

Aproksimasi Bragg-Williams pada Model Ising 2D: Fenomena Kritis Material Ferromagnetik

Edy Wibowo¹✉, Naily Ulya¹ dan Mikrajuddin Abdullah²

¹Prodi Teknik Fisika, Fakultas Teknik Elektro, Universitas Telkom, Indonesia

²Jurusan Fisika, Fakultas Matematika dan ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung, Indonesia

Info Artikel

Sejarah Artikel:

Diterima
17 Juli 2017

Disetujui
16 Agustus 2017

Dipublikasikan
30 Agustus 2017

Keywords:
*Model Ising 2D,
Aproksimasi Bragg-
Williams, Material
Ferromagnetik, Temperatur
Kritis, dan Magnetisasi
Spontan*

Abstrak

Aproksimasi Bragg-Williams pada model Ising 2D material ferromagnetik disajikan dalam makalah ini berdasarkan tinjauan mekanika statistik. Mekanika statistik menjelaskan fenomena fisika pada skala makroskopik ditinjau dari bentuk interaksi materi penyusun sistem tersebut (skala mikroskopik). Berdasarkan tinjauan mekanika statistik, jika ungkapan energi sistem diketahui maka fungsi partisi sistem tersebut akan dapat ditentukan sehingga besaran-besaran termodinamik pada skala makroskopik dapat ditentukan. Sistem makroskopik tersusun oleh materi dengan kuantitas yang sangat besar dengan karakteristik yang juga sangat kompleks sehingga tidak bisa lagi didekati dengan mekanika klasik. Berangkat dari permasalahan ini, Ising membangun sebuah model sederhana untuk menjelaskan fenomena pada skala makroskopik dengan melihat keteraturan interaksi yang terjadi pada skala mikroskopik. Model tersebut berhasil digunakan untuk menyatakan ungkapan energi total dan fungsi partisi sebuah sistem material ferromagnetik. Sejauh ini, telah dilakukan sejumlah pendekatan untuk mencari solusi model tersebut. Di antara pendekatan-pendekatan yang ada, aproksimasi Bragg-Williams dianggap sebagai pendekatan yang paling mudah diterapkan. Dari hasil aproksimasi Bragg-Williams pada model Ising 2D diperoleh informasi bahwa kemagnetan bahan ferromagnetik ditentukan oleh tingkat keteraturan spin dari atom-atom dalam kristal (short-range order and long-range order). Keteraturan spin-spin ini akan berkurang dan akhirnya lenyap saat mencapai temperatur kritis. Temperatur kritis merupakan temperatur transisi material ferromagnetik dari sifat magnet ke bukan magnet. Pendekatan ini berhasil menjelaskan fenomena magnetisasi spontan dan peristiwa perubahan kapasitas panas yang terjadi secara drastis pada material ferromagnetik.

Abstract

The Bragg-Williams approximation on the Ising 2D model of ferromagnetic material is presented in this paper based on a review of statistical mechanics. Statistical mechanics describes the phenomenon of physics on a macroscopic scale in terms of the interaction of the constituent material of the system (microscopic scale). Based on a statistical mechanics point of review, if the expression of energy of system is known then the partition function of the system would be determined so that the thermodynamic parameters on a macroscopic scale can be determined. The macroscopic system is composed of matter with a very large quantity with complex characteristics therefore it can not be approached with classical mechanics. Departing from this issue, Ising built a simple model to explain the phenomena on a macroscopic scale by considering the regularity of interactions that occur on microscopic scales. The model was successfully used to express the total energy and partition function of a ferromagnetic material. So far, a number of approaches have been made to find the solution of the model. Among the existing approaches, the Bragg-Williams approximation is considered the easiest approach to apply. From the results of the Bragg-Williams approximation on Ising 2D model, it is found that the magnetism of ferromagnetic materials is determined by the degree of spin regularity of the atoms in the crystal (short-range order and long-range order). The regularity of these spins will diminish and eventually disappear as it reaches critical temperature. Critical temperature is the transition temperature of ferromagnetic material from magnetic to non-magnetic properties. This approach succeeds in explaining the phenomenon of spontaneous magnetization and the event of drastic heat capacity changes in ferromagnetic materials.

© 2017 Universitas Negeri Semarang

✉ Alamat korespondensi:
Jalan Telekomunikasi No. 1, Terusan Buah Batu, Bandung, Indonesia
E-mail: edyw.phys@gmail.com

p-ISSN 2528-5971
e-ISSN 2528-598X

PENDAHULUAN

Salah satu tujuan mekanika statistik adalah menjelaskan fenomena fisika pada sistem skala makroskopik dilihat dari perilaku interaksi materi penyusunnya. Kuantitas materi penyusun sistem makro sangatlah besar dengan karakteristik yang juga sangat kompleks sehingga tidak bisa lagi didekati dengan mekanika klasik. Salah satu cara untuk memahami sistem yang kompleks adalah dengan membangun model ideal yang diharapkan mampu menunjukkan berbagai karakteristik dari sistem makroskopik tetapi lebih sederhana untuk dipelajari. Salah satu model yang paling terkenal dan ampuh di antara model-model tersebut adalah model Ising dua dimensi (model Ising 2D). Model ini awalnya dipergunakan untuk memodelkan fenomena kritis pada material feromagnetik dan sekarang sudah dikembangkan untuk memodelkan berbagai fenomena fisika yang lain seperti *binary alloy*, kisi gas, cacat kristal, ketidakteraturan material kaca dan bahkan beberapa fenomena di luar bidang fisika (Cipra, 1987; Withhauer & Dieterle, 2007; Pfeuty 1970; Mandre, 2008; Mancini, 2005; Kassan-Ogly dkk., 2015; Lima, 2017; Pechersky, 2017; Burr, 2015; Lanzini, 2017).

