UJM 6 (1) 2017
UNNES Journal of Mathematics
http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujm

STRUKTUR DAN SIFAT-SIFAT K-ALJABAR

Deni Nugroho✉, Rahayu Budhiati Veronica, dan Mashuri

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 Lt. 1, Kampus Sekaran Gunungpati, Semarang 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Maret 2017
Disetujui April 2017
Dipublikasikan Mei 2017

Keywords:
Group; homomorphism; K-algebra; K-subalgebra; K-homomorphism.

Abstrak

Konsep yang diterapkan dalam K-aljabar hampir sama dengan konsep dalam grup. Jika dalam grup terdapat subgrup dan homomorfisma grup, maka dalam K-aljabar terdapat K-subaljabar dan K-homomorfisma. Penelitian ini membahas mengenai struktur dan sifat-sifat yang terkait dengan K-aljabar, K-subaljabar, dan K-homomorfisma. Tujuan penelitian ini adalah menjelaskan struktur dan sifat-sifat dari kajian K-aljabar, K-subaljabar, dan K-homomorfisma. Penelitian ini menggunakan metode kajian pustaka, dengan cara mengumpulkan berbagai sumber dan teorema-teorema yang mendukung pada kajian K-aljabar.

Abstract

The concept which is applied in the K-algebra is similar to the concept of group. If in group there is a subgroup and group homomorphism, then in K-algebra there is K-subalgebra and K-homomorphism. This study discusses the structure and properties associated with the K-algebra, K-subalgebra, and K-homomorphism. The purpose of this study is to explain the structure and properties of the study of K-algebra, K-subalgebra, and K-homomorphism. This study used literature review, by collecting a variety of sources and theorems that support the study of K-algebra.

How to Cite

Nugroho D., Veronica R.B, & Mashuri. (2017). Struktur dan Sifat-sifat K-Aljabar. *Unnes Journal of Mathematics*, 6(1): 82-91.

✉Alamat korespondensi:
E-mail: noedenny72@gmail.com

P – ISSN 2259-6943
e – ISSN 2342-6944

PENDAHULUAN

Aljabar abstrak adalah bidang matematika yang mempelajari struktur aljabar, seperti grup, ring, medan, modul, ruang vektor, dan aljabar medan. Frasa aljabar abstrak diciptakan pada awal abad ke-20 untuk membedakannya dengan bidang yang biasa disebut sebagai aljabar, yaitu studi aturan manipulasi rumus dan ekspresi aljabar yang melibatkan variabel dan bilangan riil atau kompleks, yang saat ini lebih sering disebut sebagai aljabar elementer.

Teori grup merupakan salah satu bidang kajian aljabar abstrak yang mempelajari struktur himpunan. Sebuah himpunan dengan satu operasi biner dapat dinyatakan sebagai grup jika operasi biner pada himpunan tersebut memenuhi sifat assosiatif, adanya elemen identitas, dan setiap anggota grup tersebut mempunyai invers (Milne, 2013)

Grup digunakan dalam dunia matematika dan ilmu pengetahuan alam, Dalam bidang kimia, grup dapat digunakakn untuk mengklasifikasikan simetri molekul serta mengidentifikasi titik molekul tersebut. Grup juga diterapkan dalam bidang kriptografi yaitu untuk sistem kriptografi kunci publik.

Misalkan $G =< G,*>$ suatu grup terhadap operasi biner $*$. Jika e adalah elemen identitas pada G dan untuk setiap x, y di G didefinisikan operasi $x \odot y = x * y^{-1}$ sedemikian sehingga operasi tersebut merupakan operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu maka akan membentuk struktur aljabar yang dinamakan K-aljabar (Dar & Akram, 2006).

K-aljabar dibagi menjadi dua kelas berdasarkan grup pembangunnya, yaitu Q-aljabar apabila grup yang membangun K-aljabar adalah grup yang komutatif dan B-Aljabar apabila grup yang membangun K-aljabar adalah grup yang tidak komutatif. (Dar & Akram, 2006).

Hal yang menarik dalam K-aljabar adalah konsepnya yang hampir sama dengan konsep grup. Jika dalam grup terdapat konsep subgrup dan homomorfisma grup, maka dalam K-aljabar juga terdapat K-subaljabar dan K-homomorfisma. Oleh karena itu, dalam pengembangan pembahasannya, penulis tertarik untuk membahas dan mengkaji kembali strukur dan sifat-sifat yang terkait dengan K-aljabar.

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah 1) Bagaimana struktur dan sifat-sifat terkait dengan K-aljabar? 2) Bagaimana struktur dan sifat-sifat terkait dengan K-subaljabar? 3) Bagaimana struktur dan sifat-sifat terkait homomorfisma K-aljabar?

Tujuan dalam penelitian ini adalah menjelaskan mengenai struktur dan sifat-sifat yang terkait dengan K-aljabar, K-subaljabar, dan homomorfisma K-aljabar.

Definisi 1. Misalkan A dan B himpunan tak kosong, $f: A \to B$ disebut pemetaan (fungsi) jika dan hanya jika untuk setiap elemen di A mempunyai pasangan di B, dan untuk setiap dua elemen sama dari A mempunyai pasangan yang sama di B. Secara matematis dapat ditulis:

$f: A \to B$ fungsi jika dan hanya jika

1. $\forall x \in A$ berlaku $f(x) \in B$
2. $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 = x_2$, berlaku $f(x_1) = f(x_2)$

(Judson, 2013)

Definisi 2. Misalkan $f: A \to B$ pemetaan:

1. Pemetaan f disebut injektif (satu-satu) jika dan hanya jika:
   $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$, berlaku $f(x_1) \neq f(x_2)$
   atau
   $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2)$, berlaku $x_1 = x_2$
2. Pemetaan f disebut surjektif (pada) jika:
   $\forall y \in B\ \exists x \in A \ni f(x) = y$
3. Pemetaan f disebut bijektif (korespondensi satu-satu) jika f injektif dan surjektif.
4. Permutasi adalah pemetaan bijektif $A \to A$.

