Sistem Bonus Malus sebagai Model Rantai Markov

Supandi
Program Studi Pendidikan Matematika
FPMIPA IKIP Semarang

Abstrak
Sistem bonus-malus (BMS) yang dibangun mempunyai tujuan untuk membuat premi yang dibayarkan oleh tertanggung sedekat mungkin dengan harapan terjadinya klaim setiap tahunnya. Bila kita ingin meneliti bagaimana *efisiensi* suatu BMS, kita harus melihat bagaimana premi itu bergantung pada frekuensi klaim. Efisiensi sistem bonus-malus dicari melalui model Markovnya, yaitu dengan mencari distribusi stasioner dari rantai markov BMS-nya. Dalam paper ini BMS yang digunakan adalah BMS Brasil dan modifkasinya pada nilai preminya untuk keadaan bawah. Dari modifikasi ini akan dibahas pengaruh perubahan premi terhadap efisiensi BMS tersebut.

Kata kunci : BMS, rantai markov, stationer, efisiensi

A. Pendahuluan

Premi asuransi dibentuk proposional dengan risiko yang terjadi. Khususnya dalam asuransi kendaraan bermotor/mobil premi dasar ditentukan berdasarkan besar, harga atau kapasitas dari kendaraan yang di asuransikan. Setelah masuk asuransi, penentuan besar premi pada tahun berikutnya hanya dipengaruhi oleh banyaknya kecelakaan dalam satu tahun periode sebelumnya. Dimana dengan adanya kecelakaan maka akan terjadi klaim. Sistem seperti penentuan premi seperti ini disebut dengan sistem bonus-malus (BMS). Sistem ini pertama kali diperkenalkan di Eropa pada awal tahun 1960. BMS dikembangkan oleh Delaporte (1965), Bichsel (1964) dan Buhlman (1964). Setiap negara –jika tidak setiap perusahaan- memiliki sistem BMS yang berbeda, yang memungkinkan lebih baik satu dari yang lainnya (Lemaire, 1994).

Penentuan premi dengan menggunakan sistem BMS dapat dipandang sebagai model multiple state (keadaan multipel). Dasar model stokastik keadaan multipel ini adalah rantai Markov dengan banyak keadaan yang berhingga. Sebagai ilustrasi perubahan premi kendaraan bermotor dari tahun pertama ke tahun kedua, dengan tahun pertama tidak ada klaim, atau ada satu klaim, atau dua klaim, dan seterusnya direalisasikan sebagai bentuk transisi dari keadaan..

B. Sistem Bonus Malus

Sistem bonus-malus (BMS) mempresentasikan banyaknya tarif grup yang berhingga dan bergantung pada premi tahunan. Setiap tahun, tarif grup ditetapkan sebagai tarif grup dari tahun sebelumnya dan banyaknya klaim yang tercatat dari tertanggung asuransi pada perusahaan asuransi selama tahun itu. Jika tidak ada klaim atau klaim tidak tercatat maka tertanggung tersebut akan mendapat bonus yang berbentuk pengurangan nilai premi. Sedangkan jika terjadi klaim, paling sedikit klaim yang tercatat maka premi yang harus dibayar pada tahun berikutnya oleh tertanggung akan naik. Dengan kata lain jika dalam satu tahun periode terjadi klaim maka akan mendapat malus.

Sistem bonus-malus dapat dinyatakan sebagai berikut:

1. Banyaknya tarif grup *berhingga* di awal periode dari asuransi dinotasikan dengan C_i, dimana i = 1,2,….n. Sedangkan banyaknya tarif grup di akhir periode asuransi dinotasikan dengan C_j, j = 1,2…n. Tarif grup terendah disebut dengan *superbonus* dan tarif grup tertinggi disebut dengan *supermalus*. Premi tahunan

bergantung pada banyaknya tarif grup yang terjadi.

