Meminimalisir Hambatan Belajar Mahasiswa dalam Menyelesaikan Soal Pembuktian Suatu Tautologi Pada Mata Kuliah Analisis Real I dengan Memberdayakan Penalaran yang Berasaskan Prinsip *Reductio Ad Absurdum*

Wuryanto
Dosen Jurusan Matematika
FMIPA Unnes

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menekan seminimal mungkin hambatan belajar yang dialami oleh sebagian besar mahasiswa terutama dalam menyelesaikan soal -soal pembuktian suatu *tautologi.* Salah satu upaya untuk mencapai tujuan tersebut adalah dengan meningkatkan frekuensi pengerjaan soal pembuktian suatu tautologi dengan berasaskan penalaran *reductio ad absurdum* yang senantiasa bertolak dari sebuah *pengandaian* bahwa yang benar adalah ingkaran dari tautologi , namun pada akhirnya pengandaian itu harus dicabut, karena , dengan berangkat dari sebuah asumsi yang mengingkari kebenaran suatu tautologi, ternyata memunculkan sebuah *kontradiksi* . Pada dasarnya penalaran yang berasaskan reductio ad absurdum adalah sebuah alternatif untuk mencapai akhir bukti kebenaran suatu tautologi yang tertuang baik dalam bentuk *implikasi* maupun *bi-implikasi* melalui bukti tak langsung. Ketika seseorang tak dapat secara langsung memberdayakan hipotesis yang dipunyai untuk mencapai akhir bukti bahwa pernyataan " jika x bersifat P maka x bersifat Q" merupakan *suatu tautologi* , ia masih punya kesempatan untuk membuktikan kebenaran dari pernyataan " jika x bersifat P maka x bersifat Q" apabila ia berhasil menunjukkan bahwa pernyataan "ada x yang bersifat P tetapi x tidak bersifat Q" merupakan suatu *kontradiksi.*

Dari hasil penelitian ini memberi petunjuk bahwa pembelajaran Analisis Real 1 yang disertai tindakan berupa pemberdayaan penalaran berasaskan prinsip reductio ad absurdum, berhasil menekan hambatan belajar mahasiswa dalam mengerjakan dengan benar soal-soal pembuktian suatu tautologi, yang ditengarai adanya peningkatan ketajaman berfikir mahasiswa dalam menyusun premis-premis dengan logika yang benar untuk mencapai akhir suatu bukti yang absah, meskipun baru sebatas kenaikan jumlah mahasiswa berkemampuan akademik *cukup* dari yang semula memperoleh nilai D pada Angkatan 97 meningkat mencapai nilai C pada Angkatan 98, dan penurunan jumlah mahasiswa berkemampuan akademik *sedang* dari yang semula memperoleh nilai E pada Angkatan 97 meningkat mencapai nilai D dan bahkan ada yang mencapai nilai C pada Angkatan 98.

Kata Kunci : Tautologi, reductio ad absurdum, kontradiksi, implikasi, bi-implikasi

A. Latar Belakang Masalah Dan Hipotesis Tindakan

Bertolak dari hakekat matematika sebagai ilmu yang bersifat deduktif aksiomatis yang bercirikan, setiap pembuktian suatu tautologi yang diungkapkan dalam bentuk teorema senantiasa melalui sebuah proses bernafaskan logika yang bertumpu pada penalaran yang berasaskan pada salah satu prinsip atau kombinasi dari prinsip modus ponen, prinsip modus tolens dan prinsip silogisme. Nampak jelas bahwa penguasaan logika matematika, menjadi bagian yang sangat vital pada setiap perkembangan matematika murni khususnya dan perkembangan matematika pada umumnya. Dalam matematika murni setaraf Analisis Real , hampir semua persoalan terkait dengan masalah pembuktian dan hampir tidak ada permasalahan yang solusinya hanya melibatkan ketrampilan menghitung. Keberhasilan seseorang menguasai Analisis Real yang notabene adalah matematika murni disamping Aljabar abstrak, sangat bergantung pada ketajaman menganalisis dengan menggunakan alur logika yang absah.

Dari pengamatan kami dalam beberapa kali mengampu mata kuliah analisis Real, kami menangkap kesan, bahwa para mahasiswa baru sebatas hafal tabel nilai kebenaran dari kalimat matematika baik yang berbentuk disjungsi, konjungsi, implikasi maupun bi-implikasi lengkap dengan tabel negasi dari kalimat-kalimat tersebut. Dengan melengkapi tabel nilai kebenaran negasi dari implikasi "p→ q" dan tabel nilai kebenaran " $p \wedge \overline{q}$ " , pada umumnya mahasiswa dapat mengatakan bahwa, ingkaran dari " jika p maka q" adalah " p dan non q" . Dan sebagian besar para mahasiswa, yang sudah dapat menunjukkan ekuivalensi dari "$\overline{p \to q}$" dan "$p \wedge \overline{q}$" ternyata belum mampu menyimpulkan bahwa *ingkaran dari pernyataan " Setiap x yang bersifat P senantiasa x bersifat Q"* adalah , "Ada x yang bersifat P tetapi x tidak bersifat Q"

