UJM 5 (2) (2016)

UNNES Journal of Mathematics

http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujm

HYPER-PARABOLOIDA DALAM RUANG EUCLID BERDIMENSI-*N*

Muhammad Syifaur Rahmat✉, Suhito, Hery Sutarto

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 lantai 1 Kampus Sekaran, Gunungpati, Semarang, 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Februari 2016
Disetujui Mei 2016
Dipublikasikan Nopember 2016

Keywords:
Hyper-paraboloid;
tangent plane;
polar plane

Abstrak

Salah satu kajian dalam geometri adalah parabola dan paraboloida. Parabola merupakan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama dari suatu titik dan garis tertentu. Perluasan paraboloida pada ruang n>3 dapat dilakukan dengan bekerja melalui sifat-sifat analitisnya. Permasalahan yang diangkat adalah bagaimana mencari dan merumuskan persamaan umum hyper-paraboloida, bidang singgung hyper-paraboloida, dan bidang kutub hyper-paraboloida. Tujuan dari penilitian ini adalah untuk merumuskan persamaan umum hyper-paraboloida, bidang singgung hyper-paraboloida, dan bidang kutub hyper-paraboloida. Metode yang digunakan adalah studi pustaka. Pada penelitian ini penulis membatasi permasalahan yang dibahas pada hyper-paraboloida yang berpusat di O dan O' dengan sumbu simetri sejajar dengan sumbu koordinat serta titik fokusnya terletak pada sumbu simetri. Hasil dari penilitian ini adalah persamaan umum hyper-paraboloida, bidang singgung hyper-paraboloida, dan bidang kutub hyper-paraboloida.

Abstract

One study in geometry is parabolic and paraboloid. Parabola is the locus of points equidistant from a given point and line. Expansion paraboloida on space n> 3 can be done by working through its analytical properties. Issues raised is how to find and formulate general equation of hyper-paraboloid, hyper-paraboloid tangent plane, and the polar plane of hyper-paraboloid. The purpose of this research is to formulate a general equation-paraboloida hyper, hyper-paraboloida tangent plane, and the polar plane of hyper-paraboloid. The method used is literature. In this study, the authors limit the issues discussed in the hyper-paraboloid centered at O and O' with a symmetry axis parallel to the coordinate axes as well as the focal point lies on the axis symmetry. Results of this research is the general equation of hyper-paraboloid, hyper-paraboloid tangent plane, and the polar plane of hyper-paraboloid.

✉Alamat korespondensi:
E-mail: syifaurrahmat@gmail.com

p-ISSN 2252-6943
e-ISSN 2460-5859

PENDAHULUAN

Kata "geometri" berasal dari kata "geo" yang berarti "bumi" dan "metry" yang berarti "pengukuran" (Henle, 1969). Geometri adalah ilmu yang mempelajari bidang dan ruang (Guven & Kosa, 2008). Geometri dapat diartikan sebagai ilmu ukur (Moeharti, 1986). Titik, garis, bidang, dan ruang merupakan benda abstrak yang menjadi unsur dasar geometri. Geometri adalah struktur matematika yang membicarakan unsur dan relasi yang ada antara unsur-unsur tersebut (In'am, 2003).

Semua objek dalam geometri dibangun dari suatu definisi. Beberapa ahli mengatakan bahwa definisi-definisi dari suatu penyelesaian masalah matematika sulit untuk dipahami (Mamona & Down, 2005). Dalam geometri euclid diketahui bahwa bilangan ganda tiga (a_1, a_2, a_3) dapat dianggap sebagai simbol yang dikaitkan sebuah titik pada ruang dimensi-*3*, bilangan ganda empat (a_1, a_2, a_3, a_4) dapat dianggap sebagai simbol yang dikaitkan sebuah titik pada ruang dimensi-*4*, dan seterusnya (Anton, 1987). Analogi dengan simbol yang dikaitkan titik tersebut, maka garis, bidang, maupun bangun ruang dalam dimensi-n pun dapat dikaitkan oleh sebuah simbol atau rumus.

