

Pemodelan Distribusi Bintang-Bintang pada Gugus Bola dengan Densitas Plummer Isotropik

Fikri Yudistira Eka Praja Untarto, Hasanuddin ✉, Bintoro Siswo Nugroho

Jurusan Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Tanjungpura, Indonesia

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima:
09 September 2022
Disetujui:
30 Mei 2023
Dipublikasikan:
31 Juli 2023

Keywords:
Globular cluster,
Plummer model,
Sampling

ABSTRAK

Simulasi yang berkaitan dengan gugus bola sangat penting dilakukan untuk mengetahui evolusi dan dinamika gugus bola. Dalam penelitian ini, kami mendeskripsikan sebuah model gugus bola dengan densitas Plummer isotropik melalui teknik sampling *rejection* yang mirip dengan *kali code*. Kemudian, kami membuat modul program dalam bahasa pemrograman Python. Model yang dihasilkan oleh modul ini sesuai dengan beberapa parameter teoretis Plummer. Walaupun model Plummer ini hanya cocok untuk daerah di sekitar inti dari gugus bola hasil observasi, tetapi model Plummer distribusi bintang-bintang dapat digunakan sebagai kondisi awal gugus bola dalam simulasi gugus bola.

ABSTRACT

Simulation related to globular clusters is crucial for comprehending their evolution and dynamics. In this study, we present a model of a globular cluster using an isotropic Plummer density law generated through the rejection sampling technique, which closely resembles the Kali code. Subsequently, we developed a Python module to implement this model. The generated model exhibits high accuracy when compared to the theoretical parameters of the Plummer model. Although the Plummer model only matches the observed data within the core region of the globular cluster, it can still serve as an appropriate initial condition for simulating globular clusters.

✉ Alamat korespondensi:
Jurusan Fisika, FMIPA, Universitas Tanjungpura
E-mail: hasanuddin@physics.untan.ac.id

PENDAHULUAN

Gugus bola (*globular cluster*) merupakan sekumpulan bintang berjumlah antara 10^3 - 10^6 yang saling tarik menarik satu sama lain melalui gaya gravitasi dan memiliki bentuk seperti sebuah bola dan bergerak mengitari inti Galaksi (Heggie & Hut, 2003). Berdasarkan hasil perhitungan bintang dalam beberapa gugus bola (Bailey, 1916) dan pengamatan fotometri gugus bola (Watson dkk., 1994), densitas bintang tertinggi berada di inti gugus bola dan berkurang seiring dengan jarak dari inti. Profil densitas ini dapat didekati dengan model Plummer untuk gugus bola dengan konsentrasi rendah (Plummer, 1911) dan model King untuk gugus bola dengan konsentrasi tinggi (King, 1962; Pallanca dkk., 2021).

Penelitian tentang gugus bola sangat penting karena data yang diperoleh dari parameter fisis gugus bola menyingkap beberapa informasi tentang alam semesta. Sebagai contoh, sebagian besar bintang dalam gugus bola memiliki usia dan komposisi kimia yang sama dan gugus bola merupakan objek dengan usia tertua di alam semesta. Informasi tersebut dapat digunakan untuk memperkirakan usia alam semesta dengan galat sistematis yang baik (Valcin dkk., 2021). Contoh lainnya adalah estimasi jarak gugus bola menggunakan nilai luminositasnya. Karena luminositas intrinsik setiap gugus bola hampir sama dan magnitudo semunya meningkat seiring dengan bertambahnya jarak gugus bola, maka fungsi luminositas gugus bola dapat dijadikan sebagai alat alternatif pengukur jarak (Rejkuba, 2012).