Dengan bekal telah menempuh dan lulus mata kuliah Dasar-dasar logika matematika, seharusnya, ketika ia tak mampu memberdayakan hipotesis untuk membuktikan secara langsung pernyataan " jika p batas atas terkecil E maka untuk setiap ε>0 senantiasa berlaku p-ε bukan batas atas E" suatu tautologi , ternyata tidak ada mahasiswa yang mempunyai ide cemerlang dalam menyiasati pembuktian bahwa pernyataan tersebut suatu tautologi dengan menggunakan logika berfikir, bahwa **ingkaran dari suatu tautologi adalah suatu kontradiksi**. Kami sangat memahami, bahwa keinginan pengampu agar mahasiswa mempunyai kreativitas untuk menempuh bukti alternatif yang berangkat dari sebuah hipotesis pengandaian bahwa yang berlaku adalah ingkaran dari tautologi sedemikian hingga, melalui prinsip inferensi logika dalam penarikan kesimpulan yang absah, diharapkan mahasiswa mampu memunculkan sebuah kontradiksi. Namun keinginan itu barangkali terlalu berlebihan, mengingat latar belakang penguasaan logika mereka masih sangat rendah.

Dalam illustrasi di atas, ketakberdayaan mahasiswa dalam menyelesaikan soal pembuktian suatu tauutologi terhambat oleh antara lain kelemahan mereka menyusun negasi dari suatu kalimat berkuantor. Menurut pengalaman, tak satupun diantara para mahasiswa yang tanpa bimbingan pengampu dapat memunculkan suatu kontradiksi dari hipotesis (pengandaian) yang menyatakan " ada bilangan Real p batas atas terkecil E dengan sifat untuk *suatu* bilangan ε>0, berlaku p-ε batas atas E". Hambatan selanjutnya, ketika mereka dengan bimbingan pengampu telah berhasil menyusun ingkaran dari tautologi, mereka tanpa bimbingan pengampu tak mampu memberdayakan fakta "p-ε batas atas E untuk suatu ε>0" di satu pihak, dan fakta (hipotesis pengandaian) yang menyatakan " p suatu batas atas terkecil E" di pihak lain, menjadi suatu kontradiksi . Pada umumnya para mahasiswa tak mampu memunculkan kontradiksi, bahwa di satu pihak ditemukan fakta yang mengatakan " p-ε> p" dan dari lain pihak berdasarkan sifat urutan dari sistem bilangan Real yang seharusnya berlaku " p-ε< p" .

Ada kalanya suatu soal pembuktian suatu tautologi dapat dengan mudah dikerjakan melalui pembuktian secara langsung dengan memberdayakan hipotesis yang dipunyai diturunkan berdasarkan pada prinsip inferensi penarikan kesimpulan yang absah untuk sampai pada akhir pengerjaan suatu bukti, namun tak jarang untuk membuktikan pernyataan "p" suatu tautologi dengan pembuktian langsung tak mudah dilakukan dan bahkan ada beberapa soal pembuktian yang hanya dapat dibuktikan melalui suatu bukti tak langsung yang bertolak dari sebuah hipotesis pengandaian bahwa "*ingkaran p bernilai benar"* , yang ternyata melahirkan sebuah kontradiksi, yang berarti "*ingkaran p bernilai salah"*, ini ekuivalen dengan *"p bernilai benar"* atau dengan kata lain, pernyataan "p" suatu taotologi. Sebagai illustrasi, ketika seorang mahasiswa tak mampu memberdayakan hipotesis " $x+y=x+z$" untuk mencapai akhir bukti dari suatu tautologi yang menyatakan " Jika $x+y=x+z$ maka $y=z$" maka seorang pengampu harus segera memberikan tindakan agar mahasiswa tersebut mampu menunjukkan pernyataan "ada $x,y,z\in R$ dengan sifat $x+y=x+z$ tetapi $y\neq z$" merupakan suatu kontradiksi.

Dalam rangka meningkatkan kualitas produk mahasiswa dibidang matematika murni khususnya analisis Real, dengan mempertimbangkan kenyataan bahwa sebagian besar mahasiswa kurang mampu memberdayakan dasar-dasar logika matematika maka diperlukan kreatifitas pengampu analisis Real untuk dapat menciptakan suatu media pembelajaran analisiss Real yang dapat menjembatani kemampuan prasyarat yang dipunyai mahasiswa dapat berkembang sedemikian hingga para mahasiswa mampu mengaplikasikan kemampuan prasyarat tersebut dalam dalam menyelesaikan soal-soal yang berkaitan dengan pembuktian . Kemampuan prasyarat yang paling mendukung dalam menyelesaikan soal-soal yang berkaitan dengan pembuktian adalah dasar-dasar logika matematika, tetapi, dasar-dasar logika saja tanpa kemampuan memahami konsep dasar kalkulus yang baik tentu tidak akan dapat mencapai hasil yang baik untuk bidang studi analisis.