Ruang lingkup kajian geometri analitik bidang dan ruang adalah bangun-bangun geometri yang dikaji dari sudut pandang aljabar (Saragih, 2012). Salah satu kajian geometri yang dibahas dalam penelitian ini yaitu parabola. Suatu permukaan pada ruang dimensi-*3* yang merupakan analogi dari parabola dinamakan dengan Paraboloida. Parabola merupakan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama dari suatu titik dan garis tertentu (Susanto, 2012). Parabola juga dapat digambarkan sebagai limit spesial dari poligon simson (Tsukerman, 2013). Sedangkan paraboloida merupakan permukaan yang direpresentasikan pada bidang kartesius dengan persamaan

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}, p, q > 0$$

(Kletenik, 2002).

Pada parabola dan paraboloida tersebut terdapat persamaan-persamaan maupun relasi-relasi yang saling berhubungan. Paraboloida tersebut dapat diperoleh dengan memutar suatu parabola terhadap sumbunya.

Seperti yang sudah diketahui bahwa parabola, paraboloida, dan bangun geometri lainnya secara visualisasi geometrik terbatas hanya pada dimensi-*3*. Terdapat kajian menarik dalam geometri yang dapat mentransformasikan suatu persamaan pada dimensi dua maupun dimensi tiga menjadi persamaan ke dalam dimensi yang lebih tinggi. Dengan cara bekerja pada sifat-sifat analitis geometri seperti ruang vektor dan ruang metrik maka kita dapat menerapkan definisi-definisi dan teorema-teorema yang ada pada dimensi dua maupun dimensi tiga ke dalam dimensi-n. Sebuah ruang vektor dengan sebuah perkalian dalam dinamakan ruang hasil kali dalam (Veronica, 2011). Sedangkan ruang metrik (S, d) merupakan suatu himpunan dengan d pada S dengan memenuhi syarat tertentu (Bartle, 2000).

Penyampaian materi geometri pada tingkat sekolah maupun perguruan tinggi umumnya hanya membahas pada dimensi-*2* dan dimensi-*3*. Karena rasa ingin tahu terhadap dimensi yang lebih tinggi dalam geometri maka penulis tertarik untuk mengkaji salah satu materi geometri yaitu paraboloida beserta relasi-relasi yang terkait di ruang dimensi-n. Paraboloida pada dimensi-n dinamakan Hyper-Paraboloida. Dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan sumbangan pemikiran kepada pembaca terkait dimensi-n, lebih khusus mengenai hyper-paraboloida. Sebagaimana adanya dimensi-n dalam geometri, diharapkan pembaca juga dapat memahami bahwa terdapat banyak dimensi dalam kehidupan kita sehari-hari.

METODE

Jenis Penelitian

Penelitian ini termasuk jenis penelitian studi literatur. Studi literatur adalah cara yang dipakai untuk menghimpun data-data atau sumber-sumber yang berhubungan dengan topik yang diangkat dalam suatu penelitian. Studi literatur bisa didapat dari berbagai sumber, jurnal, buku dokumentasi, internet, dan pustaka.

Pengumpulan Data

Pada tahap ini dilakukan pengumpulan data-data yang diperlukan sebagai bahan yang digunakan untuk memecahkan masalah yang telah dirumuskan. Jenis data yang digunakan penulis dalam penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari buku, skripsi, dan internet.

Metode yang digunakan adalah studi literatur dengan mencari referensi teori yang relevan dengan permasalahan yang diangkat, kemudian mencatat atau mengutip pendapat para ahli yang ada di dalam buku tersebut untuk memperkuat landasan teori dalam penelitian. Setelah data terkumpul, dilakukan pengolahan data yang akan digunakan pada tahap analisis.

Analisis Data

Analisis data merupakan langkah yang terpenting dalam suatu penelitian. Data yang telah diperoleh akan dianalisis pada tahap ini sehingga ditarik kesimpulan. Pada tahap ini data-data yang telah terkumpul kemudian diolah dan berdasarkan analogi yang tepat akan didapatkan sebuah hasil penelitian. Hasil penelitian tersebut juga ditunjang dari penelitian sebelumnya.

