Sifat Baik Solusi Kuadrat Terkecil Regresi Fuzzy Dengan Variabel Dependen Fuzzy Tak Simetris

Iqbal Kharisudin
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang
Email: iqbal_kh@staff.unnes.ac.id

Abstrak: Penelitian tentang hubungan di antara fenomena-fenomena real merupakan dasar dari tujuan sains dan memainkan peranan penting dalam pengambilan keputusan di dalam kehidupan sehari-hari. Analisis regresi statistik merupakan salah satu alat yang *powerful* untuk menjelaskan hubungan tersebut. Dalam makalah ini dibahas model analisis regresi fuzzy dengan variabel dependen fuzzy tak simetris dan variabel independen tegas. Model tersebut merupakan generalisasi model regresi fuzzy simetris, yaitu model regresi dengan variabel dependen fuzzy simetris. Solusi model tersebut juga merupakan generalisasi dari model regresi linear biasa. Ide dasar analisis regresi fuzzy tak simetris adalah memodelkan pusat dari variabel dependen fuzzy tipe LR dengan mengadopsi model regresi klasik, selanjutnya secara simultan memodelkan tepi kiri dan tepi kanan variabel dependen fuzzy melalui model regresi linear sederhana. Pada makalah ini secara spesifik dikaji sifat-sifat baik solusi kuadrat terkecil model regresi fuzzy dengan variabel dependen fuzzy tak simetris.

Kata kunci: data fuzzy LR, model pusat, model tepi, solusi kuadrat terkecil.

A. Pendahuluan

Penelitian tentang hubungan di antara fenomena-fenomena real merupakan dasar dari tujuan sains dan memainkan peranan penting dalam pengambilan keputusan di dalam kehidupan sehari-hari. Dalam hal ini analisis regresi statistik merupakan salah satu alat yang *powerful* untuk menjelaskan hubungan tersebut. Analisis regresi merupakan suatu alat dalam statistika yang berkaitan dengan analisis pemodelan hubungan antara variabel independen (misal Y) dengan variabel dependen (misal X_1, X_2, …, X_m) berdasarkan sekumpulan observasi dalam suatu konteks atau lingkungan permasalahan.

Penalaran statistik (*statistical reasoning*) dipengaruhi oleh beberapa jenis sumber ketidakpastian, seperti: keacakan (*randomness*), ketidak-tepatan (*imprecision*), ketidakjelasan (*vagueness*), ketidaktahuan sebagian (*partial ignorance*), dan sebagainya. Dalam konteks analisis regresi, terdapat beberapa aspek ketidak-pastian yang sering diperhatikan, yaitu ketidakpastian berkaitan dengan: (1) hubungan antara variabel dependen dengan variabel independen, (2) hubungan antara data terobservasi dengan "semesta" data yang mungkin, dan (3) ketidakpastian (ketidaktepatan, ketidakjelasan) berkaitan dengan nilai-nilai variabel terobservasi (Coppi [1]).

Dalam paradigma statistik tradisional, ketidakpastian (1) dan (2) telah banyak ditangani dengan sangat memuaskan. Untuk menjawab permasalahan ketidakpastian (3), telah banyak para peneliti yang mencoba mengusulkan berbagai metode sebagai alternatif. Seiring dengan perkem-bangan penelitian, pada dekade terakhir, telah banyak penelitian yang berupaya mengembangkan koalisi antara teori himpunan fuzzy dan teori statistik. Tujuan yang hendak dicapai di antaranya adalah untuk: (1) memperkenalkan permasalahan analisis data baru berkaitan dengan ralasional fuzzy, (2) membangun model formal yang menggabungkan *randomness* dengan *fuzziness*, (3) mengembangkan metodologi statistik *univariate* dan *multivariate* dalam menangani data bernilai fuzzy, dan (4) menyertakan konsep fuzzy dalam membantu menyelesaikan permasalahan statistik tradisional dengan data *non*-fuzzy (Coppi dkk. [4]). Dalam konteks analisis regresi, dikenal istilah regresi fuzzy.

Secara umum terdapat dua pendekatan yang berbeda dalam analisis regresi fuzzy. Pertama pendekatan berbasis konsep possibilistik yang pertama kali diperkenalkan oleh Tanaka dkk. (1982). Kedua adalah pendekatan berbasis kuadrat terkecil, yaitu perluasan metode kuadrat terkecil dalam *setting* fuzzy. Kedua pendekatan ini mempunyai perbedaan dalam metode optimasi fungsional untuk membangun model regresi "terbaik".

Salah satu pendekatan kuadrat terkecil dalam analsis regresi fuzzy adalah model regresi yang diusulkan oleh D'Urso dkk. Metode yang digunakan untuk menemukan model linear adalah meminimalkan fungsi jarak fuzzy antara variabel terobservasi dan estimasi variabel output yang didefinisikan dalam suatu ruang metrik tertentu. Tulisan yang membahas masalah ini di antaranya D'Urso dan Gastaldi [7], [8], Coppi dan D'Urso [2], D'Urso [6], D'Urso dan Giordani [9], D'Urso dan Giordani [10], Coppi dkk. [3], D'Urso dan Santoro [12], [11]. Dalam tulisan ini dikaji model regresi dengan variabel dependen fuzzy tak simetris dan variabel independen tegas dan solusi model yang berkaitan sebagai bentuk umum dari model regresi fuzzy simetris dan model regresi biasa (klasik/tegas). Selanjutnya diberikan contoh aplikasi, dengan memperhatikan beberapa konsep yang telah dibahas dalam [15-17] seperti koefisien determinasi dan indeks Mallows, dengan generalisasinya pada model regresi fuzzy tak simetris.

1. Matriks Data Fuzzy *LR*

Untuk merepresentasikan ketidakpastian dalam permasalahan kehidupan diperlukan data fuzzy. Pada dasarnya kita semua sering menggunakan data fuzzy, aturan samar, dan ketidaktepatan informasi untuk mengambil keputusan dalam situasi yang tidak menentu. Oleh karena itu model-model komputasional dari sistem real perlu juga bisa mengenali, merepresentasikan, memanipulasi, menginterpretasikan, dan menggunakan ketidakpastian (Bezdek (1993) dalam Coppi dkk. [4]). Kelas umum dari data fuzzy dinyatakan dengan (selanjutnya disebut dengan) data fuzzy *LR*. Data fuzzy *LR* dapat dinyatakan dengan matriks data fuzzy.