Salah satu fenomena kritis yang menarik untuk dikaji adalah transisi fasa (Greiter dkk., 2014; Akinci dan Karakoyun, 2017). Ketika air pada tekanan 1 atm dinaikkan suhunya dari 99 °C menjadi 101 °C kerapatananya tiba-tiba turun secara drastis. Ketika sebatang besi diletakkan dalam medan magnet yang kuat maka besi tersebut akan termagnetisasi menjadi magnet. Ketika medan magnetnya dihilangkan maka sifat magnet besi akan ikut hilang. Akan tetapi teramati juga bahwa jika magnetisasi besi dilakukan dibawah suhu tertentu, sifat kemagnetan besi tidak hilang meskipun medan magnet luarnya dihilangkan, dikatakan bahwa pada kondisi ini terjadi magnetisasi spontan. Kedua fenomena tersebut merupakan peristiwa yang umum dan biasa teramati dalam kehidupan sehari-hari. Sayangnya, di antara mahasiswa fisika sendiri masih banyak yang belum memahami mengapa fenomena tersebut dapat terjadi. Salah satu cara yang dapat digunakan untuk menjelaskan fenomena kritis pada material

feromagnetik adalah dengan menggunakan model Ising. Untuk memecahkan model Ising perlu digunakan pendekatan yang tepat. Pendekatan yang tidak tepat menyebabkan model tersebut akan sulit dipecahkan. Di antara pendekatan-pendekatan yang ada, aproksimasi Bragg-Williams dianggap sebagai pendekatan yang paling sederhana dan mudah diterapkan. Meskipun demikian, masih banyak mahasiswa yang mengalami kesulitan baik secara matematis maupun fisis dalam memecahkan model Ising menggunakan aproksimasi tersebut. Hal ini dikarenakan dalam sejumlah buku fisika maupun mekanika statistik, tidak disertai penjabaran yang detail dalam penurunan rumus yang digunakan. Banyak langkah-langkah dalam penurunan persamaan yang tidak disertakan. Oleh sebab itu, dalam makalah ini akan disajikan penyelesaian model Ising 2D menggunakan aproksimasi Bragg-Williams secara runtut, detail dan bertahap sehingga membantu mahasiswa dalam mempelajari dan memahami terjadinya fenomena kritis material feromagnetik dengan lebih mudah.

METODE

Seperti halnya material paramagnetik, material feromagnetik memiliki magnetik *dipole-like* yang berkaitan dengan spin elektron tidak berpasangan. Interaksi antara *dipole-like* dengan tetangga terdekatnya yang menjadikan material feromagnetik memiliki karakteristik berbeda dengan material paramagnetik. Pada material feromagnetik setiap *dipole-like* mempunyai orientasi yang sama dengan tetangga terdekatnya. Akan tetapi tidak semua bahan feromagnetik, baik untuk dijadikan magnet. Hal ini dikarenakan keseragaman orientasi *dipole-like* terjadi didalam paket-paket yang relatif kecil yang disebut domains. Tiap domain ini tersusun dari jutaan *dipole-like* yang semuanya searah, tetapi domain-domain tersebut memiliki orientasi yang acak satu sama lain. Masing-masing material feromagnetik memiliki tingkat keteraturan orientasi domain yang tidak sama yang berkontribusi pada sifat kemagnetan material tersebut. Material-material tersebut baru akan menjadi magnet permanen jika orientasi domain-domain ini dapat disearahkan (Grifit, 1999).

Model Ising digunakan untuk menjelaskan asembli yang mengandung sistem-sistem yang saling berinteraksi dan tersusun secara teratur. Karena material feromagnetik juga dapat dipandang sebagai asembli yang memiliki keteraturan dengan sistem penyusun yang saling berinteraksi, maka model Ising juga dapat diterapkan dalam material tersebut. Secara umum, dalam model Ising asembli dipandang sebagai susunan teratur dari N sistem pada posisi tetap. Penyusunan sistem-sistem tersebut membentuk kisi-kisi kristal. Bentuk kisi bisa berupa kisi linier (1D), bujur sangkar, persegi panjang, atau segitiga (2D), *simple cubic*, *face centered cubic*, *hexagonal* dan sebagainya (3D). Tiap titik kisi berkaitan dengan salah satu dari dua keadaan yang disimbolkan dengan +1 dan -1. Jika variabel yang menyatakan keadaan kisi ke- i adalah S_i maka S_i hanya boleh memiliki nilai -1 atau +1. Dalam material feromagnetik, keadaan dengan $S_i=+1$ berkaitan dengan *spin up* dan keadaan dengan $S_i=-1$ berkaitan dengan *spin down*. Sehingga kumpulan $\{S_i\}$ menentukan keadaan asembli. Berdasarkan tinjauan elektromagnetik, momen magnet atom ke- i dalam asembli dapat ditentukan menggunakan persamaan (1).

$$\mu_i = \mu S_i \quad (1)$$

dengan μ merupakan permeabilitas suatu bahan.