Adapun langkah-langkah analisis data sebagai berikut:
(a)Memahami dan menganalisis materi tentang parabola, paraboloida, ruang vektor, ruang hasil kali dalam, dan ruang metrik maupun lainnya yang berkaitan, (b)Menerapkan sifat-sifat dari ruang vektor maupun ruang metrik pada parabola maupun paraboloida, (c) Menerapkan persamaan yang telah dipelajari dalam dimensi-*2* maupun dimensi-*3* kedalam bentuk persamaan dimensi-*n*, (d) Mencari persamaan hyper-paraboloida dalam dimensi-*n* dengan menerapkan persamaan pada dimensi-*n*.

Penarikan Simpulan

Hasil dari pembahasan ini dituangkan dalam bentuk simpulan akhir yang menyimpulkan secara umum pemecahan masalah tersebut. Simpulan ini dijadikan sebagai kajian akhir dan merupakan hasil akhir dari penulisan skripsi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi (1)

A hyper-paraboloida is the surface is represented in cartesian coordinate system, by the equation

$$x_1 = \frac{x_2{}^2}{a_2} + \frac{x_3{}^2}{a_3} + \cdots + \frac{x_n{}^2}{a_n}$$

where $a_2, a_3, \ldots, a_n > 0$

(Kurnianto, 2003 : 76).

Hyper-paraboloida dengan pusat $\boldsymbol{O(0,0,\ldots,0)}$

Persamaan Hyper-Paraboloida

Berikut ditunjukkan persamaan baku hyper-paraboloida dengan pusat O(0,0,...,0) dan titik fokus pada sumbu x_1.

Ambil sebarang titik $F = (a, 0,0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}$ pada sumbu x_1 dan sebarang garis g pada sumbu x_1. Jelas garis g memotong sumbu x_1 pada sebuah titik. Namakan titik A. Kemudian buat sumbu x_2 sehingga memotong titik tengah AF dan tegak lurus sumbu x_2. Analogi dengan sumbu x_2, buat juga sumbu $x_3, x_4, \ldots, x_n$ sehingga memotong titik tengah AF dan tegak lurus sumbu $x_3, x_4, \ldots, x_n$ tersebut.

Misalkan jarak $|AF| = p$, maka $F(\frac{1}{2}p, 0,0, \ldots, 0)$ dan persamaan garis g tersebut adalah

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle = \langle x_{1(0)}, x_{2(0)}, \ldots, x_{n(0)} \rangle + t\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$$

.Pilih garis g dengan persamaan

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle = \langle -\frac{1}{2}p, 0, \ldots, 0 \rangle + t\,\langle -\frac{1}{2}p, 0, \ldots, b \rangle$$

dengan $b > 0$

Ambil sebarang titik $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pada hyper-paraboloida. Berdasarkan definisi jelas bahwa jarak $|TF|$ = jarak T ke garis g.

Jelas

$$\sqrt{\left(x_1 - \frac{1}{2}p\right)^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + \cdots + x_n{}^2} = x_1 + \frac{1}{2}p$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - \frac{1}{2}p)^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + \cdots + x_n{}^2 = x_1{}^2 + px_1 + \frac{1}{4}p^2$$

$$\Leftrightarrow x_1{}^2 - px_1 + \frac{1}{4}p^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + \cdots + x_n{}^2 = x_1{}^2 + px_1 + \frac{1}{4}p^2$$

$$\Leftrightarrow x_2{}^2 + x_3{}^2 + \cdots + x_n{}^2 = 2px_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2{}^2}{p} + \frac{x_3{}^2}{p} + \cdots + \frac{x_n{}^2}{p} = 2x_1, p > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2{}^2}{a_2} + \frac{x_3{}^2}{a_3} + \cdots + \frac{x_n{}^2}{a_n} = 2x_1.$$

di mana $a_2, a_3, \ldots, a_n > 0$

Dengan menggunakan teorema jarak antara titik-*n* dengan garis lurus-*n* dapat ditunjukkan persamaan baku hyper-paraboloida tersebut.