Definisi 1.0.1. (Coppi dkk. [5]). Matriks data fuzzy LR_2 (I unit observasi $\times$ J variabel (*fuzzy*)) didefinisikan sebagai

$$\mathbf{X} \equiv \left\{x_{ij} = \left(m_{1ij}, m_{2ij}, l_{ij}, r_{ij}\right)_{LR} : i = 1,2,\ldots,I; j = 1,2,\ldots,J\right\}$$

dengan $x_{ij} = \left(m_{1ij}, m_{2ij}, l_{ij}, r_{ij}\right)_{LR}$ menyatakan variabel fuzzy terobservasi LR_2 ke-j pada unit observasi ke-i, m_{1ij} dan $m_{2ij}\left(m_{1ij} \leq m_{2ij}\right)$ masing-masing menyatakan "pusat" kiri dan kanan, serta l_{ij} dan r_{ij} masing-masing menyatakan tepi kiri dan kanan, dengan fungsi keanggotaan dinyatakan sebagai:

$$\mu_{x_{ij}}\left(u_{ij}\right) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m_{1ij} - u_{ij}}{l_{ij}}\right), & u_{ij} < m_{1ij}\left(l_{ij} > 0\right), \\ 1, & m_{1ij} \leq u_{ij} < m_{2ij}, \\ R\left(\dfrac{u_{ij} - m_{2ij}}{r_{ij}}\right), & u_{ij} \geq m_{2ij}\left(r_{ij} > 0\right), \end{cases}$$

dengan L (dan R) adalah fungsi berbentuk turun dari $\Re^+$ ke $[0,1]$ dengan $L(0) = 1$; $L(z_{ij}) < 1$ untuk setiap $z_{ij} > 0, \forall i, j$; $L(z_{ij}) > 0$ untuk setiap $z_{ij} < 1, \forall i, j$; $L(1) = 0$ (atau $L(z_{ij}) > 0$ untuk setiap z_{ij} dan $L(+\infty) = 0$).

Bilangan fuzzy $x_{ij} = (m_{1ij}, m_{2ij}, l_{ij}, r_{ij})_{LR} : i = 1,2, \dots, I; j = 1,2, \dots, J$ berisi interval yang bergerak dari $m_{1ij} - l_{ij}$ ke $m_{2ij} + l_{ij}$ dan fungsi keanggotaan memberikan bobot-bobot yang berbeda terhadap masing-masing tepi kiri dan tepi kanan di sebelah kiri dan kanan dari pusat. Jika $m_{1ij} = m_{2ij}$, maka diperoleh bilangan fuzzy LR_1, dinotasikan dengan $x_{ij} = (m_{ij}, l_{ij}, r_{ij})_{LR}$, dengan m_{ij} menyatakan pusat, dan diperoleh matriks data fuzzy LR_1 $\mathbf{X} \equiv \{x_{ij} = (m_{ij}, l_{ij}, r_{ij})_{LR} : i = 1,2, \dots, I; j = 1,2, \dots, J\}$. Selanjutnya jika $l_{ij} = r_{ij}$, maka diperoleh bilangan fuzzy simetris LL_1, dinotasikan dengan $x_{ij} = (m_{ij}, l_{ij})_{LL}$, dan diperoleh matriks data fuzzy LL_1 simetris $\mathbf{X} \equiv \{x_{ij} = (m_{ij}, l_{ij})_{LL} : i = 1,2, \dots, I; j = 1,2, \dots, J\}$.

Catatan 1. Datum fuzzy LR_2 yang sering digunakan adalah trapesium (dengan fungsi keanggotaan trapesium). Untuk bilangan (interval) fuzzy LR_2 x_{ij}, jika L dan R berbentuk:

$$L(z) = R(z) = \begin{cases} 1 - z^\alpha, & 0 \le z \le 1, \\ 0, & \text{yang lain}, \end{cases} \tag{1.0.1}$$

dengan $\alpha = 1$, maka $\mathbf{X} \equiv \{x_{ij} : i = 1,2, \dots, I; j = 1,2, \dots, J\}$ adalah matriks data fuzzy trapesium yang anggota-anggotanya mempunyai fungsi keanggotaan

$$\mu_{x_{ij}}(u_{ij}) = \begin{cases} 1 - \dfrac{m_{1ij} - u_{ij}}{l_{ij}}, & u_{ij} < m_{1ij} (l_{ij} > 0), \\ 1, & m_{1ij} \le u_{ij} < m_{2ij}, \\ 1 - \dfrac{u_{ij} - m_{2ij}}{r_{ij}}, & u_{ij} \ge m_{2ij} (r_{ij} > 0). \end{cases}$$

Bentuk khusus data fuzzy LR_1 di antaranya seperti: segitiga, parabolik, dan akar kuadrat (apabila L dan R pada bentuk (1) masing-masing dengan $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, $\alpha = \frac{1}{2}$). Setiap bentuk tersebut memberikan level *fuzziness* yang berbeda-beda di sekitar pusat bilangan fuzzy. Secara khusus, bentuk akar kuadrat menyatakan level *fuzziness* rendah, bentuk segitiga menyatakan level *fuzziness* menengah, dan bentuk parabolik menyatakan level *fuzziness* tinggi.

Catatan 2. Matriks fuzzy LR_1 dan LR_2 dapat dinyatakan dengan:
$\mathbf{X} \equiv \{\mathbf{M}|\mathbf{L}|\mathbf{R}\}$ untuk LR_1 dan $\mathbf{X} \equiv \{\mathbf{M}_1|\mathbf{M}_2|\mathbf{L}|\mathbf{R}\}$ (untuk LR_2), dengan
$\mathbf{M} \equiv \{m_{ij} : i = 1,2, \dots, I; j = 1,2, \dots, J\}$ (matriks pusat),
$\mathbf{M}_1 \equiv \{m_{1ij} : i = 1,2, \dots, I; j = 1,2, \dots, J\}$ (matriks “pusat” kiri),
$\mathbf{M}_2 \equiv \{m_{2ij} : i = 1,2, \dots, I; j = 1,2, \dots, J\}$ (matriks “pusat” kanan),
$\mathbf{L} \equiv \{l_{ij} : i = 1,2, \dots, I; j = 1,2, \dots, J\}$ (matriks tepi kiri), dan

$\mathbf{R} \equiv \{r_{ij}: i = 1,2, \dots, I; j = 1,2, \dots, J\}$ (matriks tepi kanan).

Catatan 3. Kasus khusus pada data fuzzy LR_1 dan LR_2 untuk merepresentasikan situasi nyata dapat digunakan bentuk data fuzzy simetris (selanjutnya masing-masing disebut data fuzzy L_1 dan L_2). Pada kasus ini $L = R$ dan $l = r$. Fungsi keanggotaan simetris berakibat dapat menurunkan banyaknya parameter yang terlibat. Beberapa contoh penerapan data fuzzy tipe simetris dapat dilihat pada [17], [13], [14], [15], dan [16].