2. Misalkan C_{it} tarif grup pada tahun ke-t, C_{i0} merupakan tarif grup pertama masuk asuransi. Dalam tarif grup ini premi dasar dibayar sebesar P. Premi ini dihitung menggunakan beberapa faktor, seperti harga, kapasistas, tipe mobil dan sebagainya.
3. Prosentasi dari premi dasar r_i (dalam %) menotasikan prosentasi yang akan dikalikan dengan premi dasar sebagai premi berikutnya yang harus dibayar, dengan $r_1 \le r_2 \le r_3 \le \ldots\ldots \le r_n$.
4. Perpindahan dari tarif grup sebelumnya (ke-i) ke tarif grup berikutnya (ke-j) dengan k klaim yang tercatat, dinyatakan dengan

$$t_{ij}(k) = \begin{cases} 1 & \text{jika terjadi perpindahan dari tarif grup ke-i} \\ & \text{ke tarif grup ke-j} \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases} \qquad (1)$$

Untuk selanjutnya, misalkan untuk seorang pemegang polis, klaim yang tercatat dalam satu tahun adalah berbentuk suatu barisan $X_1, X_2, \ldots X_m$. dari suatu peubah acak yang saling bebas dengan fungsi peluang bersama $\{q_k\}$. Dinotasikan bahwa $C_1, C_2, \ldots\ldots$adalah tarif grup dari tahun ke tahun dari pemegang polis. Tarif grup tahun sebelumnya dengan banyaknya klaim yang tercatat. Dengan demikian maka permasalahan sistem bonus-malus dapat dipandang sebagai Model Rantai Markov. Dengan menggunakan teori Markov, maka $\{C_n\}$ barisan peubah acak dengan ruang tarif grup berhingga. $\{C_n\}$ adalah Rantai Markov yang memiliki matrik $\mathbf{M} = (p_{ij})$ sedemikian hingga untuk semua n=1,2,….dan $i_0, i_1, \ldots, i_n$,

$$\boldsymbol{Pr}(C_n = i_n \mid C_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, C_0 = i_0) = p_{(i_{n-1}, i_n)} \qquad (2)$$

$$\text{dimana } \boldsymbol{Pr}(C_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, C_0 = i_0) > 0.$$

Peluang transisi p_{ij} merupakan peluang perpindahan dari tarif grup ke-i ke tarif grup ke-j dari pemegang polis dapat dituliskan sebagai

$$p_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} q_k t_{ij}(k).$$

Menurut Rolski (1999) dan Lemaire (1998) banyaknya klaim (k) yang terjadi dan tercatat oleh pemegang polis diasumsikan memenuhi definisi proses Poisson dengan laju λ. Dengan menggunakan persamaan (1) maka matrik transisi p_{ij} dari Rantai Markov dapat disajikan menjadi

$$\mathbf{M}(\lambda) = [p_{ij}(\lambda)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} t_{ij}(k) \qquad (3)$$

$$\text{dengan } p_{ij}(\lambda) \ge 0 \text{ dan } \sum_{k=0}^{n} p_{ij}(\lambda) = 1.$$

C. Distribusi Stasioner

Misal didefinisikan $p_j^n(\lambda) = \mathbf{P}(Y_n(\Lambda) = j)$. Dari persamaan (3) peluang untuk tidak ada klaim adalah positif, $p_0(\lambda) > 0$. Dengan menggunakan sifat dari Rantai Markov yang *regular* maka diperoleh

1. Jika distribusi peluang untuk banyaknya klaim selama satu periode adalah saling bebas terhadap periode, maka tarif grup untuk polisnya berbentuk rantai Markov dengan matrik transisi $\mathbf{M}(\lambda)$ yang diberikan dalam persamaan (3).

2. Jika peluang untuk tidak ada klaim dalam satu periode $p_0(\lambda) > 0$, maka disebut dengan regular.

Akibatnya $p_k(\lambda) > 0$. Dengan demikian rantai Markov dari sistem bonus-malus ini adalah regular. Artinya terdapat bilangan $q \geq 1$, sehingga $\{\mathbf{M}(\lambda)\}^q$ semua unsurnya bernilai positif murni.

Dalam kasus regular dengan nilai eigen satu yaitu nilai eigen dari matrik M. Distribusi stasioner, vektor kolom $\pi(\lambda)$ merupakan solusi tunggal dari persamaan berikut

$\pi(\lambda) = \pi(\lambda)\, \mathbf{M}(\lambda)$ dengan $\sum_{j\in E} \pi_j = 1$ (4).

Atau dengan kata lain distribusi stasioner yang diperoleh merupakan nilai dari eigen vektor dari persamaan (4) yang bersesuaian dengan nilai eigen satu dari matrik **M**.