Dibalik rasa optimistis bahwa setiap upaya untuk dapat keluar dari kesulitan pasti akan membawa kearah perubahan yang lebih baik betapapun kecilnya , namun tetap saja ada kerisauan yang sangat dalam, oleh karena berdasarkan pengalaman beberapa kali mengampu mata kuliah analisis Real selalu muncul masalah yang serupa, yakni:

1. Bidang studi dasar-dasar logika matematika terkesan hanya sebatas dapat melengkapi tabel kebenaran, belum menjiwai , dan karena belum menjiwai maka betapapun kayanya perbendaharaan teorema prasyarat tetap saja pengetahuan itu tak dapat muncul tepat pada waktunya ketika pengguna jasa itu memerlukannya. Bahkan yang sangat fatal, hampir setiap tautologi yang tidak mungkin dibuktikan secara langsung , apakah itu prinsip modus ponen, kontrapositif atau silogisme, tak seorangpun mempunyai ide cemerlang (atas dasar pengalaman) bahwa *ingkaran dari tautologi* tentu suatu *kontradiksi,* yang jika ini berhasil ia perlihatkan maka sebenarnya ia(mahasiswa) telah membuktikan apa yang seharusnya ia buktikan .
2. Bidang studi kalkulus sebagai prasyarat masih belum optimal pemberdayaannya dalam mendukung penyelesaian soal pembuktian.
3. Ketidakmampuan sebagian besar mahasiswa dalam menyelesaikan soal yang berkaitan dengan *pembuktian suatu tautologi*, baik itu yang berupa teorema dasar maupun teorema akibat.

Masalah dalam penelitian ini dirumuskan dengan mengacu pada identifikasi masalah di atas. Bertolak dari latar belakang yang telah diuraikan di atas dan dengan mempertimbangkan identifikasi masalah tersebut di atas. Masalah 1) merupakan akar permasalahan sesungguhnya yang paling mendesak untuk segera dijawab dan ditindaklanjuti. Masalah 2)dapat diberikan solusi(telah diteliti tahun 1990) meskipun baru terbatas pada satuan bahasan limit fungsi dan kekontinuan suatu fungsi bernilai Real, tentunya ini perlu ditindaklanjuti namun belum terlalu mendesak. Adapun masalah 3) hanyalah dampak dari akar permasalahan 1), dengan demikian sesungguhnya jika masalah 1) ada suatu solusi maka ini sekaligus akan mengatasi masalah 3).

Dengan demikian rumusan masalah dalam tulisan ini adalah :

”Bagaimanakah memberdayakan hukum-hukum yang berlaku dalam logika matematika, untuk meminimalkan hambatan belajar mahasiswa pada mata kuliah analisis Real 1?”

Atas dasar uraian di atas dan fakta yang ditemukan dalam beberapa kali mengampu mata kuliah analisis Real 1, kami(peneliti), merumuskan hipotesis tindakan sebagai berikut.

”Jika mahasiswa banyak diberikan latihan mengerjakan soal pembuktian yang berasaskan prinsip reductio ad absurdum maka hambatan belajar analisis Real 1 dapat diminimalisir”.

B. Pemberdayaan Reductio Ad Absurdum Sebagai Tindakan Alternatif

Hambatanmenyelesaikan soal yang berkaitan dengan pembuktian sifat, teorema (dalil atau lemma) memang bukan hanya masalah yang muncul pada pembelajaran analisis Real, tetapi muncul pada setiap pembelajaran mata kuliah bidang studi matematika murni seperti pada struktur aljabar, geometri dan statistik matematik, meski bukan berarti bidang studi matematika terapan tak bermasalah. Tetapi memang hanya pada bidang studi analisis Real dan struktur aljabar yang baik latar belakang konsep dan pengembangannya bertumpu pada definisi dan teorema yang terkait erat dengan persoalan pembuktian dan sedikit sekali dan bahkan hampir tidak ada persoalan yang terkait dengan hanya ketrampilan menggunakan teorema untuk sekedar menghitung. Sebagaimana kita ketahui bahwa hakekat matematika adalah deduktif aksiomatis, jadi pengembangan konsepnya tentu bertumpu pada dasar-dasar logika matematika. Hampir soal yang berkaitan dengan pembuktian pada dasarnya untuk sampai pada akhir bukti, bertumpu pada salah satu atau gabungan tiga prinsip inferensi penarikan kesimpulan yang absah, yakni, prinsip modus ponen, kontrapositif dan silogisme, sebagaimana diperlihatkan pada contoh menyelesaikan soal analisis Real 1 berikut.

Contoh 1:
Jika y bilangan Real maka tentu ada bilangan asli n sehingga $n>y$. Buktikan!