Berikut ditunjukkan persamaan paraboloida dengan titik pusat O(0,0,...,0) dan titik fokus terletak pada sumbu x_1 sebagai berikut.

Ambil sebarang titik fokus $F = (a, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}$ pada sumbu x_1. Jelas bahwa titik $A = (-a, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}$ merupakan pencerminan dari titik $F = (a, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}$ pada sumbu x_1. Misalkan jarak $|AF| = p$. Pilih garis g dengan persamaan $\langle x_1, x_2, \dots, x_n\rangle = \langle -\frac{1}{2}p, 0, \dots, 0\rangle + t\,\langle -\frac{1}{2}p, 0, \dots, b\rangle$ dengan $b > 0$.

Ambil sebarang titik $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pada hyper-paraboloida. Jelas bahwa $AT = T - A = (x_1, x_2, \dots, x_n) - (-a, 0, \dots, 0) = (x_1 + a, x_2, \dots, x_n)$.

Pilih titik $B = (-a_1, x_2, \dots, x_n) \in R$ pada garis g tersebut. Jelas bahwa bilangan arah α garis AB tersebut adalah

$$AB = B - A = (-a_1, x_2, \dots, x_n)\text{—}a, 0, \dots, 0 = (0, x_2, \dots, x_n).$$

Berdasarkan teorema tersebut dapat dihitung jarak titik $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tersebut terhadap garis g sebagai berikut.

$$d(T,g) = \left\| (T - A) - \frac{\langle T - A, \alpha\rangle}{\|\alpha\|^2}.\alpha \right\|$$

$$= \left\| (x_1 + a, x_2, \dots, x_n) - \frac{(x_1 + a, x_2, \dots, x_n)(0, x_2, \dots, x_n)}{(\sqrt{0^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2})^2}.(0, x_2, \dots, x_n) \right\|$$

$$= \left\| (x_1 + a, x_2, \dots, x_n) - \frac{(0^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}{0^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.(0, x_2, \dots, x_n) \right\|$$

$$= \|(x_1 + a, x_2, \dots, x_n) - ((0, x_2, \dots, x_n)\|$$

$$= \|(x_1 + a, 0, \dots, 0)\|$$

$$= \sqrt{(x_1 + a)^2 + 0^2 + \cdots + 0^2}.$$

Berdasarkan definisi diketahui bahwa jarak titik $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ke garis g adalah sama dengan jarak titik $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ke titik fokus $F(a, 0, \dots, 0)$.

Jelas $d(T, g) = d(T, F)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 + a)^2 + 0^2 + \cdots + 0^2} = \sqrt{(x_1 + a)^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + a)^2 + 0^2 + \cdots + 0^2 = (x_1 + a)^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + a^2 + 2ax_1 = x_1^2 + a^2 - 2ax_1 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

$$\Leftrightarrow 4ax_1 = x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

$$\Leftrightarrow 4x_1 = \frac{x_2^2}{a} + \frac{x_3^2}{a} + \cdots + \frac{x_n^2}{a} \text{ dengan } a > 0$$

Jadi persamaan hyper-paraboloida dengan pusat O(0,0,…,0) dan titik fokus terletak pada sumbu x_1 yaitu

$$4x_1 = \frac{x_2^2}{a_2} + \frac{x_3^2}{a_3} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n} \text{ dengan } a_i > 0$$

untuk suatu $a_i (i = 2, 3, \dots, n), a \in R$.

dan $\{a_2, a_3, \dots, a_n\}$ disebut bilangan karakteristik.