Jika terjadi interaksi antara spin ke- i dengan medan magnet luar B maka besarnya energi yang dihasilkan dapat dinyatakan dalam persamaan (2). Sehingga energi total interaksinya merupakan penjumlahan keseluruhan interaksi total spin dengan medan seperti yang dinyatakan dalam persamaan (3).

$$U_i = -\mu_i B = \mu B S_i \quad (2)$$

$$U_i = -\mu_i B \sum_i S_i \quad (3)$$

Selain interaksi antara spin ke- i dengan medan magnet luar B (U_i), interaksi antar spin dalam asembli (V_{ij}) juga perlu diperhitungkan. Besarnya energi interaksi antara spin ke- i dengan

spin ke- j dapat dinyatakan secara matematis dalam persamaan (5) sebagai berikut.

$$V_{ij} \propto -\mu_i \mu_j \quad (4)$$

$$V_{ij} = -\alpha \mu_i \mu_j = -\alpha \mu^2 S_i S_j = -\varepsilon_{ij} S_i S_j \quad (5)$$

Sehingga besarnya energi interaksi total antar spin adalah:

$$V = \sum_i \sum_{j>i} V_{ij} \quad (6)$$

$$V = \sum_i \sum_j -\varepsilon_{ij} S_i S_j \quad (7)$$

Energi total merupakan penjumlahan energi total interaksi antara spin ke- i dengan medan magnet luar B (U_i) dan interaksi antar spin dalam asembli (V). Besarnya energi total dinyatakan dalam persamaan (8).

$$E\{S_i\} = -\mu B \sum_i S_i - \sum_i \sum_{j>i} \varepsilon_{ij} S_i S_j \quad (8)$$

$$E\{S_i\} = -\mu B \sum_i S_i - \sum_i \sum_{j \neq i} \varepsilon_{ij} S_i S_j \quad (9)$$

Jika dianggap bahwa hanya interaksi antara dua tetangga terdekat yang dominan, yaitu dua sistem yang berhubungan langsung, maka energi interaksi pada persamaan (9) dapat dinyatakan dalam persamaan (10) sebagai berikut.

$$E\{S_i\} = -\sum_{\langle ij \rangle} \varepsilon_{ij} S_i S_j - \mu B \sum_i S_i \quad (10)$$

dimana simbol $\sum_{\langle ij \rangle}$ menyatakan penjumlahan dilakukan hanya dengan memperhitungkan tetangga terdekat saja. Jika dianggap bahwa interaksi antara dua tetangga terdekat adalah sama, tidak bergantung pada lokasi dimana dua sistem terdekat berada, maka $\varepsilon_{ij}=\varepsilon$ untuk semua i dan j . Dengan demikian persamaan (10) dapat disederhanakan menjadi:

$$E\{S_i\} = -\varepsilon \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j - \mu B \sum_i S_i \quad (11)$$

Jika jumlah tetangga terdekat dinyatakan dalam γ maka untuk setiap nilai i ada sebanyak γ buah nilai j yang merupakan tetangga terdekat. Karena ada N buah indeks i maka jumlah indeks j yang menjadi tetangga terdekat adalah γN . Tetapi perhitungan semacam ini akan menyebabkan dua kali counting sehingga jumlah suku sebenarnya dalam penjumlahan di atas hanyalah $\gamma N/2$. Banyaknya jumlah tetangga terdekat untuk sejumlah kisi kristal dinyatakan dalam Tabel 1.

Tabel 1. Jumlah tetangga terdekat sejumlah kisi Kristal (Mikrajuddin, 2012)

No	Jenis kisi kristal	Jumlah tetangga terdekat (γ)
1	Bujur sangkar	4
2	Simple cubic	6
3	Body centered cubic	8
4	Hexagonal closed packing	12

Pada material feromagnetik untuk kasus dengan energi interaksi antar tetangga lebih besar dari nol ($\varepsilon > 0$) maka fungsi partisi asembly dalam Ising model dapat dinyatakan dalam persamaan (12).

$$Z(B, T) = \sum_{S_1} \sum_{S_2} \dots \sum_{S_N} \exp[-\beta E\{S_i\}] \quad (12)$$

Pada persamaan (12) tiap variable S_i mempunya nilai -1 untuk *spin up* dan +1 untuk *spin down*. Karena ada N buah tanda sumasi maka jumlah suku dalam penjumlahan fungsi partisinya menjadi $2N$ buah. Pada sebuah material dengan dimensi besar, tentunya tersusun dari jutaan atom, maka suku-suku dalam penjumlahan variable S_i pada fungsi partisi juga menjadi sangat banyak. Sehingga, untuk penyederhanaan perhitungan matematis, perlu dilakukan peringkasan suku-suku pada fungsi partisi tersebut. Penyederhanaan fungsi partisi, dilakukan dengan memperkenalkan besaran yang menyatakan jumlah *spin up* yang disimbolkan

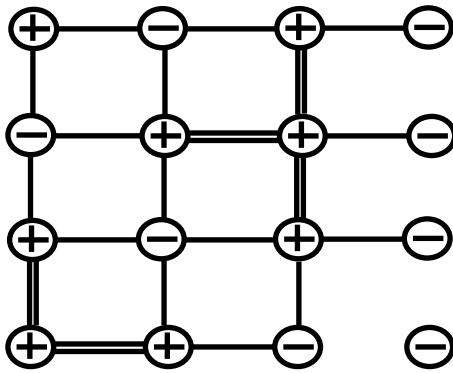
dengan N_+ dan besaran yang menyatakan jumlah *spin down* yang disimbolkan dengan N_- . Hubungan antara jumlah *spin up* dan jumlah *spin down* dinyatakan dalam persamaan (13) sebagai berikut.

