiswa tidak dipertimbangkan. Jadi insid di kota A terdapat 3 mahasiswa yang terdiri dari {u, v, w, x, y, z}. Nilai di kota A sama saja bisa ditukarkan di kota tersebut terdapat {o, p, q, r, s, t}. Sehingga masalah ini dapat dipecahkan dengan cara.

$${}^3C_2 \cdot {}^5C^3 \cdot {}^5C^3 = \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{5!}{2!3!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 = 27720 \text{ cara}$$

karena tidak terdapat pengulangan jumlah awal

Gambar 14. Representasi gambar mental subjek 2 tentang penyelesaian masalah secara kombinasi

Masalah permutasi berarti urutannya harus dipertimbangkan. Jadi pengisian mahasiswa A ke kota B dan C secara berurutan. Diselesaikan dengan sbb

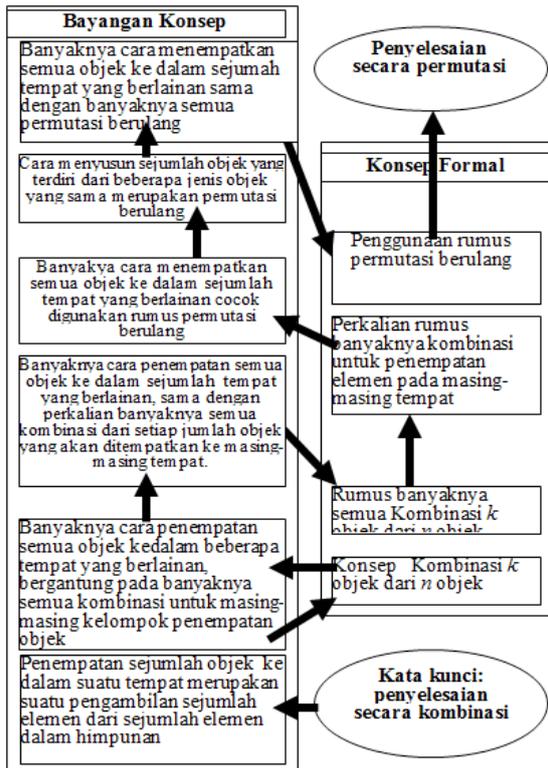
$$\frac{12!}{3!4!6!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1)(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = 11 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 27720 \text{ cara}$$

Gambar 15. Representasi gambar mental subjek 2 tentang penyelesaian masalah secara permutasi

Proses yang digunakan subjek 2 untuk menyelesaikan secara kombinasi, adalah menggunakan partisi himpunan kedalam beberapa himpunan bagian yang saling lepas; Susunan elemen di dalam himpunan bagian sebagai suatu kombinasi; Menggunakan rumus kombinasi untuk menghitung banyaknya cara membuat himpunan-himpunan bagian; Mengalikan semua nilai banyaknya kombinasi berdasarkan respon intuitifnya (*intuitive response*) yaitu berdasarkan keyakinannya bahwa sudah seharusnya dikalikan.

Sedangkan untuk menyelesaikan secara permutasi, yaitu menggunakan secara langsung rumus permutasi berulang dengan alasan setelah dicoba dengan rumus permutasi berulang, ternyata hasil penyelesaiannya sama. Konstruksi proses berpikir subjek untuk memahami konsep penyelesaian masalah dari secara kombinasi menjadi penyelesaian masalah secara permutasi adalah sebagai hubungan resiprokal antara bayangan-bayangan konsep yang dimiliki dengan konsep formal yang digunakannya (Gambar 16).

Sifat-sifat yang digunakan subjek 2 untuk menyelesaikan masalah secara kombinasi, yaitu banyaknya cara menempatkan (mengelompokkan) objek-objek dari himpunan n elemen, kedalam sejumlah tempat (himpunan bagian) merupakan perkalian dari banyaknya cara menempatkan elemen-elemen pada masing-masing tempat. Sedangkan sifat yang digunakan untuk menyelesaikan masalah secara permutasi, adalah rumus permutasi berulang $\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}$.



Gambar 16. Konstruksi berpikir subjek 2 untuk menyelesaikan masalah secara kombinasi menjadi penyelesaian masalah secara permutasi

Jadi bayangan konsep subjek 2 dari konsep penyelesaian masalah secara kombinasi menjadi penyelesaian masalah secara permutasi hanya sekedar menggunakan rumus perkalian kombinasi maupun rumus permutasi berulang, tanpa memahami konsep hubungan rumus kombinasi dengan rumus permutasi berulang, oleh karenanya bayangan konsepnya dikategorikan bayangan konsep instrumental (*instrumental concept image*)

PENUTUP

Bayangan konsep mahasiswa laki-laki berkemampuan rendah dalam Matematika Dasar terhadap konsep kombinasi diungkapkan dengan menggunakan simbol-simbol abstrak, namun ditinjau dari perbedaan kemampuan matematikanya, maka mahasiswa laki-laki dengan kemampuan rendah Matematika Dasar cenderung menggunakan simbol-simbol abstrak tidak secara umum dan tidak variatif. Untuk penggunaan prosesnya, mahasiswa la-

