

Tentang Sistem Mekanik Dengan Kendala Tak Holonomik

M. F. Rosyid

Kelompok Penelitian Kosmologi, Astrofisika, dan Fisika Matematik (KAM),

Laboratorium Fisika Atom dan Inti, Jurusan Fisika FMIPA UGM

Sekip Utara BLS 21 Yogyakarta

Email: farchani@ugm.ac.id

Abstrak

Dibicarakan perumusan matematis sistem mekanik dengan kendala tak holonomik jenis kedua. Kendala tak holonomik jenis kedua adalah kendala yang membatasi konfigurasi sistem mekanik pada subhimpunan terbuka dalam ruang konfigurasi sistem mekanik tersebut. Pembatasan dimodelkan dengan potensial *bumper* yang cukup tinggi di luar subhimpunan terbuka itu. Profil *bumper* menggambarkan jenis tumbukan dengan perbatasan. Sebuah contoh kasus bagi sistem mekanik semacam itu hendak dibicarakan.

Kata kunci: kendala tak holonomik, ruang konfigurasi, fisika matematik

Pendahuluan

Ruang konfigurasi bagi sistem mekanik sederhana pada tataran keumuman tertentu adalah keragaman (manifold) Riemannian (Q, g) . Dalam hal ini, ruang keadaan (fase) bagi sistem mekanik semacam itu adalah untangan kotangen (cotangential bundle) T^*Q yang dibekali dengan struktur simplektik alamiah $\varpi = d\theta$ yang secara lokal dapat dituliskan sebagai $\varpi = dq^\alpha \wedge dp_\alpha$, dengan (dq^α, dp_α) adalah tata koordinat kanonis [1]. Struktur simplektik ini seterusnya akan menentukan persamaan gerak (dinamika) sistem yang ditinjau. Keberadaan kendala (*constraint*) tak holonomik dapat menyebabkan baik penyempitan ruang konfigurasi maupun ruang fase. Kendala yang pertama menyebabkan pembatasan "arah" momentum (kecepatan) karena berkurangnya dimensi ruang fase. Sementara kendala yang kedua menyebabkan pengurangan rentang nilai koordinat-koordinat umum karena konfigurasi bagi sistem mekanik terbatas hanya pada sebuah subhimpunan terbuka pada Q . Jadi, dalam praktek akan ditemukan tiga kasus:

(a) Sistem mekanik dengan kendala tak holonomik jenis pertama. Contoh untuk kasus ini adalah *snakeboard* atau *roler racer* yang dimainkan dalam *hall* yang berbentuk sebuah kulit bola.

- (b) Sistem mekanik dengan kendala tak holonomik jenis kedua. Contoh untuk kasus ini adalah lengan tangan bagian bawah, *ball joint*, dst.
- (c) Sistem mekanik dengan kendala tak holonomik jenis pertama dan kedua sekaligus. Contoh untuk kasus ini adalah *snakeboard* atau *roler racer* yang dimainkan pada permukaan terbatas.

Makalah ini hendak membicarakan perumusan matematis yang menggambarkan perilaku sistem mekanik dengan kendala tak holonomik jenis kedua. Guna memberikan gambaran nyata, sebuah contoh kasus hendak dibicarakan.

Dinamika Sistem Mekanik dengan Kendala Tak Holonomik

Andaikan (Q, g) keragaman Riemannian yang berdimensi n , dengan metrik g yang merupakan keragaman (ruang) konfigurasi bagi suatu sistem mekanik sederhana dan $q = (q^1, \dots, q^n)$ tata koordinat lokal pada Q . Andaikan \mathbf{R} himpunan yang beranggotakan semua bilangan riil dan $L: TQ \rightarrow \mathbf{R}$, fungsi Lagrangean yang reguler dalam artian

$$\det \left[\frac{\partial^2 L}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \right] \neq 0.$$

Dari Lagrangean ini, dinamika sistem mekanik sederhana itu dapat diturunkan.