Penelitian gugus bola tidak hanya sebatas pada observasi saja, tetapi mencakup studi teori dan komputasi yang saat ini telah didukung oleh kemampuan komputer yang semakin baik. Studi teori dan komputasi diperlukan karena penelitian observasi hanya memberikan informasi fisis pada rentang waktu yang sangat singkat, sehingga dinamika gugus bola yang memiliki skala waktu yang jauh lebih panjang tidak dapat diketahui. Komputasi numerik diperlukan untuk dapat mensimulasikan evolusi gugus bola bintang. Selain itu, studi teori dan komputasi juga diperlukan untuk mempelajari perubahan struktur internal bintang, seperti pembentukan bintang biner dan interaksi kuat antar bintang (Hurley dkk., 2005). *Globular cluster* tidak terisolasi tetapi berinteraksi dengan galaksi yang dikelilinginya. Hal ini juga akan mempengaruhi dinamika dan evolusi gugus bola. Dalam simulasi gugus bola, sebuah kondisi awal seperti posisi dan kecepatan bintang-bintang yang merepresentasikan gugus bola teramati dibuat melalui sebuah model. Model yang sangat sederhana adalah model Plummer, yang menggambarkan profil densitas ρ terhadap jari-jari gugus bola r dengan hubungan $\rho \propto r^{-5}$ (untuk r yang cukup besar).

Densitas permukaan 26 gugus bola dalam *galactic globular cluster* telah dihitung berdasarkan pengamatan teleskop angkasa Hubble (HST) dan profilnya telah dibandingkan dengan model King dan Wilson (Miocchi dkk., 2013). Dari densitas permukaan yang teramati, terlihat bahwa inti gugus bola memiliki densitas yang hampir konstan dan gugus tersebut memiliki jari-jari *cut-off* (radius ketika nilai densitas permukaan sama dengan nol). Hal ini menimbulkan sebuah pertanyaan, apakah model Plummer masih dapat digunakan sebagai model gugus bola yang teramati saat ini?

Kode program yang dapat membangkitkan model Plummer telah dibuat oleh beberapa peneliti sebelumnya, misalnya *kali code* (Hut & Makino, 2007). Kode tersebut menggunakan teknik *sampling rejection*. Selain itu, perangkat lunak *open source* dalam simulasi N-benda seperti AMUSE menyertakan modul untuk membuat sebuah model gugus bola (Portegies dkk., 2013). Model kondisi awal gugus bola seperti *kali code* diimplementasikan dalam bahasa pemrograman Ruby. Saat ini, bahasa pemrograman yang paling populer berdasarkan indeks TIOBE per bulan Juni 2022 adalah Python. Untuk membandingkan model Plummer yang telah dibuat dengan bahasa pemrograman sebelumnya dan agar metode numerik yang digunakan dapat dikembangkan lebih lanjut, perlu dibuat sebuah program menggunakan bahasa yang lebih populer, seperti Python.

Penelitian ini dibuat kode program yang dapat menghasilkan model Plummer gugus bola dengan distribusi kecepatan isotropik dan teknik *sampling rejection* menggunakan bahasa pemrograman

Python. Selain itu, dilakukan pula pengujian pada model yang dibuat untuk melihat apakah distribusi bintang-bintang yang terbentuk berada dalam keadaan ekuilibrium (memenuhi teorema *virial*) dan apakah densitas permukaan model yang dibuat sesuai dengan model analitik Plummer. Dilakukan pula pencocokkan kurva terhadap profil densitas permukaan dari gugus bola dalam Galaksi yang teramati dengan model Plummer.

METODE

Sebuah model awal gugus bola dideskripsikan dengan menggunakan model Plummer. Tahap pertama ditentukan pasangan potensial-densitas Plummer (Plummer, 1911). Nilai yang ingin didapatkan adalah potensial, densitas gugus bola, dan densitas permukaan di suatu titik berjarak r . Tahap kedua dilakukan pengaturan satuan yang bertujuan untuk menyederhanakan konstanta. Tahap ketiga dilakukan *sampling* posisi dan kecepatan bintang-bintang untuk mendapatkan posisi awal dan kecepatan awal bintang-bintang dalam model ini.