(Anton, 2000)

Definisi 3. Operasi biner $*$ pada himpunan tak kosong A adalah pemetaan dari setiap pasangan berurutan (a, b) di $A \times A$ dengan tepat satu elemen $a * b$ di A (Setiawan, 2011).

Sifat-sifat operasi biner

Misalkan $*$ operasi biner pada himpunan tak kosong A

1. Operasi $*$ dikatakan bersifat komutatif jika
   $a * b = b * a, \forall a, b \in A$
2. Operasi biner $*$ dikatakan bersifat assosiatif jika
   $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in A$
3. Elemen $e \in A$ dikatakan elemen identitas untuk $*$ pada A jika
   $e * a = a * e = a, \forall a \in A$
4. Elemen $a \in A$ dikatakan mempunyai invers b untuk $*$ pada A jika
   $a * b = b * a = e$, b disebut invers untuk a, notasi $b = a^{-1}$.

(Setiawan, 2011)

Definisi 4. Suatu grup (*group*) $< G,* >$ terdiri dari himpunan tak kosong G bersama dengan operasi biner $*$ yang didefinisikan pada G dan memenuhi:

1. Operasi biner $*$ bersifat assosiatif
2. Terdapat elemen identitas $e \in G$ untuk $*$ pada G
3. $\forall a \in G\ \exists a^{-1} \in G \ni a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, (setiap elemen di G mempunyai invers)

(Milne, 2013)

Definisi 5. Order dari grup G adalah banyaknya elemen grup G, dinyatakan dengan $|G|$ (Setiawan, 2011)

Definisi 6. Grup G dikatakan abelian jika operasi biner $*$ bersifat komutatif (Fraleigh, 1989)

Teorema 1. Misalkan $< G,* >$ grup, dan $a, b, c \in G$:

1. Jika $a * b = a * c$ maka $b = c$ (hukum kanselasi kiri).
2. Jika $b * a = c * a$ maka $b = c$ (hukum kanselasi kanan).

(Fraleigh, 1989)

Bukti:

Hukum kanselasi kiri

Diberikan $a * b = a * c$.

Karena G grup dan $a \in G$ maka $\exists a^{-1} \ni a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ dengan e identitas.

Akibatnya

$a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$

Dengan menggunakan hukum assosiatif diperoleh

$(a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c$

Dengan hukum invers diperoleh

$e * b = e * c$

Dengan hukum identitas diperoleh

$b = c$

Analog untuk hukum kanselasi kanan.

Teorema 2. Misalkan G grup

1. Elemen identitas pada G adalah tunggal.
2. Invers elemen pada G adalah tunggal.

(Fraleigh, 1989)

Bukti (1):

Misalkan e_1 dan e_2 elemen identitas untuk $*$ pada G

Artinya

$\forall x \in G$ berlaku $x * e_1 = e_1 * x = x$

$\forall y \in G$ berlaku $y * e_2 = e_2 * y = y$

Karena $e_1 \in G$ berlaku $e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_1$

Karena $e_2 \in G$ berlaku $e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_2$

Akibatnya $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$

Jadi $e_1 = e_2$.

Bukti (2):

Misalkan a dan b merupakan invers dari x di G

Artinya

$a * x = x * a = e$

$b * x = x * b = e$

Diperoleh

$e = e$

$a * x = b * x$

Dengan menggunakan hukum kanselasi kanan diperoleh

$a = b$.

Definisi 7. Misalkan G grup, $S \subseteq G, S \neq \emptyset$ dan operasi di S bersifat tertutup. S dikatakan bersifat tertutup terhadap operasi biner pada G jika $\forall a, b \in S$, berlaku $a * b \in S$. Himpunan S disebut subgrup G jika S merupakan grup terhadap operasi biner pada G (Block, 2009)

Teorema 3. Misalkan G grup dan $S \subseteq G, S \neq \emptyset$. S subgrup G jika dan hanya jika:

1. $e \in S$
2. S tertutup terhadap operasi biner pada G
3. Untuk sebarang $x \in S$, inversnya $x^{-1} \in S$.

(Block, 2009)

Bukti:

$(\Rightarrow)$

1. Dengan mengingat definisi S subgrup maka S merupakan grup sehingga identitasnya $e' \in S$.
   Ditunjukkan bahwa $e' = e$ yaitu elemen identitas dalam G.
   Karena e' elemen identitas dalam S maka $e'e' = e'$.
   Dengan menggunakan sifat identitas dari e maka $e' = e'e$ sehingga $e'e' = e'e$.
   Dengan hukum kanselasi didapat $e' = e$.
2. Karena S grup maka S tertutup pada operasi biner dalam G.
3. Misalkan x sebarabg elemen S.
   Karena S grup maka x mempunyai invers x' dalam S.
   Dengan mengingat ketunggalan dari suatu invers maka $x' = x^{-1}$ yaitu invers dalam G.

$(\Leftarrow)$

Syarat 1 sampai 3 merupakan tiga syarat supaya suatu himpunan merupakan grup.

Syarat lain yang harus dipenuhi adalah hukum assosiatif.

Karena $(ab)c = a(bc)$ untuk semua elemen dalam G maka tentu saja berlaku untuk semua elemen dalam $S \subseteq G$.

Definisi 8. Misalkan $< G,*>$ dan $< H,\cdot>$ grup. Pemetaan $f: G \to H$ dinamakan homomorfisma grup jika f mengawetkan operasi, yaitu $f(x * y) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in G$ (Setiawan, 2011)

Teorema 4. Misalkan $\varphi: G \to G'$ suatu homomorfisma grup, maka:

1. $\varphi(e) = e'$, dengan e dan e' berturut-turut menyatakan elemen identitas dari grup G dan G'.
2. $\varphi(a^{-1}) = \left(\varphi(a)\right)^{-1}, \forall a \in G$.