3. Efisiensi Sistem Bonus Malus

Dalam BMS premi stasioner dinotasikan dengan $b(\lambda)$ dan dituliskan sebagai jumlahan dari perkalian vektor baris distribusi stasioner dari rantai Markov ($\pi = \pi_1, \pi_2, \ldots \pi_n$) dengan vektor kolom nilai premi B untuk setiap keadaan aktual . Nilai "$b(\lambda)$" ini tidak bergantung pada keadaan awal *i*.

$$b(\lambda) = (\pi, \pi\ ,\ldots, \pi_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_i \pi_i b_i = \pi B \quad (5)$$

dengan b_i adalah premi yang dibayarkan pada keadaan ke-*i* sesuai denga tarif grup pada keadaan ke-*i*. "$b(\lambda)$" merupakan fungsi naik dari λ.

Dengan mengasumsikan bahwa barisan dari klaim adalah *iid* (independent identically distributed) mempunyai *mean V* (Rolski, 1999). Maka premi *netto* (premi yang dibayarkan tanpa adanya biaya) yang dibayarkan adalah λV , maka persamaan (5) dapat dituliskan sebagai

$$b(\lambda) = \lambda V \quad (6)$$

Fungsi $b(\lambda)$ merupakan fungsi dalam λ, dan tidak linier. Untuk dapat melinierkan persamaan (6), karena $b(\lambda) > 0$, maka fungsi tersebut dapat diambil logaritmanya untuk kedua sisinya. Dengan demikian fungsi logaritma dari persamaan (6) adalah

$$\log b(\lambda) = \log \lambda + \log V \quad (7)$$

Dengan menurunkan terhadap λ pada masing-masing sisi pada persamaan (7) diperoleh

$$\frac{1}{b(\lambda)}\frac{db(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} \text{ atau } \frac{\frac{db(\lambda)}{b(\lambda)}}{\frac{d(\lambda)}{\lambda}} = 1 \quad (8)$$

Persamaan (8) menunjukkan untuk setiap premi yang dibayarkan oleh tertanggung sama dengan premi pada BMS. Perubahan pada banyaknya klaim yang diharapkan pada tiap periode $d\lambda/\lambda$ mengakibatkan perubahan pada premi rata-rata $db(\lambda)/b(\lambda)$.

Secara umum persamaan (8) merupakan rasio dari variansi dari premi stasioner dengan variansi dari frekuensi klaim dan disebut sebagai efisiensi dari BMS yang dinotasikan dengan *e(λ),*

$$e(\lambda) = \frac{\lambda}{b(\lambda)}\frac{db(\lambda)}{d\lambda} = \frac{d\log b(\lambda)}{d\log \lambda} \quad (9)$$

Nilai $e(\lambda)$ dari persamaan (9) adalah positif karena $b(\lambda)>0$ dan secara umum $0<e(\lambda)<1$. Selanjutnya dari persamaan (9), bagian $db(\lambda)/d\lambda$ dapat diperoleh dengan menurunkan persamaan (5) terhadap λ, sehingga akan diperoleh

$$\frac{db(\lambda)}{d\lambda} = \sum_i \frac{d\pi_i}{d\lambda} b_i \quad (10)$$

Sedangkan persamaan turunan $d\pi_i/d\lambda$ dapat diperoleh dengan menurunkan persamaan (5) yaitu $\pi = \pi\mathbf{M}$ dan $\sum_i \pi_i = 1$ terhadap λ,

$$\begin{aligned} \frac{d\pi}{d\lambda} &= \frac{d\pi}{d\lambda}M + \pi\frac{dM}{d\lambda} \\ \sum_i \frac{d\pi_i}{d\lambda} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

dengan bentuk matrik $d\mathbf{M}/d\lambda$ diperoleh dari persamaan berikut

$$\frac{dM(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{k=0}^{m} \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}(T_{k+1}-T_k) \quad (12)$$

Dengan $T_k = t_{ij}(k)$ dengan $t_{ij}(k)$ seperti pada persamaan (1)

D. Metode Mencari Nilai Efisiensi Metode Eksak

Misalkan model BMS mempunyai tiga keadaan saja dan dengan nilai preminya adalah (100,90,80) . Maka bentuk tabel dapat disajikan sebagai berikut

Tabel 1. Sistem Bonus-malus

(C_i, r_i) (Tarif grup, Prosentasi	Tarif Grup setelah satu tahun		
	Banyaknya klaim		
	0	1	2+
(3, 100)	2	3	3
(2 , 90)	1	3	3
(1 , 80)	1	2	3

Tabel 2. Tabel transisi dari Sistem Bonus-malus

	1	2	3
1	{1,2,..}	{0}	.
2	{1,2,..}	.	{0}
3	{2,3,..}	{1}	{0}

Dari Tabel 1 dan Tabel 2 diatas maka bentuk matrik transisi rantai Markovnya, **M**(λ) menjadi

$$\mathbf{M}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1\text{-}e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 \\ 1\text{-}e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 1\text{-}(1+\lambda)e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{bmatrix}$$