Secara matematis [3, 4], sebuah kendala bagi sistem mekanik yang kita tinjau adalah himpunan $K = \{\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^k\}$ yang beranggotakan k buah forma diferensial sedemikian rupa sehingga matriks

$$A(q) = \begin{bmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \dots & \omega_1^k \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \dots & \omega_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n^1 & \omega_n^2 & \dots & \omega_n^k \end{bmatrix}, \quad (1)$$

dengan $\omega_\alpha^i(q)$ ($\alpha = 1, \dots, n$) adalah komponen-komponen $\omega^i(q)$, memiliki derajat (*rank*) sama dengan k di semua titik $q \in Q$. Keberadaan himpunan K semacam itu menyebabkan adanya agihan (distribusi) \mathcal{D} yang berdimensi k [2] pada Q yang melenyapkan K dalam arti

$$\mathcal{D}(q_0) = \ker[A^T(q_0)], \quad (2)$$

untuk setiap $q_0 \in Q$, dengan A^T adalah transpose matriks dalam pers.(1). Agihan \mathcal{D} dalam pers.(2) menentukan kecepatan-kecepatan yang diijikan oleh kendala. Kendala K dikatakan **holonomik** jika agihan \mathcal{D} involutif, yakni bahwa Q terfoliasi atas submanifold-submanifold berdimensi k . Dengan teorema Frobenius, terdapat sebuah tata koordinat lokal $\bar{q} = (\bar{q}^1, \dots, \bar{q}^n)$ sedemikian rupa sehingga

$$\bar{q}^{n-k+1} = c^{n-k+1}, \dots, \bar{q}^n = c^n,$$

dengan c^{n-k+1}, \dots, c^n merupakan tetapan-tetapan. Selanjutnya pengertian kendala **tak holonomik** meliputi dua hal:

- a. Yang pertama adalah kendala K dengan agihan \mathcal{D} yang tidak involutif. Selanjutnya, kendala ini akan disebut **kendala tak holonomik jenis pertama**. Untuk kendala jenis pertama ini, ruang konfigurasi tidak menyusut, tetapi hanya bagian kecepatan ruang fase yang mengalami penyempitan, dalam artian tidak semua arah kecepatan

dijijikan. Adapun kecepatan yang diijikan adalah yang berada pada agihan \mathcal{D} .

- b. Yang kedua adalah sebuah kendala yang membatasi gerak sistem mekanik itu hanya dalam suatu subset terbuka $U \subset Q$ yang tersambung (*connected*) dalam ruang konfigurasi. Kendala ini seterusnya hendak disebut kendala **tak holonomik jenis kedua**. Karena U subhimpunan terbuka di Q maka batas ∂U adalah permukaan berdimensi $n-1$ di Q . Permukaan ini diandaikan sebagai *level set* sebuah nilai reguler sebuah fungsi diferensiable $\kappa : Q \rightarrow \mathbb{R}$.

Sistem Mekanik dengan Kendala Tak Holonomik Jenis Kedua

A. Formalisme

Andaikan U adalah sebuah subhimpunan terbuka dalam keragaman konfigurasi Q . Wilayah terbuka U dimaksudkan sebagai wilayah konfigurasi yang diijikan bagi sistem mekanik yang kita tinjau. Jadi, sistem mekanik yang kita tinjau dibatasi geraknya pada U . Ruang fase bagi sistem mekanik kita adalah subuntingan $TU \subset TQ$. Dalam hal semacam ini, masalah yang dihadapi adalah ketidaklengkapan medan vektor pada U sehingga kurva lintasan sistem mekanik terpotong di sana, sedangkan parameter (waktu) terus berjalan. Masalah pokok inilah yang akan diselesaikan dalam penelitian ini. Masalah ini akan kita selesaikan dengan memodelkan kendala semacam itu sebagai sebuah potensial bumper yang mencegah sistem berada pada wilayah di luar U . Jadi, ruang konfigurasi bagi sistem mekanik yang ditinjau tetaplah Q , kecuali pada fungsi Lagrangean sistem harus ditambahkan potensial *bumper*.

Andaikan $V \subset U$ himpunan tertutup yang terpisahkan dari $Q \setminus U$ oleh sebuah lingkungan-lingkungan terbuka, yakni terdapat lingkungan terbuka T dan T' dengan $T \cap T' = \emptyset$ sedemikian rupa sehingga $V \subset T$ dan $Q \setminus U \subset T'$. Andaikan $\beta(E)$ sebuah tetapan yang berparameterkan energi keseluruhan E . Terdapat sebuah fungsi kontinyu

$$B^{\beta(E)} : Q \rightarrow \mathbb{R} \quad (3)$$

dengan

$$B^{\beta(E)}(q) = \begin{cases} 0, & \text{untuk } q \in V \\ f(q), & \text{untuk } q \in U \setminus V \\ \beta(E), & \text{untuk } q \in Q \setminus U, \end{cases} \quad (4)$$