Model Plummer

Potensial gravitasi di suatu titik yang berjarak r dari suatu titik pusat menurut model Plummer dinyatakan melalui Persamaan (1).

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + a^2}} \quad (1)$$

dengan a adalah skala radius, G adalah tetapan gravitasi universal Newton, dan M adalah massa total sistem. Dengan menggunakan persamaan Poisson, diperoleh densitas sebagai fungsi dari r pada Persamaan 2.

$$\rho(r) = \frac{3M}{4\pi} \frac{a^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \quad (2)$$

Densitas permukaan model Plummer Σ dapat dihitung melalui integral densitas atas jarak sepanjang garis pandang z yang diestimasi menggunakan Persamaan 3.

$$\Sigma(r') = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(r'^2 + z^2) dz = \frac{M}{\pi a^2} \left[1 + \left(\frac{r'}{a} \right)^2 \right]^{-2}. \quad (3)$$

Konvensi Satuan

Satuan yang digunakan dalam model ini adalah satuan yang diatur sedemikian rupa sehingga nilai $G = M = a = 1$. Contoh konversi satuan kecepatan yang diperoleh dalam satuan ini ke dalam satuan SI dideskripsikan sebagai berikut. Misalkan nilai $M = x$ kg dan nilai $a = y$ meter, maka kecepatan sebuah benda sebesar z dalam satuan ini setara dengan $x^{1/2}y^{-1/2}z\sqrt{G}$ m/s untuk $G = 6,67 \times 10^{-11}$ kg⁻¹m³s⁻². Menggunakan satuan ini, pasangan potensial dan densitas dituliskan pada Persamaan 4 dan Persamaan 5.

$$\Phi(r) = -(1 + r^2)^{-1/2} \quad (4)$$

$$\rho(r) = \frac{3}{4\pi} (1 + r^2)^{-5/2} \quad (5)$$

Densitas permukaan dalam satuan ini dinyatakan oleh Persamaan 6.

$$\Sigma = \frac{1}{\pi} (1 + r^2)^{-2}. \quad (6)$$

Sampling Posisi

Sebelum dilakukan sampling posisi, massa kumulatif bintang yang berada dalam radius r dinyatakan secara analitik melalui Persamaan 7.

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' = r^3 (1 + r^2)^{-3/2} \quad (7)$$

Persamaan 7 mengindikasikan $m(\infty) = 1$ karena massa total sistem dalam satuan yang telah ditetapkan sama dengan 1. Jika diberikan massa m dengan $0 < m < 1$, maka dapat ditentukan radius bola yang di dalamnya terdapat bintang-bintang dengan massa kumulatif m , yang diestimasi menggunakan Persamaan 8.

$$r(m) = (m^{-2/3} - 1)^{-1/2} \quad (8)$$

Persamaan (8) digunakan untuk menentukan radius bintang yang nilai m dibangkitkan secara acak dalam rentang $0 < m < 1$. Selanjutnya, arah vektor radius bintang dihitung dengan membangkitkan 2 bilangan acak yaitu $\cos \theta$ (lintang) dan φ (azimut) melalui distribusi seragam dan dengan rentang nilai $(-1,1)$ untuk $\cos \theta$ dan $(0,2\pi)$ untuk φ . Vektor radius sebuah bintang dinyatakan dalam koordinat kartesian melalui Persamaan 9.

$$\mathbf{r} = r (\sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}) \quad (9)$$

Sampling kecepatan

Sampling kecepatan dimulai dengan menentukan probabilitas menemukan bintang dengan radius r dan $r + dr$ dan kelajuan v dan $v + dv$ dalam model Plummer. Rapat probabilitas tersebut dinyatakan dalam bentuk Persamaan 10 (Heggie & Hut, 2003).

$$f(E) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v} \propto (-E)^{7/2} r^2 v^2 dr dv \quad (10)$$

dengan $E = \frac{1}{2}v^2 + \Phi(r)$ yang merupakan energi spesifik. Dengan demikian, peluang menemukan bintang dengan kelajuan v dan $v + dv$ pada posisi r sehingga membentuk Persamaan 11.