Misalkan bahwa **p**=$1\text{-}e^{-\lambda}$, **q**= $e^{-\lambda}$, dan **r** = $\lambda\, e^{-\lambda}$ maka bentuk matrik **M**(λ) dari contoh BMS diatas adalah

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ p & 0 & q \\ p-r & r & q \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dari matrik **M**(λ) diatas akan ditentukan distribusi stasionernya. Dengan menggunakan persamaan 4 maka dapat dituliskan menjadi

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ p & 0 & q \\ p-r & r & q \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan sisteem persamaan linier dan memasukan nilai p, q, dan r maka diperoleh nilai π_1 ,π_2 ,π_3 yaitu,

$$\pi_1 = \frac{1\text{-}e^{-\lambda}(\lambda e^{-\lambda}+1)}{1\text{-}\lambda e^{-2\lambda}}, \quad \pi_2 = \frac{e^{-\lambda}(1\text{-}e^{-\lambda})}{1\text{-}\lambda e^{-2\lambda}}, \quad \pi_3 = \frac{e^{-2\lambda}}{1\text{-}\lambda e^{-2\lambda}}$$

Selanjutnya dengan menggunakan nilai-nilai dari tarif grup yaitu (100, 90, dan 80) diperoleh premi stasioner sebagai berikut

$$b(\lambda) = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 90 \\ 80 \end{pmatrix} = \sum_i \pi_i b_i = 100 \times \frac{1\text{-}e^{-\lambda}(\lambda e^{-\lambda}+1)}{1\text{-}\lambda e^{-2\lambda}} + 90 \times \frac{e^{-\lambda}(1\text{-}e^{-\lambda})}{1\text{-}\lambda e^{-2\lambda}} + 80 \times \frac{e^{-2\lambda}}{1\text{-}\lambda e^{-2\lambda}}$$

Sehingga turunan premi stasioner dalam λ diperoleh

$$\frac{db(\lambda)}{d\lambda} = 100 \times \frac{e^{-\lambda}\left(1+\lambda e^{-\lambda}\right)\text{-}e^{-\lambda}\left(e^{-\lambda}\text{-}\lambda e^{-\lambda}\right)}{1\text{-}\lambda e^{-2\lambda}} - 100 \times \frac{1\text{-}e^{-\lambda}\left(1+\lambda e^{-\lambda}\right)}{\left(1\text{-}\lambda e^{-2\lambda}\right)^2}$$

$$- 90 \times \frac{\left(e^{-\lambda}\right)\left(1\text{-}e^{-\lambda}\right)}{\left(1\text{-}\lambda^{-2\lambda}\right)} + 90 \times \frac{\left(e^{-\lambda}\right)^2}{\left(1\text{-}\lambda^{-2\lambda}\right)} - 90 \times \frac{e^{-\lambda}\left(1\text{-}e^{-\lambda}\right)\left(\text{-}e^{-2\lambda}+2\lambda e^{-2\lambda}\right)}{\left(1\text{-}\lambda e^{-2\lambda}\right)^2} - 80 \times$$

$$\frac{2e^{-2\lambda}}{1\text{-}\lambda e^{-2\lambda}} - 80 \times \frac{e^{-2\lambda}\left(\text{-}e^{-2\lambda}+2\lambda e^{-2\lambda}\right)}{\left(1\text{-}\lambda e^{-2\lambda}\right)^2}$$

Dengan mengambil $\lambda=\lambda_0=0.1$ diperoleh

$\pi \quad = (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3)$

$\quad = (0.01447458531 \quad 0.09378514307 \quad 0.8917402715\ )$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan 5 diperoleh nilai dari premi stasioner, yaitu

$$\mathrm{b}(\lambda = 0.1) = \left(\pi_1\,\pi_2\,\pi_3\right)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \sum_i \pi_i b_i = 81.22734313$$

dan nilai dari $\frac{db(\lambda)}{d\lambda}|_{\lambda=0.1} = 14.29779228$

Sehingga nilai efisiensi dapat dicari dengan menggunakan persamaan (9) yaitu

$$e(\lambda = 0.1) = \frac{0.1}{81.22734313} 14.29779228 = 0.01760219124$$

E. Metode Numerik

Dari Tabel 1 dan Tabel 2 diatas maka dengan menggunakan asumsi pada persamaan 3, maka bentuk matrik transisi rantai Markovnya , $\mathbf{M}(\lambda)$ menjadi

$$\mathbf{M}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 \\ 1-e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 1-(1+\lambda)e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{bmatrix}$$