(Setiawan, 2011)

Bukti:

1. Diketahui $ee = e$. Jadi $\varphi(e)\varphi(e) = \varphi(e)$
   Berakibat $\varphi(e) = e'$
2. $\forall a \in G$ berlaku $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.
   Diketahui
   $\varphi(a)\varphi(a^{-1}) = \varphi(a^{-1})\varphi(a) = \varphi(e) = e'$.
   Karena invers dari $\varphi(a)$ di G tunggal.
   Maka $\varphi(a^{-1}) = \left(\varphi(a)\right)^{-1}$.

Masalah yang akan dikaji dalam pnelitian ini adalah bagaimana struktur dan sifat-sifat terkait K-aljabar, K-subaljabar, dan homomorfisme K-aljabar.

METODE

Penelitian ini menggunakan metode penelitian kajian pustaka. Kajian pustaka merupakan metode penelitian yang mengupas berbagai teori yang berhubungan dengan permasalahan dalam penelitian. Oleh karena itu, kajian pustaka digunakan sebagai dasar pemecahan masalah yang penulis angkat dalam penulisan skripsi ini. Langkah-langkah dalam metode ini adalah 1) Kajian pustaka. 2) Perumusan masalah. 3) Pemecahan masalah. 4) Penarikan Kesimpulan.

Dalam tahap kajian pustaka dilakukan pengumpulan referensi, dan pengupasan teori yang dapat dijadikan sebagai suatu masalah.

Pemilihan dan perumusan masalah diperlukan untuk membatasi permasalahan sehingga diperoleh bahan kajian yang jelas. Sehingga akan lebih mudah untuk menentukan langkah dalam memecahkan masalah tersebut.

Dalam proses memperoleh jawaban dari masalah yang diangkat dalam penelitian ini dilakukan langkah-langkah pemecahan masalah dengan menyelidiki sifat-sifat yang terkait pada struktur K-aljabar, kemudian membuktikan sifat-sifat tersebut menggunakan kajian teori yang telah disajikan untuk membantu dalam pemecahan masalah tersebut.

PEMBAHASAN

Definisi 9. Misalkan $< G,*>$ suatu grup dan pada G didefinisikan operasi $\odot$ sedemikian sehingga $\forall x, y \in G, x \odot y = x * y^{-1}$ maka akan membentuk struktur aljabar baru yaitu $< G,*,\odot\, e >$. Suatu $< G,*,\odot, e >$ dinamakan K-aljabar, jika G adalah grup dengan order lebih dari 2 dan $\forall x, y, z \in G$ berlaku:

(C1) $(x \odot y) \odot (x \odot z) = \Big(x \odot \big((e \odot z) \odot (e \odot y)\big)\Big) \odot x$

(C2) $x \odot (x \odot y) = \big(x \odot (e \odot y)\big) \odot x$

(C3) $x \odot x = e$

(C4) $x \odot e = x$

(C5) $e \odot x = x^{-1}$

(Dar & Akram, 2006)

Contoh 1. Misalkan $< \mathbb{Z}, +>$ adalah grup dengan elemen identitas $e = 0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada $\mathbb{Z}$, dengan $a \odot b = a + (-b)$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan apakah $< \mathbb{Z}, +,\odot\, ,0 >$ merupakan K-aljabar.

Penyelesaian:

Jelas $|\mathbb{Z}| \approx \infty$, jadi $\mathbb{Z}$ adalah grup dengan order lebih 2.

Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$,

(C1) Akan ditunjukkan bahwa

$$(a \odot b) \odot (a \odot c) = \Big(a \odot \big((e \odot c) \odot (e \odot b)\big)\Big) \odot a$$

$$\begin{aligned} \text{Ruas kiri} &= (a \odot b) \odot (a \odot c) \\ &= \big(a + (-b)\big) \odot \big(a + (-c)\big) \\ &= (a - b) + \big(-(a - c)\big) \\ &= (a - b) + (c - a) \\ &= c - b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ruas kanan} &= \Big(a \odot \big((e \odot c) \odot (e \odot b)\big)\Big) \odot a \\ &= \Big(a \odot \big((-c) \odot (-b)\big)\Big) \odot a \\ &= \Big(a \odot \big((-c) + b\big)\Big) \odot a \\ &= (a + \big((-b) + c\big) + (-a) \\ &= (a - b) + (c - a) \\ &= c - b \end{aligned}$$

Karena $(a \odot b) \odot (a \odot c) = c - b$ dan

$\left(a \odot ((e \odot c) \odot (e \odot b))\right) \odot a = c - b$
maka
$(a \odot b) \odot (a \odot c) = \left(a \odot ((e \odot c) \odot (e \odot b))\right) \odot a.$

(C2) Akan ditunjukkan bahwa
$a \odot (a \odot b) = \left(a \odot (e \odot b)\right) \odot a.$

Ruas kiri $= a \odot (a \odot b)$
$= a \odot (a - b)$
$= a + (b - a)$
$= b$

Ruas kanan $= \left(a \odot (e \odot b)\right) \odot a$
$= \left(a \odot (-b)\right) \odot a$
$= (a + b) + (-a)$
$= b$

Karena $a \odot (a \odot b) = b$ dan $\left(a \odot (e \odot b)\right) \odot a = b$ maka
$a \odot (a \odot b) = \left(a \odot (e \odot b)\right) \odot a.$

(C3) $a \odot a = a + (-a) = 0 = e$
(C4) $a \odot e = a \odot 0 = a + 0 = a$
(C5) $e \odot a = 0 \odot a = 0 + (-a) = -a$

Karena kelima aksioma dari K-aljabar terpenuhi, maka $< \mathbb{Z}, +, \odot, 0 >$ merupakan suatu K-aljabar.

Jika $< G, * >$ merupakan grup komutatif, maka aksioma 1 dan 2 menjadi:
(C1) $(x \odot y) \odot (x \odot z) = z \odot y$
(C2) $x \odot (x \odot y) = y$

Contoh 2. Berdasarkan contoh 1 didapat $< \mathbb{Z}, +, \odot, 0 >$ merupakan K-aljabar, karena $< \mathbb{Z}, + >$ merupakan grup komutatif, akan ditunjukkan apakah C1 dan C2 terpenuhi.