$$g(v) dv \propto (-E)^{7/2} v^2 dv \quad (11)$$

Karena bintang yang akan disampling memiliki energi negatif yang mengindikasikan bintang dalam keadaan terikat, maka nilai kelajuan maksimum yang dimiliki oleh bintang sama dengan nilai kelajuan lepas yang dinyatakan dengan Persamaan 12.

$$v_e = \sqrt{-2\Phi(r)} = \sqrt{2} (1 + r^2)^{-1/4} \quad (12)$$

Energi spesifik dapat dinyatakan dalam v dan v_e pada Persamaan 13.

$$E = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_e^2 \tag{13}$$

Jika dinotasikan $q = v/v_e$, maka Persamaan 13 dapat dituliskan menjadi Persamaan 14.

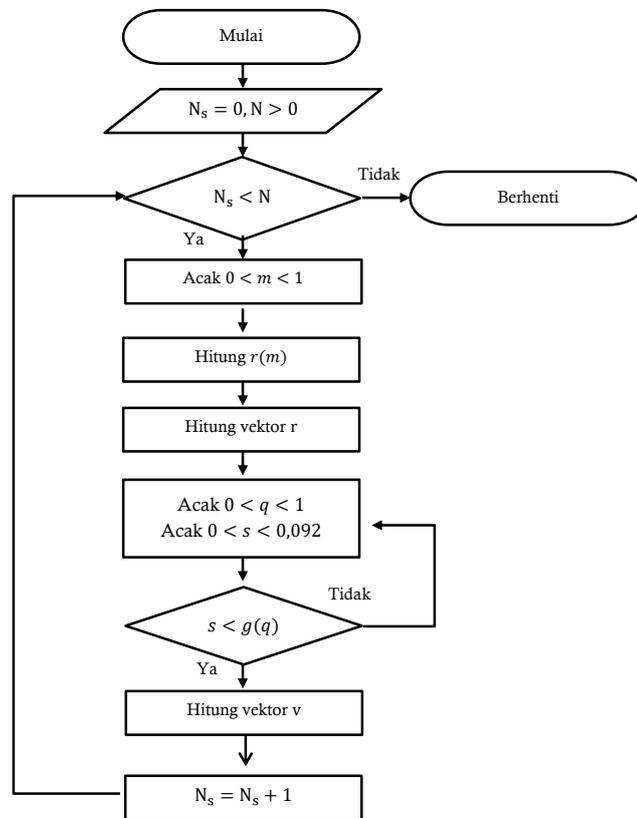
$$E = \frac{1}{2}v_e^2(q^2 - 1) \tag{14}$$

dan fungsi distribusi kecepatan diestimasi menggunakan Persamaan 15.

$$g(q) \propto (1 - q^2)^{\frac{7}{2}}q^2. \tag{15}$$

Nilai maksimum $g(q) = 0,092$ untuk $0 < q < 1$.

Sampling kelajuan setiap bintang dilakukan dengan membangkitkan bilangan acak distribusi seragam untuk q antara 0 dan 1 dan s antara 0 dan 0,092. Jika $s \leq g(q)$ (kondisi diterima), maka nilai q diambil dan $v = qv_e$ ditetapkan sebagai kelajuan bintang. Sebaliknya, jika $s > g(q)$, maka proses pengacakan q dan s diulang kembali sampai diperoleh kondisi diterima. Selanjutnya, vektor kecepatan disampling dengan cara yang serupa dengan sampling vektor radius. Prosedur yang sama dalam menentukan posisi dan kecepatan dilakukan sebanyak jumlah bintang yang diinginkan, misalnya N bintang. Karena massa setiap bintang sama, maka massa individual bintang sebesar $1/N$. Diagram alir proses ini dapat dilihat pada Gambar 1.