Dan

$$d\mathbf{M}(\lambda)/d\lambda = \begin{bmatrix} e^{-\lambda} & -e^{-\lambda} & 0 \\ e^{-\lambda} & 0 & -e^{-\lambda} \\ \lambda e^{-\lambda} & (1-\lambda)e^{-\lambda} & -e^{-\lambda} \end{bmatrix}$$

Bentuk matrik transisi $\mathbf{M}(\lambda)$ diatas mempunyai nilai determinan $\det(\mathbf{M}(\lambda)) = -\lambda e^{-2\lambda}$. Selanjutnya dari bentuk matrik $\mathbf{M}(\lambda)$ ini akan dicari distribusi stasionernya, yaitu $\boldsymbol{\pi}$. Dengan mengambil distribusi awal

$\boldsymbol{\pi_1} \quad = (a_1,b_1,c_1)$ dengan $a_1+b_1+c_1=1$ maka diperoleh:

$\boldsymbol{\pi_2} \quad = \boldsymbol{\pi_1}\,\mathbf{M}(\lambda)$

$$= (a_1,b_1,c_1)\begin{bmatrix} 1-e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 \\ 1-e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 1-(1+\lambda)e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{bmatrix}$$

$$= [(a_1+b_1)(1-e^{-\lambda})+c_1(1-(1+\lambda)e^{-\lambda}) \quad a_1e^{-\lambda}+c_1\lambda e^{-\lambda} \quad (b_1+c_1)(1-e^{-\lambda})\ ]$$

$$\boldsymbol{\pi}_3 = \boldsymbol{\pi}_2\, \mathbf{M}(\lambda)$$

$$= [(a_1+b_1)(1-e^{-\lambda})+c_1(1-(1+\lambda)e^{-\lambda}) \quad a_1e^{-\lambda}+c_1\lambda e^{-\lambda} \quad (b_1+c_1)(1-e^{-\lambda})\ ]\begin{bmatrix} 1-e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 \\ 1-e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 1-(1+\lambda)e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\pi}_4 = \boldsymbol{\pi}_2\, \mathbf{M}(\lambda)$$

….

…

$$\boldsymbol{\pi}_{n+1} = \boldsymbol{\pi}_n\, \mathbf{M}(\lambda)$$

dimana untuk $n \to \infty$, maka $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\, \mathbf{M}(\lambda)$ dengan $\boldsymbol{\pi}$ sebagai vektor baris dengan komponen-komponennya merupakan fungsi dari λ. Dengan mengambil λ=0.1 maka bentuk matrik diatas adalah

$$\mathbf{M}(\lambda=0.1) = \begin{bmatrix} 0.0951625820 & 0.9048374180 & 0 \\ 0.0951625820 & 0 & 0.9048374180 \\ 0.0046788402 & 0.09048374180 & 0.9048374180 \end{bmatrix}$$

Matrik $\mathbf{M}(\lambda)$ ini akan stasioner setelah n=22 yaitu diperoleh matrik

$$\mathbf{M}_{21}(\lambda=0.1) = \begin{bmatrix} 0.01447458553 & 0.093785143030 & 0.8917402710 \\ 0.01447458553 & 0.093785143030 & 0.8917402710 \\ 0.01447458553 & 0.093785143030 & 0.8917402710 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh distribusi stasioner dari matrik rantai Markov $\mathbf{M}((\lambda)$ untuk pemilihan distribusi awal tertentu yaitu $\boldsymbol{\pi}$ adalah

$$\boldsymbol{\pi} = (0.01447458553 \quad 0.09378514303 \quad 0.8917402710)$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan 5 diperoleh nilai dari premi stasioner yaitu

$$\mathrm{b}(\lambda = 0.1) = (\pi_1, \pi_2\, \pi_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \sum_i \pi_i b_i = 81.22734311$$