Bukti:
Menurut teorema Archimedes,
”Jika $x,y\in R$, $x>0$ maka ada $n\in N$ sehingga $nx >y$(1.1)
dan dari lain pihak, dipunyai $1, y\in R$, $1>0$ (1.2)
Berdasarkan prinsip modus ponen, ada $n\in N$ sehingga $n_1>y$. Jadi, $n>y$

Contoh 2:
Buktikan bahwa, ”jika x bilangan bulat, x^2 genap maka x genap”

Bukti:
Untuk membuktikan tautologi implikasi tersebut, cukup dengan membuktikan kontrapositif dari implikasi di atas, yakni,”jika x ganjil maka x2 ganjil”.
Selanjutnya karena x ganjil maka tentu ada bilangan bulat k sehingga, $x=2k+1$, ini berakibat $x^2=4k^2+4k+1$ yang merupakan bilangan ganjil. (bukti selesai)

Contoh 3:
Jika $a,b\in R$, $a>b$, $c>0$ maka $ac>bc$. Buktikan !

Bukti:
Sebut himpunan bilang positif dengan P.
Jika $a,b\in\mathbb{R}$, $a>b$ maka $a-b>0$, berakibat $a-b\in\mathbb{R}$(3.1)
dan karena diketahui $c>0$ maka $c\in P$ (3.2)
Karena P tertutup terhadap perkalian, maka, oleh sebab, telah diperoleh fakta $a-b\in P$ dan$c\in P$, berakibat $(a-b)c\in P$ (3.3)
dari lain pihak karena sifat distributif bilangan Real maka dipunyai $(a-b)c= ac-bc$ (3.4)
Berdasarkan fakta (3.3) dan (3.4) maka, $ac-bc\in P$, yang berakibat $ac>bc$.

Dari contoh 1 dan contoh 2 cukup jelas penggunaan prinsip inferensi penarikan kesimpulan sampai akhir bukti, sedangkan contoh 3 untuk sampai pada akhir bukti lebih bertumpu pada konsep sebelumnya (dalam hal ini konsep bilangan positif) dan sifat aljabar dari bilangan Real untuk memperoleh satu fakta ke fakta berikutnya yang saling mendukung untuk sampai pada akhir bukti. Perlu diketahui bahwa tidak semua soal pembuktian dapat menggunakan bukti langsung, berangkat dari yang diketahui dan melalui proses deduktif logis sampai pada akhir bukti, seperti ketiga contoh di atas, tetapi tidak sedikit masalah pembuktian sifat atau teorema yang sukar bahkan tidak dapat dibuktikan secara langsung. Jika demikian keadaannya, apakah sifat atau teorema tersebut hanya menjadi sebuah postulat atau aksioma yang diakui kebenarannya tanpa bukti. Sejauh tautologi yang dimaksud adalah teorema, konsekwensinya harus dibuktikan kebenaranya melalui penalaran deduktif. Jika segala upaya untuk membuktikan secara langsung tidak berhasil, maka ketika itu kita berpaling pada *metode pembuktian terbalik* dengan strategi mengingkari sifat atau teorema yang akan dibuktikan, jelasnya, prosedur pembuktian diawali dari pengandaian bahwa sifat atau teorema tersebut, **salah(tidakbenar)**. Bertolak dari fakta yang diperoleh dengan cara mengingkari sifat atau teorema yang bersangkutan, melalui prosedur yang benar(deduktif logis) sedemikian hingga diperoleh satu fakta dan beberapa fakta berikutnya sampai pada suatu ketika diperoleh *suatu fakta yang kontradiksi* dengan fakta sebelumnya(biasanya kontradiksi terhadap pengandaian). Mengapa terjadi suatu kontradiksi?, jawabnya,oleh karena kita telah membuat pengandaian yang salah.Mengapa pula musti *pengandaian* yang dicurigai sebagai biang terjadinya kontradiksi? Jawabnya, oleh karena **mustahil** terjadi kontradiksi kalau saja pengandaian itu tak menyesatkan. Strategi pembuktian terbalik dengan membuat *pengandaian bahwa ingkaran dari teorema atau sifatsebagai pernyataan yang bernilai benar* adalah metode **reductio ad absurdum** yang artinya adalah **suatu kemustahilan.** Sebagai illustrasi diberikan contoh soal berikut.

Contoh 4:
"Jika S ={ $x\in R$: $x>0$ } maka inf S = 0". Buktikan!

Bukti:
Andaikan, pernyataan "jika $S:=\{x\in\mathbb{R}: x>0\}$ maka inf S = 0" bernilai salah. Artinya, kita punya $S:=\{x\in R: x>0\}$ tetapi inf S $\neq 0$. Dari lain pihak karena 0 batas bawah S maka, oleh sebab inf S $\neq 0$, artinya ada suatu batas bawah S, selain 0 yang lebih besar dari 0. Namakan batas bawah S ini dengan simbol "v". Jadi $v\in\mathbb{R}$ dengan sifat, $v \leq x$ untuk setiap $x\in S$ dan $v>0$. Berakibat kita punya fakta, $v>\frac{1}{2}v>0$. Ini suatu kontradiksi (sebab, v suatu batas bawah S, tetapi v lebih besar dari suatu unsur $\frac{1}{2}v\in S$). Jadi pengandaian harus dicabut, yang benar, inf S= 0. ∎