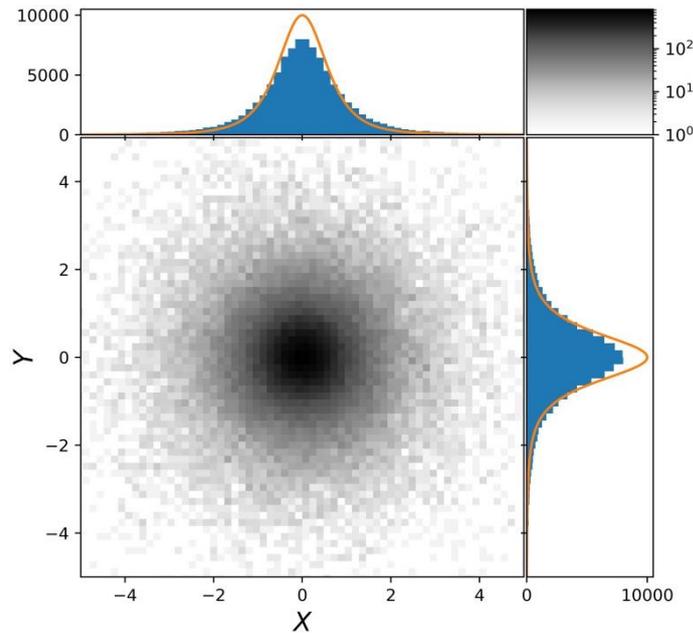


Gambar 1. Diagram alir sampling posisi (r) dan kecepatan (v) dari N bintang dalam gugus bola. N_s adalah jumlah bintang yang telah disampling

HASIL DAN PEMBAHASAN

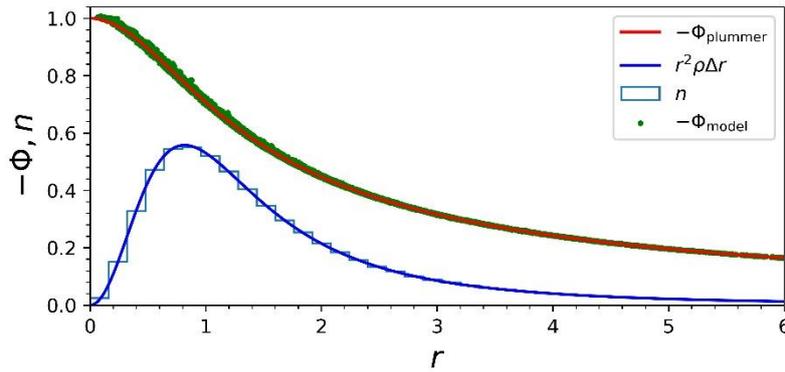
Proses sampling dengan algoritma seperti Gambar 1 dilakukan dengan menjalankan sebuah modul Python di terminal Python versi 3.5.6 dan komputer desktop dengan spesifikasi core i3-3217U CPU @1.80 GHz dan RAM 4 GB. Waktu untuk membuat model sebanyak 10^4 bintang lebih kecil dari 1 detik. Tetapi, karena dalam penelitian ini dihitung potensial gravitasi setiap bintang yang memiliki kompleksitas $\mathcal{O}(N^2)$ untuk N jumlah total sampel, maka waktu *running* program sekitar 3 detik untuk $N = 10^4$.

Distribusi spasial 10^4 bintang dari hasil sampling dalam model Plummer ditunjukkan oleh Gambar 2. Densitas permukaan bintang mengikuti profil dalam Persamaan 6 sebagaimana yang diindikasikan oleh kurva berwarna jingga pada panel kiri atas dan kanan bawah kecuali di dekat inti gugus bola yang sedikit berbeda. Densitas permukaan bintang pada histogram 1 dimensi pada panel kiri atas dan kanan bawah memiliki profil yang sama. Hal ini menunjukkan sampling yang dibuat kemungkinan besar bersimetri bola. Histogram 2 dimensi dalam Gambar 2 dapat digunakan untuk pencocokan densitas permukaan model dengan hasil observasi. Dalam model, terdapat inti yang densitas permukaannya tidak konstan dan tidak terdapat radius *cut-off* yang jelas. Hasil ini berbeda dengan hasil observasi.