Proses selanjutnya yaitu menentukan nilai dari $db(\lambda)/d\lambda$. Sebelumnya $db(\lambda)/d\lambda$ ini akan ditentukan terlebih dahulu nilai dari $d\pi/d\lambda$ dengan menggunakan proses iterasi seperti ketika menghitung distribusi stasioner dari matrik rantai Markov $\mathbf{M}(\lambda)$. Pandang bahwa $\boldsymbol{\pi}$ dan $\mathbf{M}(\lambda)$ masih dalam bentuk fungsi dalam λ. Karena $\boldsymbol{\pi}$ merupakan suatu vektor baris yang komponen-komponennya fungsi dari λ dan matrik $\mathbf{M}(\lambda)$ juga merupakan matrik dengan unsur-unsurnya dalam bentuk fungsi λ, maka bentuk turunan dari $d\boldsymbol{\pi}/d\lambda$ adalah seperti dalam persamaan 10. Selanjutnya misalkan bahwa $\mathbf{s}=d\boldsymbol{\pi}/d\lambda$ maka bentuk iterasi dari persamaan 11 adalah

$$\mathbf{s}_1=\mathbf{s}_0 M(\lambda)+\boldsymbol{\pi}(dM(\lambda)/d\lambda)$$
$$\mathbf{s}_2=\mathbf{s}_1 M(\lambda)+\boldsymbol{\pi}(dM(\lambda)/d\lambda)$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$\mathbf{s}_{n+1}= \mathbf{s}_n M(\lambda)+\boldsymbol{\pi}(dM(\lambda)/d\lambda)$$

dimana untuk $n\to\infty$, maka $\mathbf{s}=\mathbf{s}M(\lambda)+\boldsymbol{\pi}(dM(\lambda)/d\lambda)$ dengan $\mathbf{s}$ sebagai vektor baris dengan komponen-komponennya merupakan fungsi dari λ. Dengan mengambil nilai $\lambda=0.1$ dengan bantuan program Mapple dan mengambil nilai $\mathbf{s_0}=(-0.6,0.6,0)$ maka diperoleh nilai $\mathbf{s}$ (stasioner setelah n=21 dengan tingkat kesalahan 10^{-10}), yaitu,

$$s_{21} = [\ 0.2824592539,\ 0.8648607192,\ -1.147319974\ ]$$

sehingga untuk nilai dari $db(\lambda)/d\lambda$ dapat diketahui yaitu

$$\frac{db(\lambda)}{d\lambda}=\sum_i \frac{d\pi_i}{d\lambda} b_i \quad = (0.2824592539\times 100 + 0.8648607192\times 90 - 1.147319974\times 80)$$
$$= 14.29779230$$

Dengan nilai dari frekuensi klaim λ, premi stasioner $b(\lambda)$ dan nilai dari $db(\lambda)/d\lambda$, maka untuk $\lambda=0.1$ diperoleh nilai efisiensi untuk BMS contoh dalam Tabel 1 dan Tabel 2 dengan menggunakan persamaan 9, yaitu

$$e(\lambda=0.1) = \frac{\lambda}{b(\lambda)}\frac{db(\lambda)}{d\lambda} = (0.1/81.22734311)\times 14.29779230 = 0.01760219119$$

Dengan demikian maka untuk $\lambda=0.1$ model BMS dalam kasus ini memberikan nilai efisiensi sebesar 0.01760219119. Dalam perhitungan selanjutnya semua nilai λ ini berada antara 0 dan 1. Didalam beberapa negara rata-rata frekuensi klaim (λ) adalah 10% (Lemaire 1998, hal 30). Nilai 10% ini selanjutnya digunakan dalam paper ini untuk untuk menentukkan nilai efisiensi dari model BMS.

5. Model BMS Brasil

Dalam sistem bonus-malus negara Brasil ini mempunyai tujuh tarif grup bonus yang dinomori dari 1 hingga 7 dengan tingkatan tarif grup 100, 90, 85, 80, 75, 70, 65. Tarif grup dimulai pada tarif grup pertama yaitu tarif grup 100. Jika tidak terjadi klaim dalam satu tahun tarif grup akan turun satu tingkat ke tarif grup yang lebih rendah prosentasinya. Sedangkan jika terjadi klaim sebanyak k dengan $k \geq 1$, maka untuk setiap klaimnya mengakibatkan tarif grup naik satu tingkat ke tarif grup yang lebih besar prosentasinya. BMS model Brasil ini disajikan dalam Tabel 3.