$$N = N_+ - N_- \quad (13)$$

dengan N merupakan jumlah keseluruhan *spin up* dan *spin down*. Setelah diperkenalkan dua besaran tersebut, akibatnya akan muncul tiga jenis pasangan spin, yaitu *up-up* (++), *down-down* (--) dan *up-down* (+-). Pasangan (--) dan (++) menyumbang energi yang sama besar, sedangkan pasangan (- +) menyumbang energi yang berlawanan tanda yang akan mengurangi besar energi asembli. Akibatnya energi total asembli dapat ditentukan dengan menjumlahkan pasangan (- -), (++), dan (+ -). Jika jumlah pasangan-pasangan tersebut dinyatakan dengan N_{++} untuk jumlah pasangan (++), N_- untuk jumlah pasangan (- -), dan N_{+-} untuk jumlah pasangan (+-), maka untuk menyusun fungsi partisi asembly digunakan aturan-aturan sebagai berikut: tiap bertemu satu *spin up*, ditarik garis ke tetangga terdekat sedangkan tiap bertemu satu *spin down* tidak ditarik garis ke tetangga terdekat. Akibatnya, pasangan *up-up* akan memiliki dua garis, pasangan *up-down* memiliki satu garis sedangkan pasangan *down-down* tidak dihitungkan oleh garis. Karena tiap satu *spin up* menghasilkan γ buah garis (jumlah tetangga terdekat) maka jumlah garis yang dibuat menjadi γN_+ . Garis tersebut akan terbagi menjadi dua buah penghubung *up-up* dan satu buah penghubung *up-down*. Sehingga akan terpenuhi hubungan dalam persamaan (14) sebagai berikut.

$$\gamma N_+ = 2N_{++} + N_{+-} \quad (14)$$

Secara skematis, cara penyusunan pasangan *up-up*, *down-down* dan *up-down* ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Cara penggambaran pasangan spin.

Untuk memperoleh ekspresi persamaan dalam bentuk lain maka aturan penggambaran garis penghubung antar spin dibalik. Tiap ketemu satu *spin down* ditarik garis ke tetangga terdekat dan jika bertemu satu *spin up* tidak dibuat garis penghubung. Akibatnya, pasangan down-down dihubungkan oleh dua garis, pasangan up-down dihubungkan oleh satu garis dan pasangan up-up tidak dihubungkan garis. Karena dalam aturan ini tiap satu *spin down* menghasilkan γ buah garis (jumlah tetangga terdekat) maka jumlah garis yang dibuat adalah γN_- . Garis tersebut akan terbagi menjadi dua buah penghubung down-down dan satu buah penghubung up-down. Sehingga akan terpenuhi hubungan dalam persamaan (15).

$$\gamma N_- = 2N_{--} + N_{+-} \quad (15)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (13), (14), dan (15) maka akan didapatkan persamaan sebagai berikut

$$N_{+-} = \gamma N_+ - 2N_{++} \quad (16)$$

$$N_- = N - N_+ \quad (17)$$

$$N_{--} = \frac{\gamma}{2} N + N_{++} - \gamma N_+ \quad (18)$$

$$\sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j = N_{++} + N_{--} - N_{+-} = 4N_{++} - 2\gamma N_+ + \frac{\gamma}{2} N \quad (19)$$

$$\sum_i s_i = N_+ - N_- = 2N_+ - N \quad (20)$$

Dari persamaan (19) dan (20) terlihat bahwa energi assembli dapat dinyatakan sebagai fungsi dari jumlah *spin up* dan jumlah pasangan *spin up-up* sehingga dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan (23) sebagai berikut.

$$E(N_+, N_{++}) = -\varepsilon \left\{ 4N_{++} - 2\gamma N_+ + \frac{\gamma}{2} N \right\} - \mu B \{ 2N_{++} - N \} \quad (21)$$

$$E(N_+, N_{++}) = -4\varepsilon N_{++} + 2\varepsilon\gamma N_+ - \frac{\varepsilon\gamma}{2} N - 2\mu B N_+ + \mu B N \quad (22)$$

$$E(N_+, N_{++}) = -4\varepsilon N_{++} + 2(\varepsilon\gamma - \mu B)N_+ - \left(\frac{1}{2}\varepsilon\gamma - \mu B \right) N \quad (23)$$

Sehingga fungsi partisi assembli pada persamaan (12) dapat dinyatakan dengan ungkapan yang lebih sederhana dalam persamaan (24) sebagai berikut.

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{N_+=0}^N \sum_{N_{++}} g(N_+, N_{++}) e^{-E(N_+, N_{++})/kT} \\ &= e^{-\beta N \left(\frac{1}{2}\varepsilon\gamma - \mu B \right)} \sum_{N_+}^N e^{2\beta(\varepsilon\gamma - \mu B)N_+} \sum_{N_{++}} g(N_+, N_{++}) e^{-4\beta\varepsilon N_{++}} \end{aligned} \quad (24)$$

dengan $g(N_+, N_{++})$ adalah fungsi bobot yang berkaitan dengan N_+ dan N_{++} tertentu.