Gambar 2. Histogram 2 dimensi bintang yang diproyeksikan dalam bidang **XY** (panel kiri bawah) dan map warnanya (panel kanan atas), histogram 1 dimensi bintang dalam arah **X** (panel kiri atas) dan arah **Y** (panel kanan bawah).

Jumlah bintang dalam kulit bola berjari-jari r dengan tebal Δr dengan metode sampling ini dan model teoretik Plummer cocok seperti yang diindikasikan oleh histogram jarak bintang dan kurva fraksi jumlah bintang seperti pada Gambar 3. Hal ini menunjukkan bahwa densitas bintang yang dihasilkan sesuai dengan model Plummer. Hal yang serupa berlaku untuk potensial. Potensial gravitasi setiap bintang sebagai jumlah potensial gravitasi seluruh bintang lainnya mengikuti potensial Plummer.



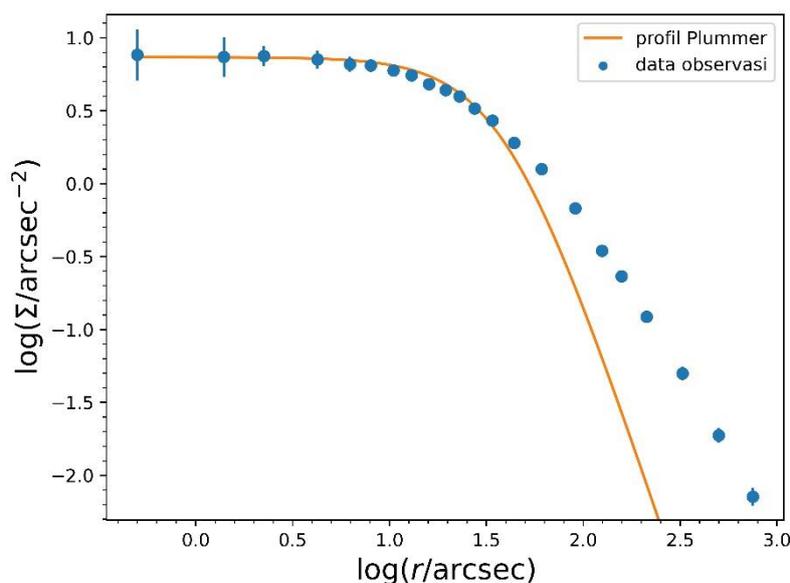
Gambar 3. Profil negatif potensial ($-\Phi$) Plummer yang dihitung melalui Persamaan 4 dan model yang dihitung melalui $\sum_j Gm_j/r_{ij}$ dengan r_{ij} adalah jarak antara bintang ke- i dan bintang ke- j , histogram ternormalisasi jarak radial bintang (lebar bin = 0,16), dan fraksi jumlah bintang (n) di setiap r

Distribusi kecepatan bersifat isotropik. Sebuah distribusi kecepatan dikatakan isotropik jika dispersi kecepatan dalam arah radial (σ_r^2), lintang (σ_θ^2), dan azimuth (σ_ϕ^2) bernilai sama. Parameter anisotropik (β) sebuah distribusi kecepatan dihitung melalui Persamaan 16 (Binney & Tremaine, 2008)

$$\beta = 1 - \frac{\sigma_\theta^2 + \sigma_\phi^2}{2\sigma_r^2}. \quad (16)$$

Nilai numerik β dalam model ini sebesar -2×10^{-3} yang menunjukkan bahwa distribusi kecepatan mendekati isotropik (isotropik jika $\beta = 0$). Hasil perhitungan energi kinetik sistem ini (K) adalah 0,148 dan energi potensialnya (U) -0,297 dengan rasio $K : U = -0,498 \approx -0,5$. Hal ini menunjukkan bahwa model yang dibangun dalam keadaan ekuilibrium karena berdasarkan teorema virial, sebuah sistem dengan N buah partikel yang saling berinteraksi melalui gaya gravitasi memiliki kondisi ekuilibrium jika $U = -2K$. Selain itu, energi potensial sistem hampir sama dengan energi potensial teoretik Plummer $W = \frac{3\pi}{32} \approx -0,295$.