Penyelesaian:
Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{Z}$

(C1) $(x \odot y) \odot (x \odot z) = \left(x + (-y)\right) \odot \left(x + (-z)\right)$
$= (x - y) + \left(-(x - z)\right)$
$= (x - y) + (z - x)$
$= (x - x) + (z - y)$
$= z + (-y)$
$= z \odot y$

(C2) $x \odot (x \odot y) = x \odot \left(x + (-y)\right)$
$= x + \left(-(x - y)\right)$
$= x + (y - x)$
$= y$

Jadi, C1 dan C2 terpenuhi untuk grup komutatif $< \mathbb{Z}, + >$.

Teorema 5.
1. Hukum kanselasi kiri: jika $a \odot x = a \odot y$ maka $x = y$
2. Hukum kanselasi kanan: jika $x \odot a = y \odot a$ maka $x = y$

Bukti:
1. Diberikan $a \odot x = a \odot y$.
   $a \odot x = a \odot y$
   $\Leftrightarrow a * x^{-1} = a * y^{-1}$
   $\Leftrightarrow x^{-1} = y^{-1}$
   $\Leftrightarrow x = y$
2. Diberikan $x \odot a = y \odot a$.
   $x \odot a = y \odot a$
   $\Leftrightarrow x * a^{-1} = y * a^{-1}$
   $\Leftrightarrow x = y$

Selanjutnya akan ditinjau sifat dari K-aljabar $< G, *, \odot, e >$, jika G merupakan grup komutatif.

Teorema 6. Misalkan $< G, * >$ grup komutatif. Jika $< G, *, \odot, e >$ adalah suatu K-aljabar, maka $\forall x, y, z \in G$ berlaku:
1. $(e \odot x) \odot (e \odot y) = y \odot x = e \odot (x \odot y)$
2. $(x \odot z) \odot (y \odot z) = x \odot y$
3. $e \odot (e \odot x) = x$
4. $x \odot (e \odot y) = y \odot (e \odot x)$

Bukti:
Ambil sebarang $x, y, z \in G$

1. $(e \odot x) \odot (e \odot y) = x^{-1} \odot y^{-1}$
   $= x^{-1} * y$
   $= y * x^{-1}$
   $= y \odot x$

   selanjutnya
   $(e \odot x) \odot (e \odot y)$
   $= \left(e \odot ((e \odot y) \odot (e \odot x))\right) \odot e$
   $= \left(e \odot (y^{-1} \odot x^{-1})\right) \odot e$
   $= e \odot (y^{-1} \odot x^{-1})$
   $= e \odot (y^{-1} * x)$
   $= e \odot (x * y^{-1})$
   $= e \odot (x \odot y)$

   Karena $(e \odot x) \odot (e \odot y) = y \odot x$ dan $(e \odot x) \odot (e \odot y) = e \odot (x \odot y)$ maka $y \odot x = e \odot (x \odot y)$.

2. $(x \odot z) \odot (y \odot z) = (x \odot z) * (y \odot z)^{-1}$
   $= (x * z^{-1}) * (y * z^{-1})^{-1}$
   $= (x * z^{-1}) * (z * y^{-1})$

$$= \left(x * (z^{-1} * z)\right) * y^{-1}$$
$$= x * y^{-1}$$
$$= x \odot y$$

3. $e \odot (e \odot x) = e \odot x^{-1}$
$$= e * x$$
$$= x$$

4. $x \odot (e \odot y) = x \odot y^{-1}$
$$= x * y$$
$$= y * x$$
$$= y \odot x^{-1}$$
$$= y \odot (e \odot x)$$

Definisi 10. Suatu K-aljabar $< G,*,\odot\, e >$ dikatakan komutatif jika $\forall x, g \in G$ berlaku $g \odot (e \odot x) = x \odot (e \odot g)$ (Dar & Akram, 2010)

Contoh 3. Berdasarkan contoh 1 diperoleh $< \mathbb{Z}, +, \odot\, 0 >$ merupakan suatu K-aljabar. Akan ditunjukkan apakah $< \mathbb{Z}, +, \odot, 0 >$ merupakan K-aljabar komutatif.

Bukti:

Ambil sebarang $g, x \in \mathbb{Z}$, maka

$$g \odot (e \odot x) = g \odot \left(0 + (-x)\right)$$
$$= g \odot (-x)$$
$$= g + \left(-(-x)\right)$$
$$= g + x$$
$$= x + g$$
$$= x + \left(-(-g)\right)$$
$$= x \odot (-g)$$
$$= x \odot \left(0 + (-g)\right)$$
$$= x \odot (e \odot g)$$

Jadi $< \mathbb{Z}, +, \odot, 0 >$ merupakan K-aljabar komutatif.

Teorema 7. Jika G merupakan K-aljabar komutatif, maka $\forall x, y, z \in G$ berlaku:

1. $(x \odot y) \odot z = (x \odot z) \odot y$
2. $\left(x \odot (x \odot y)\right) \odot y = e$
3. $e \odot (x \odot y) = (e \odot x) \odot (e \odot y)$

Bukti:

1. $(x \odot y) \odot z = (x * y^{-1}) * z^{-1}$
$$= x * (y^{-1} * z^{-1})$$
$$= x \odot (z * y)$$
$$= x \odot (z \odot y^{-1})$$
$$= x \odot \left(z \odot (e \odot y)\right)$$
$$= x \odot \left(y \odot (e \odot z)\right)$$
$$= x \odot (y \odot z^{-1})$$
$$= x \odot (y * z)$$
$$= x * (z^{-1} * y^{-1})$$
$$= (x * z^{-1}) * y^{-1}$$
$$= (x \odot z) \odot y$$