1.1. Jarak dan Ruang Metrik Fuzzy. Definisi jarak antara dua bilangan fuzzy tak simetris dan sifat ruang metrik berdasarkan definisi jarak tersebut dikemukakan oleh Yang dan Ko ([18]). Misalkan $\mathcal{S}_{LR}(\mathfrak{R})$ menyatakan himpunan semua bilangan fuzzy tak simetris.

Definisi 1.1.1. (Yang dan Ko [18]). Misalkan $\tilde{X} = (m_x, \alpha_x, \beta_x)_{LR}$ dan $\tilde{Y} = (m_y, \alpha_y, \beta_y)_{LR}$ adalah bilangan fuzzy LR di dalam $\mathcal{S}_{LR}(\mathfrak{R})$. Jarak antara dua bilangan fuzzy $\tilde{X}$ dan $\tilde{Y}$ didefinisikan dengan

$$d_{LR}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}) = (m_x - m_y)^2 + [(m_x - \lambda\alpha_x) - (m_y - \lambda\alpha_y)]^2 + [(m_x + \rho\beta_x) - (m_y + \rho\beta_y)]^2$$

$$\text{dengan } \lambda = \int_0^1 L^{-1}(\omega)\,\mathrm{d}\omega \text{ dan } \rho = \int_0^1 R^{-1}(\omega)\,\mathrm{d}\omega.$$

Nilai λ dan ρ menyatakan pengaruh bentuk dari fungsi keanggotaan terhadap jarak antara dua bilangan fuzzy. Nilai λ dan ρ memiliki peran ganda, yaitu berhubungan dengan variabilitas fungsi keanggotaan dan menurunkan penekanan pada tepi, karena pada kenyataannya bobot pusat lebih besar daripada bobot tepi. Selanjutnya pada definisi 1.1.1, jika kedua bilangan adalah bilangan fuzzy simetris ($\alpha_x = \beta_x$, $\alpha_y = \beta_y$, dan $\lambda = \rho = \int_0^1 L^{-1}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$), maka diperoleh jarak antara dua bilangan fuzzy simetris $\tilde{X}$ dan $\tilde{Y}$, yaitu:

$$d_{LL}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 3(m_x - m_y)^2 + 2\lambda^2(\alpha_x - \alpha_y)^2.$$

2. Regresi Fuzzy dengan Variabel Dependen Fuzzy Tak Simetris

Ide dasar analisis regresi fuzzy yang dikembangkan adalah memodelkan pusat (*center*) dari variabel dependen fuzzy tipe LR dengan mengadopsi model regresi klasik, selanjutnya secara simultan memodelkan tepi kiri (*left spread*) dan tepi kanan (*right spread*) variabel dependen fuzzy melalui regresi linear sederhana. Langkah pertama memodelkan pusat, batas bawah, dan batas atas dari variabel respon sebagai jumlahan nilai teoritis yang tidak diketahui dan error-nya, yaitu:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{m} - \mathbf{l} &= \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\delta}_L + \boldsymbol{\varepsilon}_L \\ \mathbf{m} + \mathbf{r} &= \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\delta}_R + \boldsymbol{\varepsilon}_R, \end{aligned} \tag{2.0.1}$$

dengan $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_L$, dan $\boldsymbol{\varepsilon}_R$ adalah vektor residual dan $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\delta}_L$, dan $\boldsymbol{\delta}_R$ adalah vektor nilai teoritis dari pusat, tepi kiri, dan tepi kanan dari variabel dependen. Nilai-nilai tersebut dinyatakan dalam bentuk parameter model regresi, yaitu:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu} &= \mathbf{X}\boldsymbol{\gamma},\\ \boldsymbol{\delta}_L &= \eta_L\boldsymbol{\mu} + \xi_L\mathbf{1},\\ \boldsymbol{\delta}_R &= \eta_R\boldsymbol{\mu} + \xi_R\mathbf{1},\end{aligned} \tag{2.0.2}$$

dengan $\mathbf{X} = \{x_{ij}\}$ adalah matriks desain yang bersesuaian dengan elemen baris $\mathbf{f}_i = [1, x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}], i = 1, \ldots, n,$ yang menyatakan "profil" regresi dari observasi ke-i. Parameter $\boldsymbol{\gamma}$ menyatakan koefisien hubungan linear antara pusat dengan fungsi atas X_j , dan $(\eta_L, \eta_R, \xi_L, \xi_R)$ menyatakan koefisien hubungan linear antara tepi (*spread*) terobservasi dengan nilai estimasi pusat. Selanjutnya $\mathbf{1}$ menyatakan vektor 1-an berukuran $(n \times 1)$.

Prosedur untuk mengestimasi parameter-parameter di atas dilakukan dengan menggunakan kriteria kuadrat terkecil (*Least Square*), yaitu meminimalkan jarak antara nilai terobservasi variabel dependen (*response variable*) $\tilde{y}_i(i = 1,2, \ldots, n)$ dengan pasangan nilai teoritisnya yaitu $\tilde{y}_i^*(i = 1,2,\ldots,n$ yang didefinisikan dengan

$$\tilde{y}_i^* \equiv \left(\mu_i, \delta_{L_i}, \delta_{R_i}\right)_{LR} \quad , i = 1,2, \ldots, n,$$

dengan $\mu_i, \delta_{L_i},$ dan δ_{R_i} seperti termuat dalam model (2.0.2).

Model regresi tersebut dibangun atas tiga model linear. Pertama interpolasi pusat dari observasi fuzzy, kedua dan ketiga adalah model untuk batas bawah (pusat - tepi) dan model untuk batas atas (pusat + tepi) yang dibangun berdasarkan model pertama. Dalam kasus variabel output adalah simetris, maka tepi kiri sama dengan tepi kanan, sehingga model kedua dan model ketiga mempunyai estimasi tepi yang sama.