dan f adalah fungsi pada $\overline{U \setminus V}$ yang kontinu sedemikian rupa sehingga $f(q) = 0$ pada wilayah $(\overline{U \setminus V}) \cap V$ dan $f(q) = \beta(E)$ dalam wilayah $(\overline{U \setminus V}) \cap (Q \setminus U)$. Fungsi $B^{\beta(E)}(q)$ disebut potensial **bumper**. Bukti konstruktif keberadaan potensial bumper $B^{\beta(E)}(q)$ diberikan sebagai berikut: berdasarkan *Lemma Urisohn*, terdapat fungsi kontinu $u^{lu} : Q \rightarrow \mathbb{R}$, dengan

$$u^{lu}(q) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } q \in Q \setminus U \\ 0, & \text{untuk } q \in V \end{cases}. \quad (5)$$

Potensial bumper bagi wilayah U selanjutnya dikonstruksi sebagai $B^{\beta(E)}(q) = \beta(E)u^{lu}(q)$ untuk setiap titik $q \in Q$. Faktor $\beta(E)$ disebut ketinggian *bumper* dengan nilai harus lebih besar jika dibandingkan dengan energi keseluruhan sistem tanpa kendala. Lagrangean sistem mekanik dengan kendala holonomik semacam itu adalah

$$L = T - V^0 - B^{\beta(E)}, \quad (6)$$

dengan V^0 adalah energy potensial sistem tanpa kendala.

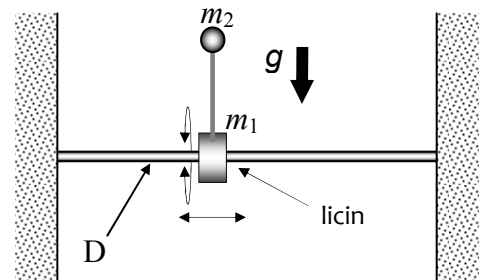
Bentuk fungsional $u^{lu}(q)$ ataupun $f(q)$ pada wilayah $U \setminus V$ menggambarkan seberapa keras/kenyal perbatasan ∂U . Jika perbatasan ∂U memiliki kesetangkupan (simetri) tertentu, tata koordinat (η^1, \dots, η^n) yang sesuai dengan kesetangkupan itu dapat dipilih sedemikian rupa sehingga salah satu koordinat $\eta^j = \kappa = \text{tetapan}$ pada perbatasan ∂U . Dalam hal ini, fungsi $B^{\beta(E)}$ dapat dinyatakan sebagai fungsi berpeubah tunggal $B^{\beta(E)} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, dengan (a, b) adalah

jangkauan (*range*) koordinat κ . Jadi, fungsi Lagrange (6) di atas dapat dituliskan sebagai

$$L(\eta, \dot{\eta}) = T(\eta, \dot{\eta}) - V^0(\eta) - B^{\beta(E)}(\kappa). \quad (7)$$

B. Kasus

Sketsa sebuah sistem mekanik yang hendak ditinjau diperlihatkan oleh Gambar 1. Jarak antara dinding pembatas adalah $2b$. Batang penghubung antara benda bermassa m_1 dan m_2 sangat ringan. Panjang batang penghubung ini adalah d .

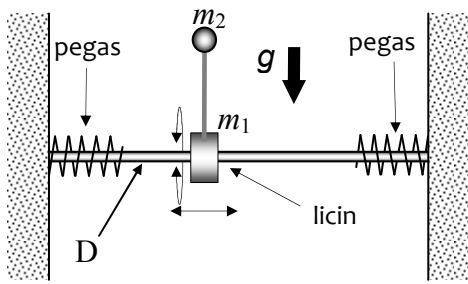


Gambar 1: Sistem mekanik dengan kendala takholonomik jenis kedua

Tanpa kedua dinding pembatas itu sistem mekanik ini memiliki ruang konfigurasi permukaan silinder $S^1 \times \mathbb{R}$. Andaikan (θ, x) tata koordinat umum pada $S^1 \times \mathbb{R}$, dengan $x = 0$ pada bidang yang tegak lurus pada batang D dan membagi batang itu sama panjang. Sudut θ diukur dari bidang vertikal. Konfigurasi sistem oleh karena itu terbatas oleh dinding pada subhimpunan terbuka $S^1 \times (-b, b) \subset S^1 \times \mathbb{R}$. Energi potensial sistem tanpa pembatas adalah energi potensial gravitasi

$$V^0 = V_g = m_2 g d \cos \theta.$$

Kedua pegas yang terlihat pada Gambar 2 adalah pegas identik dengan tetapan k . Kedua pegas ini adalah pegas imajiner yang merupakan model bagi kekenyalan dinding pembatas. Panjang pegas saat rileks l .