2. $\left(x \odot (x \odot y)\right) \odot y = \left(x \odot (x * y^{-1})\right) \odot y$
$$= \left(x * (y * x^{-1})\right) * y^{-1}$$
$$= (x * y) * (x^{-1} * y^{-1})$$
$$= (x * y) \odot (y * x)$$
$$= (x * y) \odot (y \odot x^{-1})$$
$$= (x * y) \odot \left(y \odot (e \odot x)\right)$$
$$= (x * y) \odot \left(x \odot (e \odot y)\right)$$
$$= (x \odot y^{-1}) \odot (x \odot y^{-1})$$
$$= e$$

3. $e \odot (x \odot y) = e \odot (x * y^{-1})$
$$= y * x^{-1}$$
$$= y \odot x$$
$$= y \odot (e \odot x^{-1})$$
$$= x^{-1} \odot (e \odot y)$$
$$= (e \odot x) \odot (e \odot y)$$

Selanjutnya akan ditinjau sifat dari K-aljabar $< G,*,\odot, e >$, jika G bukan grup komutatif.

Teorema 8. Misalkan $< G,*,\odot\, e >$ suatu K-aljabar. Jika $< G,* >$ tidak komutatif, maka $\forall x, y, z, u, v \in G$ berlaku:

1. $(x \odot y) \odot (u \odot v) = \left(x \odot (e \odot v) \odot (e \odot y)\right) \odot u$
2. $(x \odot y) \odot z = x \odot \left(z \odot (e \odot y)\right)$
3. $e \odot (e \odot x) = x$
4. $e \odot (x \odot y) = y \odot x$
5. $x \odot y = e \Leftrightarrow x = y$

Bukti:

Ambil sebarang $x, y, z, u, v \in G$:

1. $(x \odot y) \odot (u \odot v) = (x * y^{-1}) \odot (u * v^{-1})$
$$= (x * y^{-1}) * (u * v^{-1})^{-1}$$
$$= (x * y^{-1}) * (v * u^{-1})$$
$$= (x * y^{-1} * v) * u^{-1}$$
$$= (x * (v^{-1} * y)^{-1}) * u^{-1}$$
$$= \left(x \odot (v^{-1} \odot y^{-1})\right) \odot u$$
$$= \left(x \odot (e \odot v) \odot (e \odot y)\right) \odot u$$

2. $(x \odot y) \odot z = (x * y^{-1}) * z^{-1}$
$$= x * (y^{-1} * z^{-1})$$
$$= x * (z * y)^{-1}$$
$$= x \odot (z \odot y^{-1})$$
$$= x \odot \left(z \odot (e \odot y)\right)$$

3. $e \odot (e \odot x) = e \odot x^{-1}$
$$= x$$

4. $e \odot (x \odot y) = (x \odot y)^{-1}$
$= (x * y^{-1})^{-1}$
$= y * x^{-1}$
$= y \odot x$
5. $(\Rightarrow)$
Diketahui $x \odot y = e$
Akan dibuktikan $x = y$.
Ambil sebarang $x, y \in G$ dan berlaku $x \odot y = e$. Karena $y \in G$ dan $y^{-1} \in G$ maka
$(x \odot y) \odot y^{-1} = e \odot y^{-1}$
$\Leftrightarrow (x * y^{-1}) * y = e * y$
$\Leftrightarrow x * (y^{-1} * y) = e * y$
$\Leftrightarrow x * e = e * y$
$\Leftrightarrow x = y$

$(\Leftarrow)$
Diketahui $x = y$, akan dibuktikan bahwa $x \odot y = e$.
Ambil sebarang $x, y \in G$, dengan $x = y$, maka
$x \odot y = y \odot y = e$

Jadi terbukti bahwa jika $< G,* >$ tidak komutatif, maka $\forall x, y, z, u, v \in G$ berlaku aksioma 1 sampai 5.

Definisi 11. Suatu himpunan bagian tak kosong H dari K-aljabar $< G,*,\odot,e >$ disebut K-subaljabar jika:
1. $e \in H$
2. $h_1 \odot h_2 \in H, \forall h_1, h_2 \in H$

(Handam, 2012)

Berdasarkan definisi tersebut, dapat ditunjukkan bahwa H juga merupakan K-aljabar, karena H memenuhi aksioma-aksioma dari K-aljabar.
Ambil sebarang $x, y, z \in H$.
(C1) Akan ditunjukkan bahwa
$(x \odot y) \odot (x \odot z)$
$= \big(x \odot ((e \odot z) \odot (e \odot y))\big) \odot x$
$(x \odot y) \odot (x \odot z) = (x * y^{-1}) \odot (x * z^{-1})$
$= (x * y^{-1}) * (z * x^{-1})$
$= \big(x * (y^{-1} * z)\big) * x^{-1}$
$= \big(x \odot (z^{-1} * y)\big) * x^{-1}$
$= \big(x \odot ((e \odot z) \odot y^{-1})\big) * x^{-1}$
$= \big(x \odot ((e \odot z) \odot (e \odot y))\big) \odot x$

Jadi
$(x \odot y) \odot (x \odot z) = \big(x \odot ((e \odot z) \odot (e \odot y))\big) \odot x.$
(C2) Akan ditunjukkan bahwa
$x \odot (x \odot y) = \big(x \odot (e \odot y)\big) \odot x$
$x \odot (x \odot y) = (x \odot (x * y^{-1})$
$= (x * (y * x^{-1})$
$= (x * y) \odot x$
$= (x \odot y^{-1}) \odot x$
$= \big(x \odot (e \odot y)\big) \odot x$
Jadi $x \odot (x \odot y) = \big(x \odot (e \odot y)\big) \odot x$.
(C3) $x \odot x = x * x^{-1} = e \in H$.
(C4) $x \odot e = x * e = x \in H$.
(C5) $e \odot x = e * x^{-1} = x^{-1} \in H$.
Jadi H juga merupakan K-aljabar.