Setelah mempelajari deskripsi dan GBPP mata kuliah Analisis Real 1 serta fakta yang ditemukan pada proses pembelajaran analisis Real 1 berupa hambatan menyelesaikan soal pembuktian oleh hampir sebagian besar mahasiswa yang sudah berada pada posisi semester 5(lima) yang sudah menempuh matakuliah prasyarat yakni, Kalkulus I, Kalkulus II dan Dasar-dasar logika matematika. Khususnya, hambatan ini sangat dirasakan oleh mahasiswa ketika harus menyelesaikan soal pembuktian (biasanya teorema dasar) yang tidak dapat dibuktikan langsung dengan hanya mengandalkan unsur-unsur yang diketahui saja, seperti misalnya pada contoh 4 di atas, ide untuk *menunjukkan* *bahwa ingkaran dari pernyataan bernilai salah* tidak segera muncul, meskipun sudah belajar dasar-dasar logika bahwa, apabila *ingkaran suatu pernyataan bernilai salah maka pernyataan tersebut bernilai benar*. Jadi **perlu meningkatkan kemampuan mereka (mahasiswa) menyelesaikan soalpembuktian yang berasaskan prinsip *reductio ad absurdum***. Atas dasar itu semua, perlu diteliti, apakah dengan memberdayakan strategi pembuktian yang berasaskan prinsip *reductio ad absurdum*, dapat meminimalisir hambatan belajar meraka?.

C. Metodologi Penelitian

3.1 Subyek Penelitian dan Rancangan Penelitian

Subyek yang akan diteliti adalah mahasiswa semester 5(lima) jurusan Pendidikan Matematika yang mengikuti matakuliah Analisis Real 1 kelas C.

a. Pihak yang Dilibatkan
   - Tim Dosen Pengampu mata kuliah Analisis Real 1 (kelas A dan B)
   - Tim Dosen mata kuliah Dasar-dasar logika Matematika
   - Tim Dosen mata kuliah Kalkulus I

b. Rancangan Penelitian.
   Rancangan penelitian ini mengikuti model Kemmis dan Mc Tanggart (1989) yang terdiri dari empat komponen utama , yaitu, (1) rencana, (2) tindakan, (3) observasi, (4) refleksi.

3.2 Rancangan Tindakan pada Siklus 1

<u>(1) Rencana:</u>

Merencanakan Proses Pembelajaran Satuan Bahasan 1 dan 2 dengan mempersiapkan Satuan Acara Perkuliahan yang dibuat oleh tim dosen analisis Real 1. Dalam setiap kegiatan perkuliahan selama 3X50 menit, dipersiapkan 2 tipe soal, yakni, Tipe 1 dan Tipe 2

1) Tipe 1: soal yang dapat dibuktikan langsung(tanpa pengandaian)
2) Tipe 2: soal yang hanya mungkin atau dimungkinkan ,dibuktikan dengan asas reductio ad absurdum. Diberikan contoh menyelesaikan soal tipe 1 dan soal tipe 2, dilanjutkanobservasi pendahuluan sebelum melaksanakan tindakan, sebagai berikut.
3) Dipilih 6 mahasiswa, 2 berkemampuan sedang, 2 berkemampuan cukup, 2 berkemampuan baik yang dipantau dari IP Kumulatif 4 semester sebelumnya dengan mempertimbangkan nilai Kalkulus 1, Kalkulus 2 dan Dasar-dasar Logika .
4) Tiga mahasiswa yang pertama dengan tiga jenjang kemampuan yang berbeda untuk diminta mengerjakan soal tipe 1.
5) Tiga mahasiswa yang kedua dengan tiga jenjang kemampuan yang berbeda untuk diminta mengerjakan soal tipe 2.

<u>(2) Tindakan:</u>

Untuk meminimalisir hambatan dalam menyelesaikan soal pembuktian, dan dengan mempertimbangkan observasi pendahuluan dilakukan tindakan berikut:

1) memberikan contoh menyelesaikan soal tipe 1 yang untuk mencapai akhir bukti secara tuntas dan benar, harus memuat penggunaan logika matematika yang bertumpu pada *prinsip modus ponen, kontrapositif dan silogisme*
2) memberikan contoh menyelesaikan soal tipe 2 yang untuk mencapai akhir bukti secara tuntas dan benar, disamping pada awal pembuk tian harus bertolak dari asas reductio ad absurdum, harus pula memuat unsur-unsur modus ponen, kontrapositif dan silogisme.

<u>(3) Observasi</u>

Pada akhir perkuliahan Satuan Bahasan 1 dan 2 diberikan UTS (Ujian Tengah Semester)

<u>(4) Refleksi</u>

Hasil observasi pada langkah (3) merupakan landasan untuk menentukan tindakan pada siklus II.

3.3 Rancangan Tindakan pada Siklus 2

(1) Rencana

Merencanakan Proses Pembelajaran Satuan Bahasan 3 dan 4 dengan mempersiapkan Satuan Acara Perkuliahan yang dibuat oleh tim dosen analisis Real 1. Dalam setiap kegiatan perkuliahan selama 3X50 menit, dipersiapkan 2 tipe soal, yakni, tipe 1dan tipe 2 .