Dengan cara yang sama maka akan didapatkan persamaan hyper-paraboloida dengan pusat O(0,0,…,0) dan titik fokus terletak pada sumbu x_2 yaitu

$$4x_2 = \frac{x_1^2}{a} + \frac{x_3^2}{a} + \cdots + \frac{x_n^2}{a} \text{ dengan } a > 0$$

dan seterusnya hingga titik fokusnya pada x_n yaitu

$$4x_n = \frac{x_1^2}{a} + \frac{x_2^2}{a} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{a} \text{ dengan } a > 0$$

sehingga persamaan hyper-paraboloida dengan titik pusat O(0,0,…,0) dan titik fokus terletak pada sumbu $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ dengan suatu bilangan karakteristik $a_i (i = 1, 2, \dots, n), i \in \mathbb{R}$ yaitu

$$4x_1 = \frac{x_2^2}{a_2} + \frac{x_3^2}{a_3} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n} \text{ dengan } a_i > 0.$$

Bidang Singgung Hyper-paraboloida

Jika diberikan suatu hyper-paraboloida dengan titik pusat O(0,0,…,0) dan titik fokus terletak pada sumbu x_1 dengan persamaan hyper-paraboloida berikut.

$$H^P: \frac{x_2^2}{a_2} + \frac{x_3^2}{a_3} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n} = 4x_1$$

dan diketahui bahwa suatu titik $x' = (x_2', x_3', \dots, x_n') \in R^n$ terletak pada H^P, dan misalkan $T = (x_2', x_3', \dots, x_n')$ merupakan titik singgung pada H^P. Maka persamaan garis yang melalui T dengan bilangan arah $(b_2, b_3, \dots, b_n)$ adalah

$$\frac{x_2 - x_2'}{b_2} = \frac{x_3 - x_3'}{b_3} = \cdots \frac{x_n - x_n'}{b_n} = \lambda \quad \dots (1)$$

sehingga diperoleh $x_2 = x_2' + b_2\lambda$

$x_3 = x_3' + b_3\lambda$

……………………

$x_n = x_n' + b_n\lambda$

Koordinat-koordinat titik-titik potong garis ini dengan H^P diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{x_2^2}{a_2} + \frac{x_3^2}{a_3} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n} = 4x_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2^2}{a_2} + \frac{x_3^2}{a_3} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n} - 4x_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_2' + b_2\lambda)^2}{a_2} + \frac{(x_3' + b_3\lambda)^2}{a_3} + \cdots + \frac{(x_n' + b_n\lambda)^2}{a_n} - 4(x_1' + b_1\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2'^2 + 2x_2'b_2\lambda + b_2^2\lambda^2}{a_2} + \frac{x_3'^2 + 2x_3'b_3\lambda + b_3^2\lambda^2}{a_3} + \cdots + \frac{x_n'^2 + 2x_n'b_n\lambda + b_n^2\lambda^2}{a_n} - 4(x_1' + b_1\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x_2'^2}{a_2} + \frac{x_3'^2}{a_3} + \cdots + \frac{x_n'^2}{a_n}\right) + \left(\frac{2x_2'b_2\lambda}{a_2} + \frac{2x_3'b_3\lambda}{a_3} + \cdots + \frac{2x_n'b_n\lambda}{a_n}\right) + \left(\frac{b_2^2\lambda^2}{a_2} + \frac{b_3^2\lambda^2}{a_3} + \cdots + \frac{b_n^2\lambda^2}{a_n}\right) - 4(x_1' + b_1\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x_1' + \left(\frac{b_2^2}{a_2} + \frac{b_3^2}{a_3} + \cdots + \frac{b_n^2}{a_n}\right)\lambda^2 + \left(\frac{2x_2'b_2}{a_2} + \frac{2x_3'b_3}{a_3} + \cdots + \frac{2x_n'b_n}{a_n}\right)\lambda - 4(x_1' + b_1\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b_2^2}{a_2} + \frac{b_3^2}{a_3} + \cdots + \frac{b_n^2}{a_n}\right)\lambda^2 + \left(\frac{2x_2'b_2}{a_2} + \frac{2x_3'b_3}{a_3} + \cdots + \frac{2x_n'b_n}{a_n}\right)\lambda + b_1\lambda = 0$$

Salah satu akar dari persamaaan kuadrat ini adalah $\lambda_1 = 0$.