Contoh 4. $S_3 = \{e, a, b, x, y, z\}$, dengan $e = (1)$, $a = (1\ 2\ 3)$, $b = (1\ 3\ 2)$, $x = (1\ 2)$, $y = (1\ 3), z = (2\ 3)$ terhadap operasi komposisi fungsi $\circ$ membentuk grup. Operasi $\circ$ pada S_3 didefinisikan: $f \circ g$ dengan f dilanjutkan g. Berikut operasi $\circ$ pada S_3:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$e \circ x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = x$$

$$a \circ y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = x$$

Secara lengkap dapat dilihat pada tabel 1.

Tabel 1 Operasi $\circ$ pada S_3

$\circ$	e	x	y	z	a	b
e	e	x	y	z	a	b
x	x	e	a	b	y	z
y	y	b	e	a	z	x
z	z	a	b	e	x	y
a	a	z	x	y	b	e
b	b	y	z	x	e	a

Jika pada S_3 dilengkapi dengan operasi $\odot$, seperti diberikan tabel 2.

Tabel 2 Operasi $\odot$ pada S_3

$\odot$	e	x	y	z	a	b
e	e	x	y	z	b	a
x	x	e	a	b	z	y
y	y	b	e	a	x	z
z	z	a	b	e	y	x
a	a	z	x	y	e	b
b	b	y	z	x	a	e

Maka $< S_3, \circ, \odot, e >$ membentuk K-aljabar.

Bukti:

$e, x, y, z, a, b \in S_3$

(C1) $(x \odot y) \odot (x \odot z) = a \odot b = b$

selanjutnya

$$\big(x \odot ((e \odot z) \odot (e \odot y))\big) \odot x$$
$$= \big(x \odot (z \odot y)\big) \odot x$$
$$= (x \odot b) \odot x$$
$$= y \odot x$$
$$= b$$

Diperoleh

$$(x \odot y) \odot (z \odot z) = \big(x \odot ((e \odot z) \odot (e \odot y))\big) \odot x$$

(C2) $x \odot (x \odot y) = x \odot a = z$

selanjutnya

$$\big(x \odot (e \odot y)\big) \odot x = (x \odot y) \odot x$$
$$= a \odot x = z$$

Diperoleh

$$x \odot (x \odot y) = \big(x \odot (e \odot y)\big) \odot x$$

(C3) $x \odot x = e$

(C4) $x \odot e = x$

(C5) $e \odot x = x$

Selanjutnya ditinjau himpunan $A_3 = \{e, a, b\}$ yang merupakan himpunan bagian dari S_3. Operasi $\odot$ pada A_3 diberikan oleh tabel 3.

Tabel 3. Operasi $\odot$ pada A_3

$\odot$	e	a	b
e	e	b	a
a	a	e	b
b	b	a	e

Sehingga dipenuhi:

1. $A_3 = \{e, a, b\}$ maka $e \in A_3$
2. Dari tabel terlihat bahwa $\forall h_1, h_2 \in A_3$ berlaku $h_1 \odot h_2 \in A_3$.

Maka $< A_3, \circ, \odot, e >$ merupakan K-subaljabar dari $< S_3, \circ, \odot, e >$.

Selanjutnya akan ditinjau keterkaitan antara subgrup dan K-subaljabar.

Teorema 9. Misalkan $< G, *, \odot, e >$ adalah suatu K-aljabar dan $g \in G$. Jika H suatu subgrup dari G. Maka $H_{g^2} = \{g \odot (g \odot x) | x \in H\}$ adalah suatu K-subaljabar dari $< G, *, \odot, e >$.

Bukti:

1. Akan ditunjukkan $e \in H_{g^2}$. e elemen identitas dari G, maka $e \in H$ dan berlaku
$$e = e * e = (g * g^{-1}) * e$$
$$= g * (g^{-1} * e)$$
$$= g * (e * g)^{-1}$$
$$= g \odot (e * g)$$
$$= g \odot (g * e)$$
$$= g \odot (g \odot e) \in H_{g^2}$$
2. Ambil sebarang $u, v \in H_{g^2}$.
Dapat dituliskan
$u = g \odot (g \odot x)$ dan $v = g \odot (g \odot y)$
untuk suatu $x, y \in H$, maka:
$$u \odot v = \big(g \odot (g \odot x)\big) \odot \big(g \odot (g \odot y)\big)$$
$$= \Big(g \odot \big((e \odot (g \odot y)) \odot (e \odot (g \odot x))\big)\Big) \odot g$$
$$= \big(g \odot ((y \odot g) \odot (x \odot g))\big) \odot g$$
$$= \big(g \odot (y * g^{-1} * g * x^{-1})\big) \odot g$$
$$= \big(g \odot (y * x^{-1})\big) \odot g$$
$$= \big(g \odot (y \odot x)\big) \odot g$$
$$= \big(g \odot (e \odot (x \odot y))\big) \odot g$$
$$= g \odot \big(g \odot (x \odot y)\big) \in H_{g^2}$$

Jadi terbukti bahwa $H_{g^2} = \{g \odot (g \odot x) | x \in H\}$ adalah suatu K-subaljabar dari $< G, *, \odot, e >$.

Definisi 12. Misalkan A_1 dan A_2 merupakan K-aljabar. Suatu pemetaan φ dari A_1 ke a_2 dinotasikan dengan $\varphi: A_1 \to A_2$, disebut K-homomorfisme jika $\forall x_1, y_1 \in A_1$ berlaku $\varphi(x_1) \odot \varphi(y_1)$ (Dar & Akram, 2010)

Contoh 5. Missal $< G, *, \odot, e >$ suatu K-aljabar komutatif. Dibentuk himpunan $H = \{g \odot (g \odot x) | x \in G\}$, yang merupakan K-subaljabar dari G. Selanjutnya didefinisikan pemetan $\varphi: G \to H$, dengan $\varphi(x) = g \odot (g \odot x), \forall x \in G$. Akan ditunjukkan bahwa $\varphi: G \to H$ merupakan suatu K-homomorfisme.