1) Tipe 1: soal yang dapat dibuktikan langsung(tanpa pengandaian)
2) Tipe 2: soal yang hanya mungkin atau dimungkinkan dibuktikan dengan asas reductio ad absurdum. Penekanan contoh soal, apakah lebih didominasi contoh pembuktian langsung atau pembuktian yang berasaskan murni reductio ad absurdum atau gabungan dari kedua tipe, sangat bergantung pada masukan yang diperoleh dari refleksi/evaluasi pada siklus 1. Observasi sebelum menentukan tindakan 2 dalam hal ini lebih bersifat evaluasi, yang teknik pelaksanaanya tak perlu sama persis dengan observasi pendahuluan pada siklus 1.

(2) Tindakan

Untuk meminimalisir hambatan dalam menyelesaikan soal pembuktian, dan dengan mempertimbangkan refleksi/evaluasi pada siklus 1, namun pola pemberian tindakan tetap mengacu pada pola umum seperti pada pola umum tindakkan pada siklus 1 sebagai berikut.

1) memberikan contoh menyelesaikan soal tipe 1 yang untuk mencapai akhir bukti secara tuntas dan benar, harus memuat penggunaan dasar-dasar logika yang memuat tiga prinsip sekaligus, yakni, *prnisip modus ponen, kontrapositif dan silogisme*
2) memberikan contoh menyelesaikan soal tipe 2 yang untuk mencapai akhir bukti secara tuntas dan benar, disamping pada awal pembuktian harus bertolak dari asas reductio ad absurdum, harus pula memuat unsur-unsur modus ponen, kontrapositif dan silogisme .

(3) Observasi

Pada akhir perkuliahan Satuan Bahasan 3 dan 4 diberikan ujian sisipan khusus materi Satuan Bahasan 3 dan 4.

(4) Refleksi/evaluasi

Berupa Hasil Belajar mahasiswa denganmempertimbangkan, UTS, ujian sisipan dan Ujian Akhir Semester.

3.4 Teknik Pengumpulan Data

Teknik pengumpulan data dilakukan sebagai berikut

1) Teknik dokumentar
   Untuk memperoleh data kemampuan akademis mahasiswa semester 5 peserta mata kuliah Analisis Real 1, berupa IP kumulatif 4 semester sebelumnya, dan mata kuliah prasyarat sebelumnya, dan mata kuliah prasyarat langsung, yakni,Dasar-dasar logika, Kalkulus 1 dan 2, Diperoleh langsung dari jurusan Pendidikan Matematika.
2) Teknik Observasi
   Untuk menentukan rancangan tindakan pada siklus 1. Dilakukan seperti yang yang direncanakan pada butir (1.3) dan (1.4).Sebagai bahan pertimbangan menentukan tindakan pada siklus 2, disamping hasil belajar pada akhir siklus 1. Dilakukan lebih bervariasi bergantung pada hasil siklus 1
3) Teknik tes
   Untuk memperoleh hasil siklus 1, diberikan UTS (Ujian Tengah Semester) khusus bahan Satuan Bahasan 1 dan 2, Sistem Bilangan Real dan Ruang Euclides.Untuk memperoleh hasil siklus 2, diberikan Ujian Sisipan meliputi bahan ajar Satuan Bahasan 3 dan 4, Himpunan

terbilang ,tak terbilang, dan limit superior dan limit inferiorSebagai pertimbangan akhir, disamping UTS dan Ujian Sisipan, untuk mengetahui apakah *hipotesis tindakan* dapat dipenuhi atau tidak, diberikan UAS (Ujian Akhir Semester)

D. Analisis Data Penelitian Dan Pembahasan

4.1 Refleksi dan Evaluasi HasilPenelitian pada Siklus 1

Skor UTS murni (nilai Q) mata kuliah analisis Real berskala 0 – 100, dari 32 mahasiswa angkatan 98 (semester 5C) tercatat sebagai berikut.(Selengkapnya ada pada Lampiran 4). Pada kolom nilai Q tercatat, skore tertinggi 100, skor terendah 40. Dengan menggunakan standart PAPyang ditetapkan UNNES, dipredeksikan pada akhir seluruh rangkaian KBM selama satu semester t ada 3 mahasiswa memperoleh nilai A, 1 mahasiswa memperoleh nilai B, 2 mahasiswa memperoleh nilai C, 6 mahasiswa memperoleh nilai D, 20 mahasiswa memperoleh nilai E.

Adanya fakta bahwa terdapat 20 mahasiswa yang dipredeksikan akan memperoleh nilai E, tidak dapat dijadikan ukuran bahwa tindakan kelas yang dirancang telah gagal sehingga perlu tindakan yang berbeda dengan apa yang dikenakan pada siklus 1. Sebab, kondisi semacam ini, hampir selalu kami temukan dari tahun ke tahun baik matakuliah analisis Real 1 maupun mata kuliah analisis Real 2.