Berdasarkan tinjauan mekanika statistik, jika fungsi partisi suatu sistem dapat ditentukan maka besaran-besaran termodinamik yang lain juga akan bisa ditentukan. Besaran-besaran termodinamik yang dapat diperoleh dari fungsi partisi tersebut disajikan dalam Tabel 2.

Dalam fungsi partisi pada persamaan (24) terlihat bahwa terdapat bobot $g(N_+, N_{++})$ yang masih dinyatakan secara implisit. Akibatnya perhitungan untuk menentukan solusi fungsi partisinya masih sulit untuk dilakukan. Perhitungan baru hanya akan bisa dilakukan jika bentuk eksplisit dari $g(N_+, N_{++})$ diketahui. Ternyata dengan munculnya fungsi bobot tersebut perhitungan fungsi partisi pada persamaan (24) tidak menjadi lebih mudah dibandingkan perhitungan menggunakan persamaan (12). Perhitungan fungsi partisi pada model Ising tetap

sulit dilakukan. Terkait dengan permasalahan tersebut, berbagai metode dan pendekatan telah dilakukan dengan tujuan mencari solusi model Ising. Salah satu pendekatan yang digunakan dan disajikan dalam makalah ini adalah menggunakan aproksimasi Bragg-Williams.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Tampak dari fungsi partisi pada persamaan (24) bahwa energi assembli tidak bergantung secara eksplisit pada distribusi *spin up* dan *spin down*, tetapi hanya bergantung pada jumlah *spin up* dan berapa jumlah pasang *spin up-up*. Dimana letak *spin up* tersebut tidak menentukan energi konfigurasi. Dalam aproksimasi Bragg-Williams diperkenalkan 2 besaran, yaitu N_+/N dan $N_{++}/(\gamma N/2)$. Perhitungan besaran pertama memperhatikan seluruh lokasi dalam assembli, yaitu menghitung semua *spin up* dalam seluruh ruang assembli. Besaran tersebut mengukur keteraturan munculnya *spin up* pada seluruh ruang assembli. Besaran tersebut sering dinamakan “long range order”. Sebaliknya, besaran kedua hanya memperhitungkan pasangan-pasangan tetangga terdekat. Besaran ini mempresentasikan keteraturan lokal, yaitu bagaimana terbentuknya pasangan *spin up-up* dalam wilayah yang sangat kecil, yaitu dengan tetangga terdekat. Oleh karena itu besaran ini dinamakan “short-range order”. Parameter “long-range order” L dan “short-range order” σ didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{N_+}{N} = \frac{1}{2}(L+1), \quad (-1 \leq L \leq +1) \quad (25)$$

$$\frac{N_{++}}{(\gamma/2)N} = \frac{1}{2}(\sigma+1), \quad (-1 \leq \sigma \leq +1) \quad (26)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (25) dan (26) kedalam persamaan (19) dan (20) maka diperoleh persamaan (27) dan (28).

$$\sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j = (\gamma/2)N(2\sigma - 2L + 1) \quad (27)$$

$$\sum_i s_i = NL \quad (28)$$

sehingga ungkapan energi perspin dapat dinyatakan dalam persamaan (29) sebagai berikut

$$\frac{E}{N} = -(\varepsilon\gamma/2)(2\sigma - 2L + 1) - \mu BL \quad (29)$$

Menurut aproksimasi Bragg-Williams, terbentuknya short-range order merupakan akibat dari adanya long-range order. Artinya ada keterkaitan langsung antara short-range order dan long-range order. Aproksimasi ini dapat dinyatakan dalam bentuk ungkapan bahwa probabilitas menemukan pasangan *up-up* \approx kuadrat probabilitas menemukan *spin up* (Huang, 1963; Burr, 2015; Lanzini, 2017). Ungkapan ini dapat didekati dengan bentuk matematis yang dinyatakan dalam persamaan (30). Sehingga dengan pendekatan ini, hubungan antara short-range order dan long-range order dalam persamaan (25) dan (26) dapat dinyatakan secara matematis dalam persamaan (32).

$$\frac{N_{++}}{(\gamma/2)N} = \left(\frac{N_+}{N} \right)^2 \quad (30)$$

dengan menggunakan aproksimasi pada persamaan (30) maka diperoleh ungkapan:

$$\frac{1}{2}(\sigma+1) = \left(\frac{1}{2}(L+1) \right)^2 \quad (31)$$

$$\sigma = \frac{1}{2}(L+1)^2 - 1 \quad (32)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (32) kedalam persamaan (29) maka ungkapan energi perspin menjadi

$$\frac{E}{N} = -(\varepsilon\gamma/2)L^2 - \mu BL \quad (33)$$

sehingga terlihat bahwa energi assembli (E) dan fungsi partisi (Z) masing-masing dapat dinyatakan sebagai fungsi dari L (keteraturan dalam jangkauan panjang) yang dapat dinyatakan dalam persamaan (34) dan (35) sebagai berikut:

$$E = -N(\varepsilon\gamma/2)L^2 - N\mu BL \quad (34)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (34) kedalam bentuk umum fungsi partisi, maka diperoleh ungkapan fungsi partisi pada persamaan (35).