2.1. Solusi Iteratif Model. Berdasarkan kriteria kuadrat terkecil, parameter dari model (2.0.2) diestimasi dengan meminimalkan kuadrat jarak antara variabel dependen terobservasi $\tilde{Y}$ dengan nilai teoritis yang berkorespondensi $\tilde{Y}^*$ yang didefinisikan melalui model (2.0.2). Untuk tujuan ini, digunakan konsep jarak Euclid untuk bilangan fuzzy LR (seperti pada definisi 1.1.1), yang merupakan generalisasi dari metrik yang disulkan oleh Yang dan Ko [18], yaitu:

$$\begin{aligned}\Delta_{LR}^2 = {} & 3(\mathbf{m} - \boldsymbol{\mu})'(\mathbf{m} - \boldsymbol{\mu}) - 2\lambda(\mathbf{m} - \boldsymbol{\mu})'(\mathbf{l} - \boldsymbol{\delta}_L) + \lambda^2(\mathbf{l} - \boldsymbol{\delta}_L)'(\mathbf{l} - \boldsymbol{\delta}_L)\\ & +2\rho(\mathbf{m} - \boldsymbol{\mu})'(\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}_R) + \rho^2(\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}_R)'(\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}_R),\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Berdasarkan basis jarak (2.1.1) dapat disusun fungsi objektif kuadrat terkecil dalam parameter $\boldsymbol{\gamma}$, η_L, η_R, ξ_L, dan ξ_R dari model (2.0.2) sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\underset{\boldsymbol{\gamma},\eta_L,\eta_R,\xi_L,\xi_R}{\text{minimize}}\ \Delta_{LR}^2(\boldsymbol{\gamma}, \eta_L, \eta_R, \xi_L, \xi_R) = {} & \underset{\boldsymbol{\gamma},\eta_L,\eta_R,\xi_L,\xi_R}{\text{minimize}} [3(\mathbf{m}'\mathbf{m} - 2\mathbf{m}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma})\\ & -2\lambda(\mathbf{m}'\mathbf{l} - \mathbf{m}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}\eta_L - \mathbf{m}'\mathbf{1}\xi_L - \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{l} + \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}\eta_L + \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{1}\xi_L)\\ & +\lambda^2(\mathbf{l}'\mathbf{l} - 2\mathbf{l}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}\eta_L - 2\mathbf{l}'\mathbf{1}\xi_L + \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}\eta_L^2 + 2\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{1}\eta_L\xi_L + n\xi_L^2)\\ & +2\rho(\mathbf{m}'\mathbf{r} - \mathbf{m}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}\eta_R - \mathbf{m}'\mathbf{1}\xi_R - \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{r} + \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}\eta_R + \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{1}\xi_R)\\ & +\rho^2(\mathbf{r}'\mathbf{r} - 2\mathbf{r}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}\eta_R - 2\mathbf{r}'\mathbf{1}\xi_R + \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}\eta_R^2 + 2\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{1}\eta_R\xi_R + n\xi_R^2)].\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Untuk menentukan solusi masalah (2.1.2), dicari turunan parsial Δ_{LR}^2 terhadap parameter $\boldsymbol{\gamma}$, η_L, η_R, ξ_L, dan ξ_R untuk nilai sama dengan nol, sehingga diperoleh sistem persamaan sebagai berikut.

$$\frac{\partial \Delta_{LR}^2}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}(3 - 2\lambda\eta_L + \lambda^2\eta_L^2 + 2\rho\eta_R + \rho^2\eta_R^2)$$
$$= \mathbf{X}'[3\mathbf{m} - \lambda(\mathbf{m}\eta_L + \mathbf{l} - \mathbf{1}\xi_L) + \lambda^2(\mathbf{l}\eta_L - \mathbf{1}\eta_L\xi_L) + \rho(\mathbf{m}\eta_R + \mathbf{r} - \mathbf{1}\xi_R) + \rho^2(\mathbf{r}\eta_R - \mathbf{1}\eta_R\xi_R)]. \quad (2.1.3)$$
$$\frac{\partial \Delta_{LR}^2}{\partial \eta_L} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{m} - \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma} - \lambda(\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{l} - \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}\eta_L - \mathbf{1}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}\xi_L) = 0. \quad (2.1.4)$$
$$\frac{\partial \Delta_{LR}^2}{\partial \eta_R} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{m} - \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma} + \rho(\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{r} - \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}\eta_R - \mathbf{1}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}\xi_R) = 0. \quad (2.1.5)$$
$$\frac{\partial \Delta_{LR}^2}{\partial \xi_L} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{1}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{1}'\mathbf{m} + \lambda(\mathbf{1}'\mathbf{l} - \mathbf{1}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}\eta_L - n\xi_L) = 0. \quad (2.1.6)$$
$$\frac{\partial \Delta_{LR}^2}{\partial \xi_R} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{1}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{1}'\mathbf{m} - \rho(\mathbf{1}'\mathbf{r} - \mathbf{1}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}\eta_R - n\xi_R) = 0. \quad (2.1.7)$$

Solusi iteratif dari sistem persamaan di atas diperoleh dengan mengasumsikan bahwa $\mathbf{X}$ non-singular, $\lambda > 0$, dan $\rho > 0$, sehingga diperoleh himpunan persamaan solusi sebagai berikut.

$$\boldsymbol{\gamma} = [3 - \lambda\eta_L(2 - \lambda\eta_L) + \rho\eta_R(2 + \rho\eta_R)]^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-\mathbf{1}}\mathbf{X}' \times [3\mathbf{m} - \lambda(\mathbf{m}\eta_L + \mathbf{l} - \mathbf{1}\xi_L) + \lambda^2(\mathbf{l}\eta_L - \mathbf{1}\eta_L\xi_L) + \rho(\mathbf{m}\eta_R + \mathbf{r} - \mathbf{1}\xi_R) + \rho^2(\mathbf{r}\eta_R - \mathbf{1}\eta_R\xi_R)]. \quad (2.1.8)$$
$$\eta_L = \lambda^{-1}(\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma})^{-1}[\lambda(\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{l} - \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{1}\xi_L) - (\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{m} - \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma})] \quad (2.1.9)$$
$$\eta_R = \rho^{-1}(\gamma'X'X\gamma)^{-1}[\rho(\gamma'X'r - \gamma'X'1\xi_R) + (\gamma'X'm - \gamma'X'X\gamma)] \quad (2.1.10)$$
$$\xi_L = (n\lambda)^{-1}[\lambda 1'(l - X\gamma\eta_L) - 1'(m - X\gamma)] \quad (2.1.11)$$
$$\xi_R = (n\rho)^{-1}[\rho 1'(r - X\gamma\eta_R) + 1'(m - X\gamma)] \quad (2.1.12)$$

Prosedur optimisasi dengan menggunakan algoritma estimasi iteratif berdasarkan persamaan (2.1.8) – (2.1.12) tidak dijamin diperolehnya minimum global, hanya minimum lokal saja. Dengan demikian sangat disarankan untuk menggunakan algoitma iterasi dengan beberapa nilai awal untuk mengetahui stabilitas solusi (D'Usro dan Santoro, [12]).