Jika melihat refleksi pada siklus 1 masih ada 20 mahasiswa yang dipredeksikan akan memperoleh nilai E , terbesit rasa pesimisme bahwa tindakan kelas belum menyentuh para mahasiswa yang berkemampuan sedang. Namun dibalik rasa pesimis oleh kenyataan yang ditemukan pada kelompok sedang, masih ada secercah harapan sebagaimana ditemukan pada fakta, bahwa target adanya peningkatan jumlah mahasiswa yang dimungkinkan memperoleh nilai A dapat mencapai 5 % dari jumlah 32 peserta (paling sedikit ada 2 mahasiswa yang memperoleh nilai A), hampir pasti dapat terpenuhi, disamping belum tertutup kemungkinan, para mahasiswa yang memperoleh skore murni kurang dari 50 dapat ditekan seminimal mungkin sehingga target agar jumlah mahasiswa yang memperoleh nilai E tidak lebih 10 % dari jumlah 32 peserta (paling banyak 4 mahasiswa memperoleh nilai E), belum tertutup kemungkinan untuk dapat terpenuhi. Dengan demikian, tindakan kelas dalam bentuk peningkatan latihan pengerjaan soal yang berasaskan prinsip reductio ad absurdum masih perlu dipertahankan pada siklus 2. Fakta lain yang mendukung tetap dipertahankannya tindakan kelas yang dikenakan pada siklus 1,adalah adanya kenyataan yang ditemukan pada mahasiswa C2 yang notabene berkemampuan sedang namun mempunyai ide cemerlang ketika ia menjumpai hambatan membuktikan soal Tipe 1 (butir e, minggu ke-8), ia mencoba membuktikan dengan prinsip *reductio ad absurdum*, dan berhasil memunculkan suatu kontradiksi.

4.2 Refleksi dan Evaluasi Hasil Penelitian pada Siklus 2

Skor hasil Ujian Sisipan mata kuliah analisis Real berskala 0 – 100, dari 32 mahasiswa angkatan 98 (semester 5C) tercatat, skore tertinggi 92,3, skore terendah 40.Dengan menggunakan standart PAP yang ditetapkan UNNES, dipredeksikan pada akhir seluruh rangkaian KBM selama satu semester tercatat ada, 3 mahasiswa memperoleh nilai A, 4 mahasiswa memperoleh nilai B, 13 mahasiswa memperoleh nilai (dalam huruf) C, 7 mahasiswa memperoleh nilai D, 5 mahasiswa memperoleh nilai E. Kenyataan masih ada 5 mahasiswa berkemampuan sedang yang dipredeksikan memperoleh nilai E tidak dapat dijadikan ukuran bahwa tindakan kelas yang dikenakan pada siklus 2 telah gagal. Sebab :

1. Target peningkatan jumlah mahasiswa yang pada akhir seluruh rangkaian kegiatan selama satu semester memperoleh nilai (dalam huruf) A, dipredeksikan mencapai sekurangkurangnya 5 % dari jumlah peserta, yaitu sebanyak 2 mahasiswa (pembulatan) masih terpenuhi.
2. Peningkatan jumlah mahasiswa berkemampuan cukup, yang semula memperoleh nilai D, menjadi C meningkat tajam.

Jika melihat kenyataan masih terdapat 5 mahasiswa berkemampuan sedang yang dipredeksikan akan memperoleh nilai E, terbesit rasa optisimisme bahwa tindakan kelas sudah menyentuh menyentuh para mahasiswa yang berkemampuan sedang, yang ditengarai oleh penurunan jumlah mahasiswa yang dipredeksikan memperoleh nilai E dari 20 orang pada siklus 1,menjadi hanya 5 orang pada siklus 2.

4.3 Refleksi dan Evaluasi Final Hasil Penelitian Tindakan

Refleksi akhir dari seluruh rangkaian kegiatan penelitian ini, tercermin dari nilai akhir mata kuliah Analisis Real 1 yang dicapai mahasiswa, berdasarkan standart PAP yang disepakati dengan kriteria berikut.

1. Nilai Akhir = $\frac{P+2Q+3R}{6}$
2. P= Skor Tugas Rumah (Pengerjaan Ulang Ujian Sisipan, sehari sesudah pelaksanaan ujian sisipan) ; Q= skore UTS ; R= skore UAS.

4.4 Distribusi nilai Analisis Real 1 dari 32 mahasiswa semester 5C angkatan 98

a) Yang memperoleh nilai (dalam huruf) A, ada 2 mahasiswa.
b) Yang memperoleh nilai (dalam huruf) B, ada5 mahasiswa.
c) Yang memperoleh nilai (dalam huruf) C, ada 13 mahasiswa.
d) Yang memperoleh nilai (dalam huruf) D, ada 9 mahasiswa.
e) Yang memperoleh nilai (dalam huruf) E, ada 3 mahasiswa.