$$Z(B, T) = \sum_{\{S_i\}} \exp \left\{ -\beta N \left(\frac{\varepsilon\gamma L^2}{2} + \mu LB \right) \right\} \quad (35)$$

dengan aproksimasi Bragg-Williams, terlihat bahwa penjumlahan terhadap $\{S_i\}$ dapat digantikan dengan penjumlahan terhadap L dari -1 sampai +1. Nilai L ini ditentukan oleh $N+$. Jumlah keadaan yang berkaitan dengan satu nilai L adalah sama dengan jumlah cara mengambil $N+$ dari sejumlah N spin yang tersedia (Huang, 1963) dan secara matematis dinyatakan dalam persamaan (36).

$$\frac{N!}{N_+!(N-N_+)!} = \frac{N!}{[N(1+L/2)]![N(1-L/2)]!} \quad (36)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (36) kedalam (35) ungkapan fungsi partisinya menjadi:

$$Z(B, T) = \sum_{L=-1}^{+1} \frac{N!}{[N(1+L/2)]![N(1-L/2)]!} \exp \left\{ -\beta N \left(\frac{\varepsilon\gamma L^2}{2} + \mu LB \right) \right\} \quad (37)$$

di dalam matematika, ketika menjumpai perhitungan yang melibatkan kombinasi, maka akan ada satu suku yang paling dominan/ sangat dominan sehingga suku-suku yang lain dapat diabaikan (Abdullah, 2012). Jika suku dominan dari L tersebut dilambangkan dengan \bar{L} maka untuk perhitungan selanjutnya suku-suku yang memuat nilai L dapat digantikan dengan \bar{L} , sehingga fungsi partisi pada persamaan (37) dapat didekati dengan ungkapan:

$$Z(B, T) \approx \frac{N!}{[N(1+\bar{L}/2)]![N(1-\bar{L}/2)]!} \exp \left\{ -\beta N \left(\frac{\varepsilon\gamma \bar{L}^2}{2} + \mu \bar{L} B \right) \right\} \quad (38)$$

$$\ln Z(B, T) \approx \ln \frac{N!}{[N(1+\bar{L}/2)]![N(1-\bar{L}/2)]!} \exp \left\{ -\beta N \left(\frac{\varepsilon\gamma \bar{L}^2}{2} + \mu \bar{L} B \right) \right\} \quad (39)$$

dengan pendekatan Stirling diperoleh,

$$\frac{1}{N} Z(B, T) \approx -\beta \left(\frac{\varepsilon\gamma \bar{L}^2}{2} + \mu \bar{L} B \right) - \frac{1+\bar{L}}{2} \ln \left(\frac{1+\bar{L}}{2} \right) - \frac{1-\bar{L}}{2} \ln \left(\frac{1-\bar{L}}{2} \right) \quad (40)$$

karena \bar{L} memberikan nilai maksimum pada fungsi partisi maka, turunan pertama dari persamaan (40) bernilai nol.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{L}} \frac{1}{N} Z(B, T) \approx \frac{\partial}{\partial \bar{L}} \left[-\beta \left(\frac{\varepsilon\gamma \bar{L}^2}{2} + \mu \bar{L} B \right) - \frac{1+\bar{L}}{2} \ln \left(\frac{1+\bar{L}}{2} \right) - \frac{1-\bar{L}}{2} \ln \left(\frac{1-\bar{L}}{2} \right) \right] = 0 \quad (41)$$

Persamaan (41) memberikan solusi berupa persamaan (42) yang juga mempunyai bentuk lain berupa fungsi hiperbolik yang dinyatakan dalam persamaan (43) sebagai berikut.

$$\ln \frac{1-\bar{L}}{1+\bar{L}} = -2\beta\mu\bar{L} - 2\beta\varepsilon\gamma\bar{L} \quad (42)$$

$$\bar{L} = \tanh \left(\frac{\mu\beta}{kT} + \frac{\varepsilon\gamma\bar{L}}{kT} \right) \quad (43)$$

untuk kasus tidak ada medan magnet luar, maka persamaan (43) dapat dinyatakan dalam bentuk yang lebih sederhana menjadi persamaan (44) dan solusinya dapat ditentukan secara grafis berdasarkan Gambar 2. Dari analisis secara grafis diperoleh solusi yang dinyatakan dalam persamaan (45).

$$\bar{L} = \tanh \left(\frac{\varepsilon\gamma\bar{L}}{kT} \right) = \tanh \Phi \quad (44)$$

$$\bar{L} = \begin{cases} 0, & \frac{\varepsilon\gamma}{kT} < 1 \\ \pm L_0, & \frac{\varepsilon\gamma}{kT} > 1 \end{cases} \quad (45)$$

untuk kasus dimana $\varepsilon > 0$, diperoleh suatu temperatur kritis yang didefinisikan dalam persamaan (46). Sehingga bentuk solusi dalam persamaan (46) dapat disederhanakan dan dinyatakan dalam persamaan (47) sebagai berikut.

$$\frac{\varepsilon\gamma}{k} = T_c \quad (46)$$

$$\bar{L} = \begin{cases} 0, & T > T_c \\ \pm L_0, & T < T_c \end{cases} \quad (47)$$