Solusi di atas merupakan generalisasi dari solusi model regresi fuzzy dengan variabel dependen fuzzy simetris apabila $\boldsymbol{\delta}_L = \boldsymbol{\delta}_R$ ($\eta_L = \eta_R$ dan $\xi_L = \xi_R$). Beberapa contoh penerapan data fuzzy tipe simetris dapat dilihat pada [17], [13], [14], [15], dan [16]. Selanjutnya pada kasus variabel dependen tegas (*crisp*) yaitu $\mathbf{l} = \mathbf{r} = \mathbf{0}$; dan $\eta_L = \eta_R = \xi_L = \xi_R = 0$ maka estimasi $\boldsymbol{\gamma}$ yang termuat dalam (4.15) akan menghasilkan solusi kuadrat terkecil biasa yaitu $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-\mathbf{1}}\mathbf{X}'\mathbf{m}$. Dengan demikian model pada sistem persamaan di atas merupakan generalisasi dari model regresi fuzzy simetris sekaligus generalisasi dari model regresi linear klasik (model untuk data tegas).

3. Sifat Solusi Kuadrat Terkecil dari Model

Pada contoh ini ditunjukkan aplikasi praktis model regrei fuzzy dengan variabel dependen fuzzy tak simetris. Data diambil di Roma pada tanggal 5 s.d. 25 Oktober

Proposisi 3.0.1. Untuk model (2.0.1) dan estimasi kuadrat terkecil iteratif (2.1.8) –(2.1.12), diperoleh

$$\mathbf{1}'(\mathbf{m}-\widehat{\boldsymbol{\mu}})=0, \tag{3.0.13}$$
$$\mathbf{1}'\left(\mathbf{l}-\widehat{\boldsymbol{\delta}}_L\right)=0, \tag{3.0.14}$$
$$\mathbf{1}'\left(\mathbf{u}-\widehat{\boldsymbol{\delta}}_R\right)=0. \tag{3.0.15}$$

Bukti. Persamaan (2.1.1) ditulis menjadi

$$\begin{aligned}\Delta_{LR}^2 &= \left\|\begin{matrix}\mathbf{m}-\widehat{\boldsymbol{\mu}}\\ (\mathbf{m}-\lambda\mathbf{l})-\left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}-\lambda\widehat{\boldsymbol{\delta}}_L\right)\\ (\mathbf{m}+\rho\mathbf{r})-\left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}+\rho\widehat{\boldsymbol{\delta}}_R\right)\end{matrix}\right\|^2\\ &= \left\|\begin{pmatrix}\mathbf{m}\\ \mathbf{m}-\lambda\mathbf{l}+\lambda\mathbf{1}\hat{\xi}_L\\ \mathbf{m}+\rho\mathbf{r}-\rho\mathbf{1}\hat{\xi}_R\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{X}-\lambda\mathbf{X}\hat{\eta}_L\\ \mathbf{X}+\rho\mathbf{X}\hat{\eta}_R\end{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}\right\|^2\\ &= \|\mathbf{y}-\mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}\|^2\end{aligned} \tag{3.0.16}$$

dengan $\mathbf{y}$ dan $\mathbf{Z}$ didefinisikan secara implisit dalam (3.0.16). Persamaan (3.0.16) merupakan transformasi dari masalah regresi dengan variabel dependen fuzzy ke dalam masalah regresi biasa antara $\mathbf{y}$ (vektor variabel dependen) dan $\mathbf{Z}$ (matriks variabel independen). Berdasarkan sifat estimasi regresi biasa, diketahui bahwa untuk vektor optimal $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}$ diperoleh

$$\mathbf{1}'\mathbf{y}=\mathbf{1}'\mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}. \tag{3.0.17}$$

Dengan mensubstitusi $\mathbf{y}$ dan $\mathbf{Z}$ dalam (3.0.16) ke dalam (3.0.17), diperoleh

$$\begin{aligned}&\mathbf{1}'\mathbf{m}+\mathbf{1}'\mathbf{m}-\mathbf{1}'\lambda\mathbf{l}+\mathbf{1}'\lambda\mathbf{1}\hat{\xi}_L+\mathbf{1}'\mathbf{m}+\mathbf{1}'\rho\mathbf{r}-\mathbf{1}'\rho\mathbf{1}\hat{\xi}_R\\ &\quad=\mathbf{1}'\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}+\mathbf{1}'\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}-\mathbf{1}'\lambda\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}\hat{\eta}_L+\mathbf{1}'\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}+\mathbf{1}'\rho\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}\hat{\eta}_R\\ &\Leftrightarrow 0=\mathbf{1}'\mathbf{m}-\mathbf{1}'\widehat{\boldsymbol{\mu}}+\mathbf{1}'\mathbf{m}-\mathbf{1}'\widehat{\boldsymbol{\mu}}+\mathbf{1}'\mathbf{m}-\mathbf{1}'\widehat{\boldsymbol{\mu}}-\mathbf{1}'\lambda\mathbf{l}+\lambda\mathbf{1}'\left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\eta}_L+\right.\\ &\quad\left.\mathbf{1}\hat{\xi}_L\right)+\mathbf{1}'\rho\mathbf{r}-\rho\mathbf{1}'\left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\eta}_R+\mathbf{1}\hat{\xi}_R\right)\\ &\Leftrightarrow 0=3[\mathbf{1}'(\mathbf{m}-\widehat{\boldsymbol{\mu}})]-\lambda\left[\mathbf{1}'\left(\mathbf{l}-\widehat{\boldsymbol{\delta}}_L\right)\right]+\rho\left[\mathbf{1}'\left(\mathbf{r}-\widehat{\boldsymbol{\delta}}_R\right)\right].\end{aligned} \tag{3.0.18}$$

Di lain pihak berdasarkan (2.1.6) dan (2.1.7), diperoleh

$$\mathbf{1}'(\mathbf{m}-\widehat{\boldsymbol{\mu}})=\lambda\left[\mathbf{1}'\left(\mathbf{l}-\widehat{\boldsymbol{\delta}}_L\right)\right], \tag{3.0.19}$$
$$\mathbf{1}'(\mathbf{m}-\widehat{\boldsymbol{\mu}})=-\rho\left[\mathbf{1}'\left(\mathbf{r}-\widehat{\boldsymbol{\delta}}_R\right)\right]. \tag{3.0.20}$$