E. Kesimpulan dan Saran

5.1 Kesimpulan

Bertolak dari hasil belajar analisis Real 1 yang dicapai oleh mahasiswa jurusan pendidikan matematika semester 5 angkatan 98 (kelas C), apakah pembelajaran analisis Real 1 pada mahasiswa semester 5C tahun ajaran 2000/2001, yang disertai *tindakan* dengan meningkatkan frekuensi pengerjaan soal pembuktian suatu tautologi dengan memberdayakan penalaran yang berasaskan reductio ada absurdum dapat dikatakan berhasil, kurang berhasil atau bahkan gagal sama sekali, sangat bergantung pada apa alat ukur keberhasilan itu. Kita kembali kepada kesepakatan semula tentang *penetapan kriteria keberhasilan tindakan ini* , dengan membandingkan hasil belajar mahasiswa jurusan pendidikan matematika angkatan 97 tahun ajaran 1999/2000 untuk mata kuliah yang sama, ketika itu diikuti oleh 37 mahasiswa, dan tercatat hanya ada 1 mahasiswa memperoleh nilai A atau 2,7 % dari jumlah peserta. Berarti ada peningkatan kuantitas, karena hasil belajar analisis Real 1 yang mahasiswa angkatan 98 kali ini tercatat ada 2 mahasiswa memperoleh nilai A atau 6,25 % dari jumlah peserta yang berarti sudah mencapai target poin pertama yang disepakati. Dan, kalau pada angkatan 97, jumlah peserta yang memperoleh nilai E ada sebanyak 7 mahasiswa memperoleh nilai E atau 18,9% dari jumlah. Ini artinya upaya meminimalisir jumlah mahasiswa yang gagal menempuh analisis Real 1 dapat diwujudkan atau berhasil, karena hasil belajar analisis Real 1 mahasiswa angkatan 98 kali ini hanya tercatat 3 mahasiswa atau 9,3% dari jumlah peserta yang berarti sudah memenuhi target yang ditetapkan dalam penelitian ini, yaitu, diharapkan jumlah mahasiswa yang memperoleh nilai E dapat ditekan sampai mencapai angka 10% dari jumlah peserta (setahun lalu 18,9%).

5.2 Saran

Terutama ditujukan kepada rekan pengampu mata kuliah analisis Real 1 untuk banyak memberikan latihan pengerjaan soal pembuktian suatu taotologi yang terbuka kemungkinan dapat dibuktikan secara langsung atau pembuktian tak langsung melalui prinsip reductio ad absurdum.

Berdasarkan hasil penelitian ini, pembelajaran berasaskan prinsip reductio ad absurdum perlu ditindaklanjuti pada pembelajaran analisis Real 2 yang merupakan kelanjutan analisis Real 1 yang secara umum pembelajaran konsepnya mempunyai karakteristik yang seragam dengan bahan ajar matematika murni pada umumnya dan analisis Real 1 khususnya, yaitu dengan pola deduktif aksiomatis yang bertumpu pada prinsip logika matematika. Mengingat bahwa materi analisis Real 2 tak sekedar membahas sifat-sifat topologi di sistembilangan Real, namun sudah menjangkau ruang metrik yang sangat umum, seperti misalnya berbicara masalah ruang fungsi kontinu yang notabene lebih sulit dibayangkan secara kasat mata dibandingkan dengan ruang Euclid berdimensi hingga yang masih memungkinkan divisualisasikan melalui R^1 dan R^2 sebenarnya berbicara ruang Euclid itupun sudah cukup sulit jika dimensinya sudah lebih dari 3. Karenanya, pembelajaran analisis Real 2, pada pokok bahasan tertentu seperti ruang fungsi kontinu dan kekonvergenan uniform barisan fungsi bernilai Real pada suatu himpunan kompak , memerlukan pengampu yang memiliki kiat yang tajam untuk mampu memberi gambaran yang agak lebih konkrit dari keadaan yang sangat abstrak dalam upaya membantu meringankan beban mahasiswa memahami konsep yang abstrak sekali. Karena itu menurut kami, pemberdayaan pelalaran yang berasaskan reductio ad absurdum masih harus dikombinasikan dengan suatu strategi khusus dengan satu tujuan, meminimalisir hambatan belajar para mahasiswa kita dalam mendalami analisis Real 2.

Daftar Pustaka

Achmad Arifin, 1991. *Segi Kreativitas dan Kemandirian dalam proses belajarMatematika*. Makalah, ITB Bandung.

Bacman George, Lawrence Naraci. 1966 *Functional Analysis*. Academid PressNewyork and London.

Gupta VP,Join PK. 1986. *Lebesgue Measure and integration*. World Scientific Publishing Co. Plt.

Hungerford, Thomas 1974. *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Verlag.Newyork Heidelberg Berlin.

Kemmis and Mc, Taggart R, 1989.*TheAction. Research Planner.*Third Edition,Australia,Deakin,University Press.

Rudin Walter.1973. *Functionaal Analysis*. Mc.Graw-Hill Book Company. Singapore.

Sze tsen Hu. 1964. *Element of General Topology*. Holden-Day.Inc.

Stefan Rolewicz. 1972. *Metric Linear Space*. Pwn-Polish Scientific Publisher.

Rudin, Walter.1973. *FunctionalAnalysis. Mc. Gra-Hill Book Company.*Singapore.

Toomey, D, 1997. *Reading In Classroom Action Reseach*. ia Trobe University.Melbourne Australia. Apublication of The Indonesia PrimaryTeacher Education Project