Data observasi densitas permukaan gugus bola NGC 104 (47Tuc) dibandingkan dengan model Plummer untuk mengetahui kesesuaian antara data dan model. Sebagaimana terlihat pada Gambar 4, model Plummer hanya cocok untuk daerah sekitar inti gugus bola (sekitar 0 sampai 25 detik busur pada kasus NGC 104). Hal ini disebabkan oleh interaksi gaya pasang surut gugus bola dengan Galaksi paling kuat di bagian luar gugus bola tersebut (Bradford dkk., 2011). Radius inti (radius ketika densitas permukaan menjadi setengah dari densitas permukaan pusat) dalam model ini sekitar 25 detik busur yang tidak jauh dari nilai observasi sebesar 26 detik busur (Howell dkk., 2000) atau sekitar 28 detik busur (Miocchi dkk., 2013).



Gambar 4. Profil densitas permukaan gugus bola NGC 104 yang diperoleh dari observasi (Miochi dkk., 2013) dan model Plummer, yaitu persamaan (3) dengan $a = 40$ dan $M = 3700$.

Walaupun model Plummer tidak cocok untuk daerah luar gugus bola, tetapi model Plummer sering digunakan sebagai kondisi awal gugus bola (Wilkinson dkk., 2003). Sebagai contoh, penelitian (Sohn dkk., 2007) menggunakan model Plummer sebagai kondisi awal (11×10^9 tahun yang lalu) satelit dSph (*dwarf Spheroidal*) Leo I. Dalam penelitian tersebut, satelit disimulasikan sehingga waktu simulasi mencapai saat ini. Simulasi tersebut menghasilkan satelit yang memiliki profil densitas permukaan yang cocok dengan model King. Selain itu, model Plummer digunakan sebagai kondisi awal pembentukan gugus bola melalui penggabungan (Karam & Sills, 2022) dan pembentukan ekor pasang (*tidal tails*) dSph Sagittarius (Law dkk., 2005). Model Plummer gugus bola yang dideskripsikan masih dapat digunakan sebagai kondisi awal.

SIMPULAN

Distribusi posisi dan kecepatan bintang-bintang model Plummer yang dibuat melalui teknik sampling *rejection* dan bahasa pemrograman Python sesuai dengan parameter teoretisnya. Selain itu, kondisi ekuilibrium berdasarkan teorema virial dapat dipenuhi oleh model ini. Walaupun model ini hanya cocok untuk daerah inti gugus bola yang teramati saat ini, tetapi model ini dapat digunakan sebagai kondisi awal gugus bola bintang.

REFERENSI

- Bailey, S. I. (1916). Globular Clusters. *Annals of Harvard College Observatory*, 76(4), 43–82.
- Binney, J., & Tremaine, S. (2008). *Galactic Dynamics: Second Edition*. Princeton University Press.
- Bradford, J. D., Geha, M., Muñoz, R. R., Santana, F. A., Simon, J. D., Côté, P., Stetson, P. B., Kirby, E., & Djorgovski, S. G. (2011). Structure and Dynamics of the Globular Cluster Palomar. *The Astrophysical Journal*, 743(2), 167.
- Heggie, D., & Hut, P. (2003). The Gravitational Million-Body Problem: A Multidisciplinary Approach to Star Cluster Dynamics. In *The Gravitational Million-Body Problem: A Multidisciplinary Approach to Star Cluster Dynamics*, by Douglas Heggie and Piet Hut. ~ Cambridge University Press, 2003, 372, Cambridge University Press.