Dengan mensubstitusi (3.0.19) dan (3.0.20) ke dalam (3.0.18) terbukti sifat (3.0.13) yaitu $0=\mathbf{1}'(\mathbf{m}-\widehat{\boldsymbol{\mu}})$. Selanjutnya dengan mensubstitusi (3.0.13) ke dalam (3.0.19) dan (3.0.20), terbukti sifat (3.0.14) dan (3.0.15), yaitu $\mathbf{1}'\left(\mathbf{l}-\widehat{\boldsymbol{\delta}}_L\right)=0$ dan $\mathbf{1}'\left(\mathbf{r}-\widehat{\boldsymbol{\delta}}_R\right)=0$.■

Proposisi 3.0.2. Residual $(\mathbf{m}-\widehat{\boldsymbol{\mu}})$ tidak berkorelasi dengan estimasi pusat $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$, yaitu

$$(\mathbf{m}-\widehat{\boldsymbol{\mu}})'\widehat{\boldsymbol{\mu}}=0. \tag{3.0.21}$$

Bukti. Dari (2.1.4) diperoleh

$$\begin{aligned}
&\hat{\boldsymbol{\gamma}}'\mathbf{X}'\mathbf{m} - \hat{\boldsymbol{\gamma}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \lambda\left(\hat{\boldsymbol{\gamma}}'\mathbf{X}'\mathbf{l} - \hat{\boldsymbol{\gamma}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\gamma}}\hat{\eta}_L - \hat{\boldsymbol{\gamma}}'\mathbf{X}'\mathbf{1}\hat{\xi}_L\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{\mu}}'\mathbf{m} - \hat{\boldsymbol{\mu}}'\hat{\boldsymbol{\mu}} - \lambda\left(\hat{\boldsymbol{\mu}}'\mathbf{l} - \hat{\boldsymbol{\mu}}'\hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\eta}_L - \hat{\boldsymbol{\mu}}'\mathbf{1}\hat{\xi}_L\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{\mu}}'\left((\mathbf{m} - \hat{\boldsymbol{\mu}}) - \lambda\left(\mathbf{l} - \hat{\boldsymbol{\delta}}_L\right)\right) = 0,
\end{aligned} \tag{3.0.22}$$

dan berdasarkan (2.1.5) diperoleh

$$\begin{aligned}
&-\hat{\boldsymbol{\gamma}}'\mathbf{X}'\mathbf{m} + \hat{\boldsymbol{\gamma}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \rho\left(\hat{\boldsymbol{\gamma}}'\mathbf{X}'\mathbf{r} - \hat{\boldsymbol{\gamma}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\gamma}}\hat{\eta}_R - \hat{\boldsymbol{\gamma}}'\mathbf{X}'\mathbf{1}\hat{\xi}_R\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow -\hat{\boldsymbol{\mu}}'\mathbf{m} + \hat{\boldsymbol{\mu}}'\hat{\boldsymbol{\mu}} - \rho\left(\hat{\boldsymbol{\mu}}'\mathbf{r} - \hat{\boldsymbol{\mu}}'\hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\eta}_R - \hat{\boldsymbol{\mu}}'\mathbf{1}\hat{\xi}_R\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{\mu}}'\left((\mathbf{m} - \hat{\boldsymbol{\mu}}) + \rho\left(\mathbf{r} - \hat{\boldsymbol{\delta}}_R\right)\right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.0.23}$$

Berdasarkan (2.1.3) diperoleh

$$\begin{aligned}
&\mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\mu}}(3 - 2\lambda\hat{\eta}_L + \lambda^2\hat{\eta}_L^2 + 2\rho\hat{\eta}_R + \rho^2\hat{\eta}_R^2) \\
&\qquad = \mathbf{X}'\left[3\mathbf{m} - \lambda\left(\mathbf{m}\hat{\eta}_L + \mathbf{l} - \mathbf{1}\hat{\xi}_L\right) + \lambda^2\left(\mathbf{l}\hat{\eta}_L - \mathbf{1}\hat{\eta}_L\hat{\xi}_L\right)\right. \\
&\qquad \left. + \rho\left(\mathbf{m}\hat{\eta}_R + \mathbf{r} - \mathbf{1}\hat{\xi}_R\right) + \rho^2\left(\mathbf{r}\hat{\eta}_R - \mathbf{1}\hat{\eta}_R\hat{\xi}_R\right)\right] \\
&\Leftrightarrow \mathbf{X}'(3\hat{\boldsymbol{\mu}} - 2\lambda\hat{\eta}_L\hat{\boldsymbol{\mu}} + \lambda^2\hat{\eta}_L^2\hat{\boldsymbol{\mu}} + 2\rho\hat{\eta}_R\hat{\boldsymbol{\mu}} + \rho^2\hat{\eta}_R^2\hat{\boldsymbol{\mu}}) \\
&\qquad = \mathbf{X}'\left[3\mathbf{m} - \lambda\left(\mathbf{m}\hat{\eta}_L + \mathbf{l} - \mathbf{1}\hat{\xi}_L\right) + \lambda^2\left(\mathbf{l}\hat{\eta}_L - \mathbf{1}\hat{\eta}_L\hat{\xi}_L\right)\right. \\
&\qquad \left. + \rho\left(\mathbf{m}\hat{\eta}_R + \mathbf{r} - \mathbf{1}\hat{\xi}_R\right) + \rho^2\left(\mathbf{r}\hat{\eta}_R - \mathbf{1}\hat{\eta}_R\hat{\xi}_R\right)\right] \\
&\Leftrightarrow \mathbf{0} = \mathbf{X}'\left[3\mathbf{m} - 3\hat{\boldsymbol{\mu}} - \lambda\left(\hat{\eta}_L\mathbf{m} - 2\hat{\eta}_L\hat{\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{l} - \hat{\xi}_L\mathbf{1}\right) + \lambda^2\left(\hat{\eta}_L\mathbf{l} - \hat{\eta}_L^2\hat{\boldsymbol{\mu}} - \hat{\eta}_L\hat{\xi}_L\mathbf{1}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \rho\left(\hat{\eta}_R\mathbf{m} - 2\hat{\eta}_R\hat{\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{r} - \hat{\xi}_R\mathbf{1}\right) + \rho^2\left(\hat{\eta}_R\mathbf{r} - \hat{\eta}_R^2\hat{\boldsymbol{\mu}} - \hat{\eta}_R\hat{\xi}_R\mathbf{1}\right)\right] \\
&\Leftrightarrow \mathbf{0} = \mathbf{X}'\left[(\mathbf{m} - \hat{\boldsymbol{\mu}}) + \left\{(\mathbf{m} - \hat{\boldsymbol{\mu}}) - \lambda\left(\mathbf{l} - \hat{\boldsymbol{\delta}}_L\right)\right\} + \left\{(\mathbf{m} - \hat{\boldsymbol{\mu}}) + \rho\left(\mathbf{r} - \hat{\boldsymbol{\delta}}_R\right)\right\} -\right. \\
&\lambda\eta L\mathbf{m}-\boldsymbol{\mu}-\lambda\mathbf{l}-\boldsymbol{\delta}L+\rho\eta R\mathbf{m}-\boldsymbol{\mu}+\rho\mathbf{r}-\boldsymbol{\delta}R
\end{aligned}$$