Selanjutnya dengan menggunakan formula mencari fisiensi untuk $\lambda=0.1$ distribusi stasioner dari matrik rantai markov BMS Brasil ini adalah $\pi=(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_7)$ yaitu

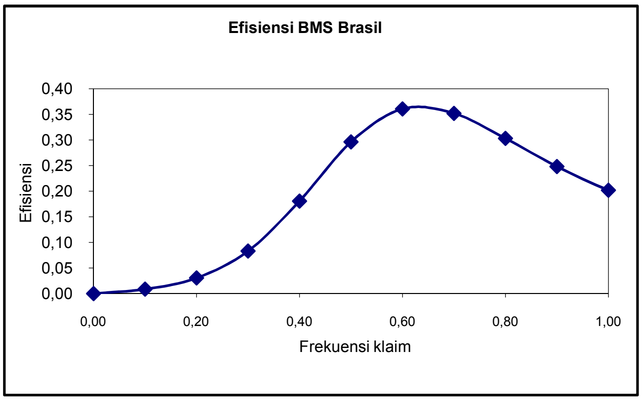
$\pi_1=0.8894840186$, $\pi_2=0.09354785089$, $\pi_3=0.01443796240$, $\pi_4=0.002154210974$ $\pi_5=0.0003209884896$, $\pi_6=0.00004783874242$, $\pi_7=0.000007129849606$

Tabel 3. Sistem Bonus malus negara Brasil

(C_i, r_i) (Tarif grup,Prosentasi)	Tarif Grup Setelah Satu Tahun : Banyaknya Klaim						
	0	1	2	3	4	5	6+
(7 , 100)	6	7	7	7	7	7	7
(6 , 90)	5	7	7	7	7	7	7
(5 , 85)	4	6	7	7	7	7	7
(4 , 80)	3	5	6	7	7	7	7
(3 , 75)	2	4	5	6	7	7	7
(2 , 70)	1	3	4	5	6	7	7
(1, 65)	1	2	3	4	5	6	7

dengan nilai efisiensi untuk $e(\lambda)=0.0127588379$. Untuk frekuensi klaim yang lain dengan $0\leq \lambda \leq 2$ dengan pertambahan 0.1, efisiensi BMS Brasil disajikan dalam plot efisiensi dalam Gambar 1.

Berdasarkan Gambar 1, efisiensi BMS negara Brasil terjadi kenaikan yang tajam mulai dari $\lambda=0$ sampai dengan $\lambda=0.6$. Untuk $\lambda>0.6$ efisiensi mengalami penurunan. Sedangkan efisiensi tertinggi dicapai pada saat $\lambda=0.6$ yaitu 0.3520102559.

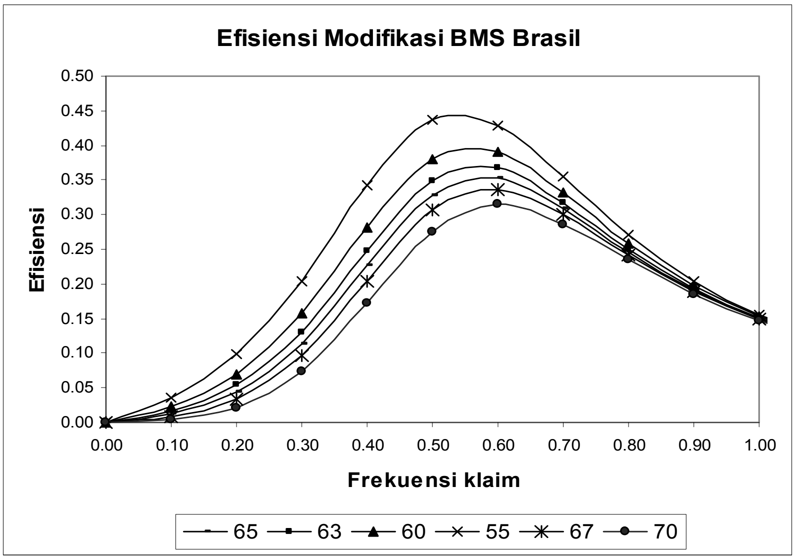


Gambar 1 Plot efisiensi BMS Brasil untuk $0\leq \lambda \leq 2$ dengan pertambahan 0.1

Perubahan nilai premi

Gambar 2. merupakan efisiensi dari BMS Brasil dengan perubahan di premi terendah. Dari keadaan semula BMS Brasil dirubah premi terendah menjadi 55 memberikan nilai efisiensi selalu lebih besar daripada efisiensi BMS Brasil semula (0<λ≤ 2), dengan rata-rata kenaikan efisiensi sebesar 2.8%. Efisiensi tertinggi dengan perubahan premi terendah menjadi 55 ini dicapai ketika λ=0.54 dengan nilai efisiensi 0.4459765266.