- Howell, J., Guhathakurta, P., & Gilliland, R. (2000). Resolving the Controversy over the Core Radius of 47 Tucanae ($\{NGC\} 104$). *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, *112*(775), 1200–1211.
- Hurley, J. R., Pols, O. R., Aarseth, S. J., & Tout, C. A. (2005). A complete N-body model of the old open cluster M67. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *363*(1), 293–314.
- Hut, P., & Makino, J. (2007). *The Art of Computational Science: The Kali Code vol.11*. <http://www.artcompsci.org/kali/vol/plummer/title.html>.
- Karam, J., & Sills, A. (2022). Modelling star cluster formation: mergers. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *513*(4), 6095–6104.
- King, I. (1962). The structure of star clusters. I. an empirical density law. *Astronomical Journal*, *67*, 471.
- Law, D. R., Johnston, K. V., & Majewski, S. R. (2005). A Two Micron All-Sky Survey View of the Sagittarius Dwarf Galaxy. IV. Modeling the Sagittarius Tidal Tails. *The Astrophysical Journal*, *619*(2), 807–823.
- Miocchi, P., Lanzoni, B., Ferraro, F., Dalessandro, E., Vesperini, E., Pasquato, M., Beccari, G., Pallanca, C., & Sanna, N. (2013). Star Count Density Profiles and Structural Parameters of 26 Galactic Globular Clusters. *The Astrophysical Journal*, *774*(2), 151.
- Pallanca, C., Lanzoni, B., Ferraro, F. R., Casagrande, L., Saracino, S., Purohith Bhaskar Bhat, B., Leanza, S., Dalessandro, E., & Vesperini, E. (2021). A New Identity Card for the Bulge Globular Cluster NGC 6440 from Resolved Star Counts. *The Astrophysical Journal*, *913*(2), 137.
- Plummer, H. C. (1911). On the problem of distribution in globular star clusters. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *71*, 460–470.
- Portegies Zwart, S., McMillan, S., van Elteren, E., Pelupessy, I., & de Vries, N. (2013). Multi-physics simulations using a hierarchical interchangeable software interface. *Computer Physics Communications*, *184*(3), 456–468.
- Rejkuba, M. (2012). Globular cluster luminosity function as distance indicator. *Astrophysics and Space Science*, *341*(1), 195–206.
- Sohn, S. T., Majewski, S. R., Muñoz, R. R., Kunkel, W. E., Johnston, K. V., Ostheimer, J. C., Guhathakurta, P., Patterson, R. J., Siegel, M. H., & Cooper, M. C. (2007). Exploring Halo Substructure with Giant Stars. X. Extended Dark Matter or Tidal Disruption?: The Case for the Leo I Dwarf Spheroidal Galaxy. *Astrophysical Journal*, *663*(2), 960–989.
- Valcin, D., Jimenez, R., Verde, L., Bernal, J. L., & Wandelt, B. D. (2021). The age of the Universe with globular clusters: reducing systematic uncertainties. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, *12*(8), 17.
- Watson, A. M., Mould, J. R., Gallagher, J. S., Ballester, G. E., Burrows, C. J., Casertano, S., Clarke, J. T., Crisp, D., Griffiths, R. E., Hester, J. J., Hoessel, J. G., Holtzman, J. A., Scowen, P. A., Stapelfeldt, K. R., Trauger, J. T., Westphal, J. A., Watson, A. M., Mould, J. R., Gallagher, J. S., ... Westphal, J. A. (1994). Far-Ultraviolet Imaging of the Globular Cluster NGC 6681 with WFPC2. *The Astrophysical Journal Letters*, *435*, L55.
- Wilkinson, M., Hurley, J., Mackey, A., Gilmore, G., & Tout, C. (2003). Core radius evolution of star clusters. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *343*(3), 1025–1037.