Karena $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ atau $\hat{\boldsymbol{\mu}}' = \hat{\boldsymbol{\gamma}}'\mathbf{X}'$**,** maka berlaku

$$\begin{aligned}
&0 = \hat{\boldsymbol{\mu}}'\left[(\mathbf{m} - \hat{\boldsymbol{\mu}}) + \left\{(\mathbf{m} - \hat{\boldsymbol{\mu}}) - \lambda\left(\mathbf{l} - \hat{\boldsymbol{\delta}}_L\right)\right\} + \left\{(\mathbf{m} - \hat{\boldsymbol{\mu}}) + \rho\left(\mathbf{r} - \hat{\boldsymbol{\delta}}_R\right)\right\} -\right. \\
&\lambda\eta L\mathbf{m}-\boldsymbol{\mu}-\lambda\mathbf{l}-\boldsymbol{\delta}L+\rho\eta R\mathbf{m}-\boldsymbol{\mu}+\rho\mathbf{r}-\boldsymbol{\delta}R
\end{aligned} \tag{3.0.24}$$

Dengan mensubstitusi (3.0.22) dan (3.0.23) ke dalam (3.0.24), diperoleh

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}'(\mathbf{m} - \hat{\boldsymbol{\mu}}) = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{m} - \hat{\boldsymbol{\mu}})'\hat{\boldsymbol{\mu}} = 0. \blacksquare$$

Proposisi 3.0.3. Residual $\left(\mathbf{l} - \hat{\boldsymbol{\delta}}_L\right)$ tidak berkorelasi dengan estimasi tepi kiri $\hat{\boldsymbol{\delta}}_L$ dan residual $\left(\mathbf{r} - \hat{\boldsymbol{\delta}}_R\right)$ tidak berkorelasi dengan estimasi tepi kanan $\hat{\boldsymbol{\delta}}_R$, yaitu

$$\left(\mathbf{l} - \hat{\boldsymbol{\delta}}_L\right)'\hat{\boldsymbol{\delta}}_L = 0, \tag{3.0.25}$$

$$\left(\mathbf{r} - \hat{\boldsymbol{\delta}}_R\right)'\hat{\boldsymbol{\delta}}_R = 0. \tag{3.0.26}$$

Bukti. Dengan substitusi (3.0.21) ke (3.0.22) diperoleh

$$\left(\mathbf{l} - \hat{\boldsymbol{\delta}}_L\right)'\hat{\boldsymbol{\mu}} = 0 \Leftrightarrow \left(\mathbf{l} - \hat{\boldsymbol{\delta}}_L\right)'\hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\eta}_L = 0. \tag{3.0.27}$$

Berdasarkan (3.0.14) diperoleh

$$\left(\mathbf{l} - \hat{\boldsymbol{\delta}}_L\right)'\mathbf{1} = 0 \Leftrightarrow \left(\mathbf{l} - \hat{\boldsymbol{\delta}}_L\right)'\mathbf{1}\hat{\xi}_L = 0. \tag{3.0.28}$$

Dari (3.0.27) dan (3.0.28) diperoleh (3.0.25), yaitu

$$\left(\mathbf{l}-\hat{\boldsymbol{\delta}}_L\right)'\left(\hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\eta}_L+\mathbf{1}\hat{\xi}_L\right)=0 \Leftrightarrow \left(\mathbf{l}-\hat{\boldsymbol{\delta}}_L\right)'\hat{\boldsymbol{\delta}}_L=0.$$

Selanjutnya dengan substitusi (3.0.21) ke (3.0.23) diperoleh

$$\left(\mathbf{r}-\hat{\boldsymbol{\delta}}_R\right)'\hat{\boldsymbol{\mu}}=0 \Leftrightarrow \left(\mathbf{r}-\hat{\boldsymbol{\delta}}_R\right)'\hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\eta}_R=0. \qquad (3.0.29)$$

Berdasarkan (3.0.15) diperoleh

$$\left(\mathbf{r}-\hat{\boldsymbol{\delta}}_R\right)'\mathbf{1}=0 \Leftrightarrow \left(\mathbf{r}-\hat{\boldsymbol{\delta}}_R\right)'\mathbf{1}\hat{\xi}_R=0. \qquad (3.0.30)$$

Dari (3.0.29) dan (3.0.30) diperoleh (3.0.26), yaitu

$$\left(\mathbf{r}-\hat{\boldsymbol{\delta}}_R\right)'\left(\hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\eta}_R+\mathbf{1}\hat{\xi}_R\right)=0 \Leftrightarrow \left(\mathbf{r}-\hat{\boldsymbol{\delta}}_R\right)'\hat{\boldsymbol{\delta}}_R=0. \blacksquare$$

Berdasarkan sifat-sifat di atas, maka solusi iteratif model regresi fuzzy dengan variabel dependen fuzzy LR (persamaan (4.11) sampai dengan (4.15)) dapat disederhanakan menjadi

$$\boldsymbol{\gamma}=[3-\lambda\eta_L(2-\lambda\eta_L)+\rho\eta_R(2+\rho\eta_R)]^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\times[3\mathbf{m}-$$
$$\lambda\mathbf{m}\eta L+\mathbf{l}-\mathbf{1}\xi L+\lambda 2\mathbf{l}\eta L-\mathbf{1}\eta L\xi L+\rho\mathbf{m}\eta R+\mathbf{r}-\mathbf{1}\xi R+\rho 2\mathbf{r}\eta R-\mathbf{1}\eta R\xi R \qquad (3.0.31)$$

$$\begin{aligned}
\eta_L &= \lambda^{-1}(\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma})^{-1}[\lambda(\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{l}-\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{1}\xi_L)-(\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{m}-\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma})]\\
&= \lambda^{-1}(\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma})^{-1}[\lambda\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'(\mathbf{l}-\mathbf{1}\xi_L)-\boldsymbol{\mu}'(\mathbf{m}-\boldsymbol{\mu})]\\
&= (\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma})^{-1}\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'(\mathbf{l}-\mathbf{1}\xi_L) && (3.0.32)\\
\eta_R &= (\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma})^{-1}\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}'(\mathbf{r}-\mathbf{1}\xi_R) && (3.0.33)\\
\xi_L &= (n\lambda)^{-1}[\lambda\mathbf{1}'(\mathbf{l}-\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}\eta_L)-\mathbf{1}'(\mathbf{m}-\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma})]\\
&= (n\lambda)^{-1}[\lambda\mathbf{1}'(\mathbf{l}-\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}\eta_L)-\mathbf{1}'(\mathbf{m}-\boldsymbol{\mu})]\\
&= (n)^{-1}\mathbf{1}'(\mathbf{l}-\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}\eta_L) && (3.0.34)\\
\xi_U &= (n)^{-1}\mathbf{1}'(\mathbf{r}-\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}\eta_R) && (3.0.35)
\end{aligned}$$