Penyelesaian:

Ambil sebarang $x, y \in G$, maka $(x \odot y) \in G$ dan

$$\begin{aligned}\varphi(x \odot y) &= g \odot \big(g \odot (x \odot y)\big)\\ &= \Big(g \odot \big(e \odot (x \odot y)\big)\Big) \odot g\\ &= \Big(g \odot \big((e \odot y) \odot (e \odot x)\big)\Big) \odot g\\ &= \big(g \odot (g \odot x)\big) \odot \big(g \odot (g \odot y)\big)\\ &= \varphi\,(x) \odot \varphi(y)\end{aligned}$$

Karena $\varphi(x \odot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$, maka $\varphi: G \to H$ merupakan suatu K-homomorfisma.

Teorema 10. Misalkan $A_1 =< G_1,*,\odot, e_1 >$ dan $A_2 =< G_2,*,\odot, e_2 >$, A_1 K-aljabar komutatif, serta $\varphi: A_1 \to A_2$suatu K-homomorfisme, maka $\forall x_1, x_2 \in A_1$ berlaku:

1. $\varphi(e_1) = e_2$
2. $\varphi(e_1 \odot x_1) = e_2 \odot \varphi(x_1)$
3. $\varphi(x_1 \odot x_2) = e_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$
4. Jika H_1 adalah K-subaljabar dari A_1 maka $\varphi(H_1)$ adalah K-subaljabar dari A_2.
5. Jika H_2 adalah K-subaljabar dari A_2, maka $\varphi^{-1}(H_2)$ adalah K-subaljabar dari A_1.

Bukti:

1. Akan ditunjukkan $\varphi(e_1) = e_2$.
   Ambil sebarang $x \in K_1$, maka
   $x \odot e_1 = x$ dan $\varphi(x \odot e_1) = \varphi(x)$ ...(i)
   Karena $\varphi: K_1 \to K_2$ suatu K-homomorfisme, maka persamaan (i) menjadi
   $\varphi(x) \odot \varphi(e_1) = \varphi(x)$...(ii)
   Selanjtnya karena $\varphi(x) \in (A_2)$ dan $e_2 \in A_2$, maka $\varphi(x) = \varphi(x) \odot e_2$...(iii)
   Sehingga dari (ii) dan (iii) diperoleh
   $\varphi(x) \odot \varphi(e_1) = \varphi(x) \odot e_2$ sehingga diperoleh $\varphi(e_1) = e_2$.
2. Ambil sebarang $x_1 \in A_1$
   Maka $e_1 \odot x_1 \in A_1$
   Karena φ K-homomorfisme, maka
   $\varphi(e_1 \odot x_1) = \varphi(e_1) \odot \varphi(x_1)$
   Berdasarkan teorema 10.1 diperoleh
   $\varphi(e_1 \odot x_1) = e_2 \odot \varphi(x_1)$
3. $(\Rightarrow)$
   Diketahui $\varphi(x_1 \odot x_2) = e_2$.
   Akan ditunjukkan $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$
   Ambil sebarang $x_1, x_2 \in A_1$.
   Karena $x_1, x_2 \in A_1$maka
   $x_1 \odot x_2 \in A_1$ dan berlaku
   $\varphi(x_1 \odot x_2) = e_2$
   $\Leftrightarrow \varphi(x_1 \odot x_2) \odot \varphi(x_2^{-1}) = e_2 \odot \varphi(x_2^{-1})$
   $\Leftrightarrow \varphi\big((x_1 \odot x_2) \odot (x_2^{-1})\big) = e_2 \odot \varphi(x_2^{-1})$
   $\Leftrightarrow \varphi\big((x_1 * x_2^{-1}) * x_2\big) = \big(\varphi(x_2^{-1})\big)^{-1}$
   $\Leftrightarrow \varphi\big(x_1 * (x_2^{-1} * x_2)\big) = \big(\varphi(x_2^{-1})\big)^{-1}$
   $\Leftrightarrow \varphi(x_1 * e_1) = \big(\varphi(x_2^{-1})\big)^{-1}$
   $\Leftrightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$
   $(\Leftarrow)$
   Diketahui $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$,
   Akan ditunjukan $\varphi(x_1 \odot x_2) = e_2$.
   Ambil sebarang $x_1, x_2 \in A_1$,
   Karena φ K-homomorfisma, maka berlaku
   $$\begin{aligned}\varphi(x_1 \odot x_2) &= \varphi(x_1) \odot \varphi(x_2)\\ &= \varphi(x_1) \odot \varphi(x_1)\\ &= \varphi(x_1 \odot x_1)\\ &= \varphi(e_1)\\ &= e_2\end{aligned}$$
4. Misalkan H_1 merupakan K-subaljabar dari A_1. Akan ditunjukkan bahwa $\varphi(H_1)$ adalah K-subaljabar dari K_2.
   (i) Karena H_1 K-subaljabar, maka $H_1 \neq \emptyset$ dan $e_1 \in H_1$, Sehingga $\varphi(e_1) = e_2 \in \varphi(H_1)$. Diperoleh $\varphi(H_1) \neq \emptyset$.
   (ii) Ambil sebarang $y_1, y_2 \in \varphi(H_1)$, maka $\exists x_1, x_2 \in H_1$ sedemikian sehingga $\varphi(x_1) = y_1, \varphi(x_2) = y_2$, dan
   $y_1 \odot y_2 = \varphi(x_1) \odot \varphi(x_2) = \varphi(x_1 \odot x_2)$
   Karena $x_1 \odot x_2 \in H_1$ maka
   $\varphi(x_1 \odot x_2) \in \varphi(H_1)$
   Jadi $y_1 \odot y_2 \in \varphi(H_1)$.

Dari (i) dan (ii) diperoleh bahwa $\varphi(H_1)$ adalah K-subaljabar dari A_2.