Sedangkan dengan menaikkan premi terendah menjadi 70, memberikan nilai efisiensi selalu lebih rendah dari efisiensi BMS Brasil semula (0<λ≤ 2), dengan rata-rata mengalami penurunan sebesar 1.3%. Efisiensi tertinggi dengan perubahan premi terendah menjadi 70 ini dicapai ketika λ=0.6 dengan nilai efisiensi 0.3143469108.



Gambar 2. Efisiensi Modifikasi BMS Brasil pada premi terendah

Selanjutnya dari modifikasi BMS Brasil ini premi terendah akan dirubah menjadi 60, 63 dan 67. Dengan merubah premi terendah menjadi 60 menghasilkan nilai efisiensi BMS Brasil ini selalu lebih tinggi daripada efisiensi BMS Brasil semula (0<λ≤ 2), dengan rata-rata kenaikan sebesar 1.4%. Untuk efisiensi tertinggi dicapai ketika λ=0.6 dengan nilai efisiensi 0.3903370684. Sedangkan perubahan premi bawah 63 efisiensi tertinggi dicapai ketika λ=0.57 dengan nilai efisiensi 0.3710267381. Nilai efisiensi dengan perubahan 60 dan 63 ini selalu berada diantara nilai efisiensi BMS Brasil semula dan BMS Brasil dengan perubahan premi menjadi 55 untuk (0<λ≤ 2).

Untuk perubahan premi terendah dengan 67 menunjukkan bahwa efisiensi BMS Brasil selalu lebih rendah dari pada efisiensi BMS Brasil semula (0<λ≤ 2), dengan rata-rata efisiensi turun sebesar 0.5%. Efisiensi dengan perubahan ini selalu berada diantara efisiensi dari BMS Brasil semula dan BMS Brasil dengan perubahan premi terendah dengan 70 untuk (0<λ≤ 2).

Pada modifikasi premi bawah ini menunjukkan bahwa orang atau pihak yang mengasuransikan kendaraan bermotornya cenderung akan berhati-hati dengan frekuensi klaim λ<0.5.

5. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bagian sebelumnya dapat disimpulkan bahwa tarif grup untuk tahun berikutnya dihitung berdasarkan tarif grup tahun sebelumnya dengan banyaknya klaim yang tercatat. Dengan demikian maka permasalahan sistem bonus-malus (BMS) dapat dipandang sebagai Model Rantai Markov. Model keadaan multiple (model Markov) merupakan suatu model stokastik yang dibangun berdasarkan rantai markov waktu diskrit dengan ruang keadaan hingga.

Dalam menentukan efisiensi dari BMS dengan menggunakan distribusi stasioner dari rantai Markov. Distribusi stasioner ini digunakan untuk menentukan premi stasioner. Untuk dapat meningkatkan efisiensi dari BMS terdapat dua faktor yang sangat penting, yaitu dengan merubah premi sehingga perbandingan premi tertinggi dan paling rendah menjadi lebih besar.

Perubahan premi dibawah akan menghasilkan nilai efisiensi dari BMS yang lebih bervariasi sehingga akan dapat diketahui kecenderungan pihak yang mengasuransikan kendaraan bermotornya berada di frekuensi klaim mana akan berhati-hati (pada umumnya untuk BMS Brasil diawal masuk asuransi)

DAFTAR PUSTAKA

Rolski.T, Schmidli,H., Schmidt, V., and Tugels, J. (1999). *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. John Wiley & Sons, New york.

Michel Denuit & Jan Dhaene. (2000). Bonus-malus scales using exponential loss function. *ASTIN BULLETIN*, pp. 1-17

Lemaire J, (1998) Bonus-Malus System : *The European and Asian Approach to Merit Rating*. *North American Actuarial Journal*, Vol 2, N0. 1, 26-47

Lemaire,J and Hongmin Zi, (1994), A Comparative Analysis of 30 Bonus-Malus System. *ASTIN BULETIN*, Vol.24, No 2, 287-309

Rob Kaas, (2001), *Modern Actuarial Risk Theory*, *Kluwer Academic Publishers,*The Netherlands.

Parzen, E. (1962). *Stochastic Processes*, Holden-Day Inc

Ross, (2000), *Introduction to Probability Models* , Seventh Edition, Academic Press, , London, UK

Shanmugan K. Sam., Breipohl, (1988), *Random Signals*, *Detection Estimation and Data analysis* ,John Wiley & Sons, Inc. (hal 493-503)

Vepsalainen,S., Helsinski, (1972), *Application to a Theory of Bonus System*, *ASTIN BULLETIN*, Vol 6 No. 3, pp. 212-221