Gambar 2: Potensial pegas sebagai potensial bumper

Potensial bumper dalam hal ini diberikan oleh

$$\begin{aligned}
 B^{\beta(E)}(x) &= \beta(E)u(x-b) + \beta(E)u(-b-x) \\
 &+ \frac{\beta(E)}{2l^2}[u(x-b+l) + u(b-x)][l-(b-x)]^2 \\
 &+ \frac{\beta(E)}{2l^2}[u(x+b) + u(-b+l-x)][l-(x+b)]^2,
 \end{aligned} \tag{8}$$

dengan $u(x)$ adalah fungsi undak satuan yang didefinisikan oleh

$$u(x-a) = \begin{cases} 1, & x \geq a \\ 0, & x < a. \end{cases}$$

Agar dipenuhi syarat kontinuitas, ketinggian bumper $\beta(E)$ harus memenuhi persamaan

$$\beta(E) = (1/2)kl^2.$$

Dalam hal ini, u^{lu} diberikan oleh

$$\begin{aligned}
 u^{lu}(x) &= u(x-b) + u(-b-x) \\
 &+ \frac{1}{2l^2}[u(x-b+l) + u(b-x)][l-(b-x)]^2 \\
 &+ \frac{1}{2l^2}[u(x+b) + u(-b+l-x)][l-(x+b)]^2,
 \end{aligned} \tag{9}$$

Energi potensial keseluruhan diberikan oleh

$$V(x, \theta) = B^{\beta(E)}(x) + m_2gd \cos \theta. \tag{10}$$

Sementara energi kinetik diberikan oleh

$$T(\dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2d^2\dot{\theta}^2. \tag{11}$$

Persamaan gerak diperoleh melalui persamaan Euler-Lagrange:

a. bagian θ :

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{d} \sin \theta = 0. \tag{12}$$

b. bagian x :

$$\begin{aligned}
 (m_1 + m_2)\ddot{x} &+ \beta(E)[\delta(x-b) - \delta(b+x)] \\
 &+ \frac{\beta(E)}{2l^2}[\delta(x-b+l) - \delta(b-x)][l-b+x]^2 \\
 &+ \frac{\beta(E)}{l^2}[u(x-b+l) + u(b-x)][l-b+x] \\
 &+ \frac{\beta(E)}{2l^2}[\delta(x+b) - \delta(b-l+x)][l-x-b]^2 \\
 &- \frac{\beta(E)}{l^2}[u(x+b) + u(-b+l-x)][l-x-b] = 0.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Jika perbatasan cukup keras, maka pegas tidak diperlukan dan persamaan (13) menjadi

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + \beta(E)[\delta(x-b) - \delta(b+x)] = 0. \tag{14}$$

Persamaan terakhir ini masih dapat didekati dengan mengambil distribusi Gauss ataupun fungsi-fungsi pendekatan lain untuk delta Dirac $\delta(x)$.

Kesimpulan

Perumusan matematis sistem mekanik dengan kendala tak holonomik jenis kedua dapat diperoleh dengan menerapkan potensial bumper. Pembatasan yang dimodelkan dengan potensial bumper yang melibatkan fungsi undak satuan menghasilkan persamaan gerak umum yang mengandung suku-suku distribusi atau fungsi diperluas (*generalized function*) berupa delta Dirac. Profil bumper menggambarkan jenis tumbukan dengan perbatasan.

Pustaka Rujukan

[1] R. Abraham dan J.E. Marsden, 1978, *Foundation of Classical Mechanics*,

- second edition, Benjamin/Cummings Pub. Co., London.
- [2] S. Kobayashi dan K. Nomizu, 1963, *Foundation of Differential Geometry I*, Interscience Pub., New York.
- [3] A.J. van der Schaft, dan B.M. Maschke, On the Hamiltonian Formulation of Nonholonomic Mechanical Systems, *Report on Mathematical Physics* 34(20) 1994.
- [4] V. Duindam dan S. Stramigioli, Lagrangian Dynamics of Open Multibody Systems with Generalized Holonomic and Nonholonomic Joints, *Proceedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems San Diego, CA, USA, Oct 29 - Nov 2, 2007*