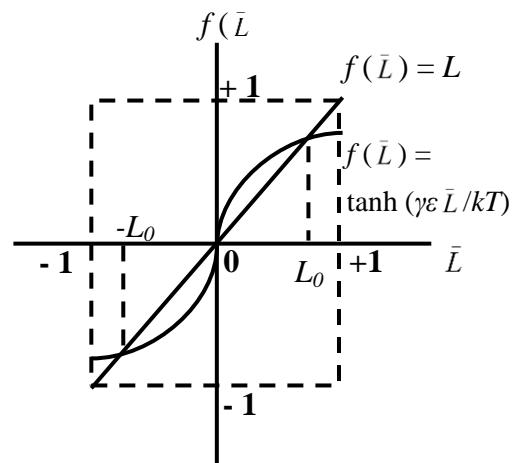
Tabel 2. Besaran-besaran Termodinamik

No	Besaran Termodinamik	Formulasi
1	Energi bebas Helmholtz	$F(B,T) = -kT \ln Z(B,T)$
2	Energi dalam	$U(B,T) = -kT \frac{\partial}{\partial T} \ln \left(\frac{F}{kT} \right)$
3	Magnetisasi	$M(B,T) = -\frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{F}{kT} \right) = \left\langle \sum_{i=1}^N S_i \right\rangle$
4	Kapasitas panas	$C(B,T) = \frac{\partial U}{\partial T}$

Dimana $\langle \rangle$ merupakan notasi untuk ensemble rata-rata, sehingga $M(B,T)$ disebut spontaneous magnetisasi.

Secara umum, nilai L_0 dapat ditentukan secara numerik menggunakan computer, akan tetapi untuk daerah disekitar $T = 0$ dan $T = T_c$ pendekatan nilai L_0 secara analitik dapat dilakukan. Besarnya aproksimasi nilai L_0 dinyatakan dalam persamaan (48) dan (49) dan secara grafik ditunjukkan pada Gambar 3. Dengan menggunakan solusi tersebut, besaran termodinamik pada Tabel 1 juga dapat ditentukan dan disajikan dalam Tabel 3.

Karena \bar{L} merupakan besaran yang menyatakan magnetisasi perpartikel (Huang, 1963), sehingga dari Gambar 3 dapat dilihat bahwa pada saat $T < T_c$ material bersifat feromagnetik, artinya material tetap bersifat sebagai magnet meskipun medan magnet luar dihilangkan (Mandre, 2008).

Gambar 2. Grafik tangen hiperbolik Φ

Terlihat bahwa sifat kemagnetan material semakin melemah ketika mendekati suhu kritis dan akhirnya hilang tepat pada temperatur kritis tersebut yang ditunjukkan dengan nilai L_0 berga nol. L_0 merupakan besaran yang berkaitan dengan besaran \bar{L} yang menyatakan keteraturan pada jangkauan panjang pada sistem kristal (long-range order). Sehingga, pada material feromagnetik, keteraturan ini bisa diartikan sebagai keteraturan atau keseragaman dari orientasi spin dari atom-atom penyusunnya. Keteraturan spin-spin inilah yang menentukan tingkat kemagnetan suatu bahan feromagnetik. Jika keteraturan orientasi spinnya semakin panjang maka tingkat kemagnetannya semakin kuat. Sebaliknya sifat kemagnetannya semakin melemah jika jangkauan keteraturan spinnya semakin pendek dan akhirnya kemagnetannya hilang ketika keteraturan tersebut tidak ada lagi (orientasi spin-spinnya acak).

$$L_0 \approx 1 - 2e^{-2T_c/T} \quad \left(\frac{T_c}{T} \ll 1 \right) \quad (48)$$

$$L_0 \approx \sqrt{3 \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)} \quad \left(0 < 1 - \frac{T_c}{T} \ll 1 \right) \quad (49)$$

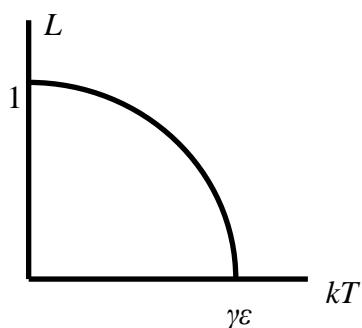
dari Gambar 3 terlihat bahwa nilai L_0 menurun ketika menuju temperatur kristis dan bernilai nol ketika tepat sampai pada titik kritis tersebut. Ini dapat diartikan bahwa keteraturan dari orientasi spin juga merupakan fungsi dari temperatur.

Tabel 3. Solusi besaran-besaran termodinamik

No	Besaran Termodinamik	Solusi
1	Fungsi Helmholtz	$\frac{1}{N} F(0, T) = \begin{cases} 0, & (T > T_c) \\ \frac{\gamma\epsilon}{2} L_0^2 + \frac{kT}{2} \ln \frac{1-L_0^2}{4}, & (T < T_c) \end{cases}$
2	Unergi dalam	$\frac{1}{N} U(0, T) = \begin{cases} 0, & (T > T_c) \\ -\frac{\gamma\epsilon}{2} L_0^2, & (T < T_c) \end{cases}$
3	Magnetisasi	$\frac{1}{N} M(0, T) = \begin{cases} 0, & (T > T_c) \\ L_0, & (T < T_c) \end{cases}$
4	Capasitas kalor	$\frac{1}{Nk} C(0, T) = \begin{cases} 0, & (T > T_c) \\ \frac{\gamma\epsilon}{2} \frac{dL_0^2}{dT}, & (T < T_c) \end{cases}$

Pada suhu kritis keteraturan orientasi spin-spin tersebut hilang. Dengan kata lain pada temperatur kritis orientasi spin atom-atom menjadi acak (tidak teratur) sehingga menyebabkan sifat kemagnetan bahan hilang.