ki-laki dengan kemampuan rendah Matematika Dasar, cenderung selalu menggunakan contoh prototif dan menjelaskan langkah-langkah cenderung menggunakan kalimat-kalimat yang tidak jelas maksudnya sebagai bagian dari komunikasi matematika yang dilakukannya. Sedangkan sifat-sifat yang digunakan dan terkait dengan konsep kombinasi adalah hanya menggunakan rumus-rumus ataupun prinsip-prinsip sebagai dasar penggunaan operasi-operasi yang dilakukannya tanpa memahami mengapa konsep-konsep ataupun prinsip tersebut digunakannya. Mahasiswa dengan kemampuan rendah Matematika Dasar cenderung mempunyai bayangan konsep yang tidak variatif dan cenderung mempunyai kategori bayangan konsep instrumental (*instrumental concept image*), dan cenderung menggunakan respon intuitif (*intuitive response*) untuk penggunaan operasi matematika dalam memecahkan masalah kombinasi maupun merumuskan banyaknya semua kombinasi k objek dari n objek, serta mempunyai miskonsepsi terhadap konsep kombinasi, karena menurut subjek elemen-elemen dalam kombinasi harus yang saling berlainan, akibatnya subjek tidak mengenal kombinasi berulang. Definisi konsep Kombinasi objek dari objek yang dibuat mahasiswa laki-laki dengan kemampuan rendah matematika tidak konsisten dengan definisi formalnya, namun sesuai dengan bayangan konsepnya dari segi banyaknya himpunan bagian yang dibuat. Sedangkan untuk proses berpikirnya dalam memperoleh konsepsi terhadap konsep kombinasi, mahasiswa menggunakan proses resiprokal yang kurang seimbang antara bayangan-bayangan konsepnya dengan konsep formal yang diketahuinya, yaitu subjek lebih banyak menggunakan hubungan antar bayangan-bayangan konsepnya sebagai bagian dari respon intuitifnya.

Sedangkan untuk mahasiswa perempuan dengan kemampuan tinggi dalam Matematika Dasar, cenderung menggunakan simbol-simbol objek konkret lebih dahulu kemudian baru menggunakan simbol-simbol abstrak secara umum (general) dan gambar mentalnya tidak variatif. Untuk penggunaan tahapan prosesnya, subjek perempuan dengan kemampuan tinggi dalam Matematika

Dasar, cenderung melalui suatu contoh prototif himpunan gambar-gambar objek konkret lebih dahulu, kemudian baru menggunakan himpunan n elemen yang elemen-elemennya disimbolkan dengan menggunakan simbol-simbol abstrak. Sedangkan sifat-sifat yang digunakan dan terkait dengan konsep kombinasi adalah mengkaitkan konsep-konsep ataupun prinsip-prinsip sebagai dasar pemikirannya untuk penggunaan operasi-operasi yang dilakukannya.

Subjek dengan kemampuan tinggi dalam Matematika Dasar, cenderung mempunyai bayangan konsep lebih dari satu yang koheren dan mempunyai kategori bayangan konsep bayangan konsep relasional (*relational concept image*). Mahasiswa perempuan dengan kemampuan tinggi matematika dasar mengalami konflik dalam menyimbolkan elemen-elemen sembarang dalam kombinasi k objek dari n objek serta mempunyai miskonsepsi (*misconception*) terhadap konsep kombinasi, karena menurut subjek elemen-elemen dalam kombinasi harus yang saling berlainan, akibatnya subjek tidak mengenal kombinasi berulang. Definisi konsep Kombinasi objek dari objek yang dibuat subjek perempuan dengan kemampuan tinggi matematika konsisten dengan definisi formalnya, dan sesuai dengan bayangan konsepnya. Sedangkan untuk proses berpikirnya dalam memperoleh konsepsi terhadap konsep kombinasi, subjek menggunakan proses resiprok dengan seimbang antara bayangan-bayangan konsepnya dengan konsep formal yang diketahuinya.

DAFTAR PUSTAKA

- Domingos, A. (2009, January). Learning Advanced Mathematical Concepts: The Concept of Limit. In *Proceedings of CERME* (Vol. 6, pp. 2266-2275).
- Hsieh, C.J. (2014). Studying Intern Teachers' Concept Image for Mathematics Teaching Through the Aspect of Students' Mathematical Thinking. In *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, 6, 104. Vancouver, Canada: PME.
- Kavousian, S. (2008). *Enquiries into undergraduate students' understanding of combinatorial structures* (Doctoral dissertation, Faculty of Education-Simon Fraser University).
- Wawro, M., Sweeney, G. F., & Rabin, J. M. (2011). Subspace in linear algebra: investigating students' concept images and interactions with the formal definition. *Educational Studies in Mathematics*, 78(1), 1-19.
- Meel. (2003). Exploring Collaborative Concept Mapping In Calculus, Bowling Green State University, meel@bgsu.edu, akses tgl 22 September 2012
- Mukono, S. (2015). *Grade 11 Mathematics Learners'concept Images and Mathematical Reasoning on Transformations of Functions* (Doctoral dissertation, UNIVERSITY OF SOUTH AFRICA).
- Parameswaran. R. (2009). Concept image formation in understanding abstract definitions : a case study in graphs in discrete mathematics, *Chennai Mathematical Institute*, H1 SIPCOT IT Park Padur P.O., Siruseri 603106, India
- Sfard, A. (1987). Two conceptions of mathematical notions: Operational and structural. In J. C. Bergeron, N. Herscovics e C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference Psychology of Mathematics Education. PME-XI*, 3, 162-169. Montreal.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1-36.
- Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification—the case of function. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, 25, 59-84.
- Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification—the case of algebra. In *Learning mathematics* (pp. 87-124). Springer Netherlands.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, 12(2), 151-169.
- Tall, D.O. & Gray, E.M., (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for research in Mathematics Education*, 26(2), 116-140.
- Tall, D. (2004, July). Thinking through three worlds of mathematics. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 281-288).
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), 293-305.
- Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for research in mathematics education*, 356-366.
- Viirman, O. (2014). *The function concept and university mathematics teaching*. A Dissertation, Karlstad University Studies, Faculty of Health, Science and Technology Department of Mathematics and Computer Science SE-651 88 Karlstad, Sweden.