5. Misalkan H_2 merupakan K-subaljabar dari A_2 . Akan ditunjukkan bahwa $\varphi^{-1}(H_2)$ adalah K-subaljabar dari A_1.
   (i) Karena H_2 K-subaljabar dari dari A_2 maka $e_2 \in H_2$, sehingga $\varphi(e_1) \in H_2$ dan $e_1 \in \varphi^{-1}(H_2)$. Diperoleh $\varphi^{-1}(H_2) \neq \emptyset$ dan $\varphi^{-1}(H_2) \subset A_1$.
   (ii) Ambil sebarang $m, n \in \varphi^{-1}(H_2)$
   Diperoleh $\varphi(m), \varphi(n) \in H_2$, karena H_2 K-subaljabar dari A_2, maka
   $\varphi(m) \odot \varphi(n)^{-1} \in H_2$. Karena φ K-homomorfisma.
   maka
   $$\begin{aligned}\varphi(m) \odot \varphi(n)^{-1} &= \varphi(m) \odot \big(e_2 \odot \varphi(n)\big)\\ &= \varphi(m) \odot \big(\varphi(e_1) \odot \varphi(n)\big)\\ &= \varphi(m) \odot \big(\varphi(e_1 \odot n)\big)\\ &= \varphi(m) \odot \varphi(n^{-1})\\ &= \varphi(m \odot n^{-1})\end{aligned}$$
   Diperoleh $\varphi(m \odot n^{-1}) = \varphi(m) \odot \varphi(n^{-1}) \in H_2$.
   Jadi $m \odot n^{-1} \in \varphi^{-1}(H_2)$

Berdasarkan (i) dan (ii) diperoleh bahwa $\varphi^{-1}(H_2)$ adalah K-subaljabar dari A_1.

PENUTUP

Dalam K-aljabar berlaku hukum kanselasi kiri dan kanselasi kanan.

Misalkan $< G,*>$ grup komutatif. Jika $< G,*,\odot, e >$ adalah suatu K-aljabar, maka $\forall x, y, z \in G$ berlaku:

1. $(e \odot x) \odot (e \odot y) = y \odot x = e \odot (x \odot y)$
2. $(x \odot z) \odot (y \odot z) = x \odot y$
3. $e \odot (e \odot x) = x$
4. $x \odot (e \odot y) = y \odot (e \odot x)$

Jika G merupakan K-aljabar komutatif, maka $\forall x, y, z \in G$ berlaku:

1. $(x \odot y) \odot z = (x \odot z) \odot y$
2. $\big(x \odot (x \odot y)\big) \odot y = e$
3. $e \odot (x \odot y) = (e \odot x) \odot (e \odot y)$

Misalkan $< G,*,\odot\, e >$ suatu K-aljabar. Jika $< G,*>$ tidak komutatif, maka $\forall x, y, z, u, v \in G$ berlaku:

1. $(x \odot y) \odot (u \odot v) = \big(x \odot (e \odot v) \odot (e \odot y)\big) \odot u$
2. $(x \odot y) \odot z = x \odot \big(z \odot (e \odot y)\big)$
3. $e \odot (e \odot x) = x$
4. $e \odot (x \odot y) = y \odot x$
5. $x \odot y = e \Leftrightarrow x = y$

Jika H himpunan bagian tak kosong dan merupakan K-subaljabar dari $< G,*,\odot, e >$, maka H juga merupakan K-aljabar.

Misalkan $< G,*,\odot, e >$ adalah suatu K-aljabar dan $g \in G$. Jika H suatu subgrup dari G. Maka $H_{g^2} = \{g \odot (g \odot x) | x \in H\}$ adalah suatu K-subaljabar dari $< G,*,\odot, e >$.

Misalkan $A_1 =< G_1,*,\odot, e_1 >$ dan $A_2 =< G_2,*,\odot, e_2 >$, A_1 K-aljabar komutatif, serta $\varphi: A_1 \to A_2$ suatu K-homomorfisme, maka $\forall x_1, x_2 \in A_1$ berlaku:

1. $\varphi(e_1) = e_2$
2. $\varphi(e_1 \odot x_1) = e_2 \odot \varphi(x_1)$
3. $\varphi(x_1 \odot x_2) = e_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$
4. Jika H_1 adalah K-subaljabar dari A_1 maka $\varphi(H_1)$ adalah K-subaljabar dari A_2
5. Jika H_2 adalah K-subaljabar dari A_2, maka $\varphi^{-1}(H_2)$ adalah K-subaljabar dari A_1.

Saran yang dapat diberikan untuk penelitian berikutnya adalah menurunkan sifat-sifat pada K-aljabar terhadap subkelas dari aljabar yaitu Q-aljabar dan B-aljabar, semikian juga subkelas dari Q-aljabar yaitu BCK-aljabar, BCI-aljabar, dan BCH-aljabar.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. (2000). *Dasar-dasar Ajabar Linear*. Batam:Interaksara.

Block, N. J. (2009). *Abstract Algebra with Applications*. New Jersey: Prentice-Hall Inc.

Dar, K. H dan Akram, M. (2006). On subclasses of K(G)-algebras. *Math. Comp. Sci. Ser*. 33:235-240.

Dar, K. H dan Akram, M. (2007). On K-Homomorphisms of K-Algebras. *IMF*. 46:2283-2293.

Dar, K. H dan Akram, M. (2010). Characterization of K-Algebras by self maps II. *Math. Comp. Sci. Ser*. :37:96-103.

Fraleigh, J. B. (1989). *A First Course in Abstract Algebra*. Columbia: Addison Wesley.

Handam, A. H. (2012). Soft K(G)-Algebras. *Tamkang Journal of Mathematics*. 43:203-213.
Doi: 10.5556/j.tkjm.43.2012.203-213

Judson, T. W. (2013). *Abstract Algebra Theory and Applications*. Stephen F. Austin State University.

Milne, J. S. (2013). *Group Theory.* Course Notes

Setiawan, A. (2011). *Aljabar Abstrak (Teori Grup dan Teori Ring)*. Salatiga: UKSW.