Selanjutnya dapat dilihat bahwa pada kasus tepi kiri sama dengan tepi kanan (variabel dependen fuzzy simetris), yaitu $\mathbf{l}=\mathbf{r}$, $\eta_L=\eta_R$, $\xi_L=\xi_R$, dan $\lambda=\rho$ maka dari persamaan (3.0.31) s.d. (3.0.35) diperoleh solusi kuadrat terkecil iteratif model variabel fuzzy simetris, yaitu persamaan (3.0.36) s.d. (3.0.38) (lihat [14] dan [17]) sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= (3+2\lambda^2b^2)^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'[3\mathbf{m}+2\lambda^2(\mathbf{l}b-\mathbf{1}bd)]. && (3.0.36)\\
b &= (\mathbf{a}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{a})^{-1}\mathbf{a}'\mathbf{X}'(\mathbf{l}-\mathbf{1}d). && (3.0.37)\\
d &= n^{-1}\mathbf{1}'(\mathbf{l}-\mathbf{X}\mathbf{a}b). && (3.0.38)
\end{aligned}$$

Oleh karena itu solusi pada sistem persamaan di atas merupakan generalisasi dari solusi model regresi fuzzy dengan variabel fuzzy simetris, jika tepi kiri sama dengan tepi kanan. Dengan demikian solusi tersebut juga merupakan generalisasi dari model regresi linear biasa, jika variabel dependen merupakan variabel fuzzy tipe LR.

4. Simpulan

Berdasarkan pembahasan di atas dapat disimpulkan beberapa hal, seperti: (1) proporsi 3.0.1 (persamaan 3.0.13 s.d. 3.0.15), proporsi 3.0.2, dan proporsi 3.0.2 (persamaan 3.0.25 dan 3.0.26) merupakan sifat-sifat baik solusi kuadrat terkecil iteratif model regresi fuzzy dengan variabel dependen fuzzy tak simetris, (2) sifat baik tersebut juga merupakan sifat generalisasi pada solusi model regresi fuzzy simetris, dan (3) sifat ini berperan penting dalam membangun koefisien determinasi model.

Daftar Pustaka

[1]. R. Coppi, *Management of uncertainty in statistical reasoning: The case of regression analysis*, International Journal of Approximate Reasoning **47** (2008), 284-305.

[2]. R. Coppi and P. D'Urso, *Regression analysis with fuzzy informational paradigm: a least squares approach using membership function information*, Int. J. Pure Appl. Math. **8** (2003), no. 3, 279-306.

[3]. R. Coppi, P. D'Urso, P. Giordani, and A. Santoro, *Least squares estimation of a linear regression model with LR fuzzy response*, Computational Statistics & Data Analysis **51** (2006), 267-286.

[4]. R. Coppi, M. A. Gil, and H. A. L. Kiers, *The fuzzy approach to statistical analysis*, Computational Statistics & Data Analysis 51 (2006), 1-14.

[5]. R. Coppi, P. Giordani, and P. D'Urso, *Component models for fuzzy data*, Psychometrika **71** (2006), no. 4, 733-761.

[6]. P. D'Urso, *Linear regression analysis for fuzzy/crisp input and fuzzy/crisp output data*, Computational Statistics & Data Analysis **42** (2003), 47-72.

[7]. P. D'Urso and T. Gastaldi, *A least-squares approach to fuzzy linear regression analysis*, Computational Statistics & Data Analysis **34** (2000), 427-440.

[8]. -------, *An "orderwise" polynomial regression procedure for fuzzy data*, Fuzzy Sets and Systems **130** (2002), 1-19.

[9]. P. D'Urso and P. Giordani, *Fitting of fuzzy linear regression models with multivariate response*, Int. Math. J. **3** (2003), no. 6, 655-664.

[10]. -------, *A weighted fuzzy c-means clustering model for fuzzy data*, Computational Statistics & Data Analysis **50** (2006), no. 6, 1496-1523.

[11]. P. D'Urso and A. Santoro, *Fuzzy clusterwise linear regression analysis with symmetrical fuzzy output variable*, Computational Statistics & Data Analysis **51** (2006), 287-313.

[12]. -------, *Goodness of fit and variable selection in the fuzzy multiple linear regression*, Fuzzy Sets and Systems **157** (2006), 2627-2647.

[13]. I. Kharisudin, *Bentuk fungsi keanggotaan pada model regresi dengan variabel dependen fuzzy simetris*, Prosiding Seminar Nasional Statistika IX,

Jurusan Statistika FMIPA ITS Surabaya, ISBN: 978-979-96700-4-5 (1-11), 2009.

[14]. -------, *Generalisasi solusi kuadrat terkecil pada model regresi fuzzy simetris*, Prosiding Seminar Nasional V Jurusan Matematika FMIPA UNNES Semarang, ISBN: 978-602-8467-12-4 (254-261), 2009.

[15]. -------, *Koefisien determinasi regresi fuzzy simetris untuk pemilihan model terbaik*, Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY Yogyakarta, ISBN: 978-979-16353-3-2 (895-909), 2009.

[16]. -------, *Seleksi sub model pada regresi fuzzy simetris*, Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UPI Bandung: 490-500, 2009.

[17]. I. Kharisudin and Subanar, *Fuzzy regression analysis with symmetrical fuzzy dependent variable*, The Proceeding of IICMA 2009 UGM Yogyakarta, ISBN: 978-602-96426-0-5 (935-950), 2009.

[18]. M.-S. Yang and C.-H. Ko, *On a class of fuzzy c-numbers clustering procedures for fuzzy data*, Fuzzy Sets and Systems **84** (1996), 49-60.