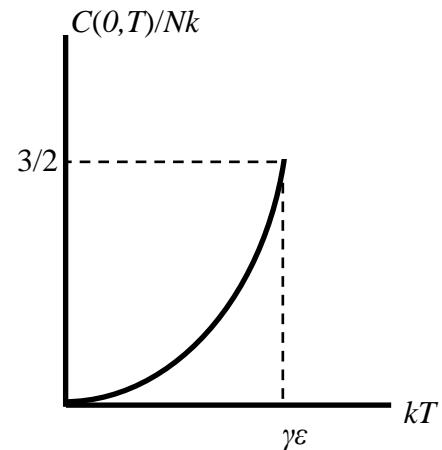
Di atas suhu kritis ($T > T_c$), bahan tidak lagi bersifat feromagnetik sehingga sifat kemagnetan bahan akan langsung hilang ketika medan magnet luarnya dihilangkan (Grifit, 1999). Sehingga temperature kritis atau biasa disebut suhu kuri dapat diartikan sebagai suhu transisi material feromagnetik dari sifat magnet ke tidak magnet. Hasil ini dapat digunakan untuk menjelaskan mengapa pada suhu tertentu sifat kemagnetan bahan tidak hilang meskipun medan magnet luar dihilangkan sedangkan pada suhu yang lain sifat kemagnetannya hilang bersamaan dengan dihilangkannya medan magnet luar.



Gambar 3. Magnetisasi spontan pada proksimasi Bragg-Williams.

Selanjutnya jika persamaan (49) disubstitusikan ke dalam persamaan ke-4 pada Tabel 3 maka diperoleh ungkapan kapasitas kalor pada persamaan (50) yang secara grafik ditunjukkan pada Gambar 4 sebagai berikut.

$$\frac{1}{Nk} C(0, T) = \frac{3}{2} \quad (50)$$



Gambar 4. Kapasitas panas pada aproksimasi Bragg-Williams.

Dari Gambar 4 dapat dilihat bahwa, selain menyebabkan transisi sifat kemagnetan bahan, ternyata hilangnya keteraturan dari jangkauan pendek maupun jangkauan panjang dari atom-atom penyusun material juga menyebabkan hilangnya kapasitas panas material tersebut secara tiba-tiba. Kapasitas panas meningkat secara drastis ketika suhu

material semakin mendekati temperatur kritis dan kemudian tiba-tiba lenyap pada temperatur kritis tersebut.

SIMPULAN

Model Ising 2D untuk kasus material ferromagnetik telah berhasil dipecahkan menggunakan aproksimasi Bragg-Williams. Dari hasil aproksimasi ini diketahui bahwa kemagnetan bahan ferromagnetik ditentukan oleh tingkat keteraturan spin dari atom-atom dalam kristal. Keteraturan spin-spin ini akan berkurang dan akhirnya lenyap di satu titik saat mencapai temperatur kritis. Hasil ini telah berhasil menjelaskan fenomena magnetisasi spontan dan peristiwa perubahan kapasitas panas yang terjadi secara drastis pada material ferromagnetik.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdullah, M. (2012). Mekanika Statistik (Catatan Kuliah). Bandung: Penerbit ITB.
- Akinci, U dan Karakoyun G. Hysteresis behavior of the binary Ising model, *Physica B* 521 (2017) 365–370.
- Burr, P.A., Middleburgh, S.C. dan Grimes, R.W. Crystal structure, thermodynamics, magnetics and disorder properties of Be–Fe–Al intermetallics, *Journal of Alloys and Compounds* 639 (2015) 111–122.
- Cipra, B., A., 1987. An Introduction to the Ising Model, *The American Mathematical Monthly* 94 (1987), 937.
- Griffiths, D.J. (1999). Introduction to Electrodynamics (3rd edition). Prentice Hall: New Jersey.
- Greiter, M., Schnells, V., dan Thomale, R. The 1D Ising model and the topological phase of the Kitaev chain. *Annals of Physics* 351 (2014) 1026–1033.
- Huang, K. (1963). Statistical Mechanic (2nd edition). John Wiley & Sons: USA.
- Kassan-Ogly, F.A., Murtazaev, A.K., Zhuravlev, A.K., Ramazanov, M.K., dan Proshkin, A.I. Ising model on a square lattice with second-neighbor and third-neighbor interactions. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 384 (2015) 247–254.
- Lanzini, F. Atomic ordering in Cu-Al-Ni: Point approximation and Monte Carlo Simulations. *Computational Materials Science* 128 (2017) 198–206.
- Lima, L.S. Modeling of the financial market using the two-dimensional anisotropic Ising model. *Physica A* 482 (2017) 544–551.
- Mancini, F. New Perspectives on the Ising Model, *European Physical Journal B* 45 (2005), 497.
- Mandre, Indrek. (2008). The Ising Model (Simulation of Physical Processes). Tallinn: Tallinn University of Technology.
- Pechersky, E., Via, G. dan Yambartsev, A. Stochastic Ising model with plastic interactions, *Statistics and Probability Letters* 123 (2017) 100–106
- Pfeuty, Pierre. The One-Dimensional Ising Model with a Transverse Field. *Annals of Physics*: 57, 79-90 (1970).
- Withauer, Lilian & Dieterle, Manuel. (2007). The Phase Transition of the 2D-Ising Model (summer term 2007)