Garis akan menyinggung H^P jika titik-titik potongnya berimpit. Hal ini terjadi apabila persamaan kuadrat tersebut mempunyai dua akar yang sama atau apabila nilai diskriminannya sama dengan nol.

$$D = b^2 - 4ac = 0.$$

Jadi haruslah akar persamaannya $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Hal ini hanya terjadi apabila

$$\frac{2x_2'b_2}{a_2} + \frac{2x_3'b_3}{a_3} + \cdots + \frac{2x_n'b_n}{a_n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2'b_2}{a_2} + \frac{x_3'b_3}{a_3} + \cdots + \frac{x_n'b_n}{a_n} = 0 \quad \ldots (2)$$

sehingga persamaan garis dengan bilangan arah $(b_2, b_3, \ldots, b_n)$ yang menyinggung hyper-paraboloida di titik singgung $T = (x_2', x_3', \ldots, x_n')$ yaitu

$$\frac{x_2 - x_2'}{b_2} = \frac{x_3 - x_3'}{b_3} = \cdots = \frac{x_n - x_n'}{b_n} = \lambda$$

dengan syarat

$$\frac{x_2'b_2}{a_2} + \frac{x_3'b_3}{a_3} + \cdots + \frac{x_n'b_n}{a_n} = 0$$

Kemudian dari persamaan (1) dan (2), dengan mengeliminasi $(b_2, b_3, \ldots, b_n)$, diperoleh

$$\frac{x_2'b_2}{a_2} + \frac{x_3'b_3}{a_3} + \cdots + \frac{x_n'b_n}{a_n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2'(x_2 - x_2')}{a_2} + \frac{x_3'(x_3 - x_3')}{a_3} + \cdots + \frac{x_n'(x_n - x_n')}{a_n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2x_2' - x_2'^2}{a_2} + \frac{x_3x_3' - x_3'^2}{a_3} + \cdots + \frac{x_nx_n' - x_n'^2}{a_n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2x_2'}{a_2} + \frac{x_3x_3'}{a_3} + \cdots + \frac{x_nx_n'}{a_n} - \left(\frac{x_2'^2}{a_2} + \frac{x_3'^2}{a_3} + \cdots + \frac{x_n'^2}{a_n}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2x_2'}{a_2} + \frac{x_3x_3'}{a_3} + \cdots + \frac{x_nx_n'}{a_n} - 4x_1' = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2x_2'}{a_2} + \frac{x_3x_3'}{a_3} + \cdots + \frac{x_nx_n'}{a_n} = 4x_1'$$

Jadi titik x' tersebut memenuhi persamaan

$$\frac{x_2x_2'}{a_2} + \frac{x_3x_3'}{a_3} + \cdots + \frac{x_nx_n'}{a_n} = 4x_1'$$

Persamaan ini merupakan bidang datar-*n* dengan bilangan arah

$$\left\{\frac{(x_2')}{a_2}, \frac{(x_3')}{a_3}, \ldots, \frac{(x_n')}{a_n},\right\}$$

yang bersekutu tepat di satu titik dengan hyper-paraboloida H^P yaitu titik x', dan selanjutnya disebut dengan bidang singgung terhadap H^P di titik x' dan titik x' tersebut disebut titik singgung bidang singgung terhadap H^P.

Bidang Kutub Hyper-paraboloida

Bidang kutub hyper-paraboloida adalah suatu bidang yang dibentuk dari titik yang tidak terletak pada hyper-paraboloida tersebut dan menyinggung hyper-paraboloida tersebut. Jika diberikan suatu hyper-paraboloida dengan titik pusat O(0,0,...,0) dan titik fokus terletak pada sumbu x_1 yaitu

$$H^P: \frac{x_2^2}{a_2} + \frac{x_3^2}{a_3} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n} = 4x_1$$

dan sebarang titik $c = (c_2, c_3, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ yang tidak terletak pada H^P. Misalkan $d = (d_2, d_3, \ldots, d_n) \in R^n$ suatu titik singgung pada H^P dari bidang singgung yang melalui titik $c = (c_2, c_3, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. Sehingga diperoleh persamaan bidang singgung pada H^P.

$$\frac{x_2d_2}{a_2} + \frac{x_3d_3}{a_3} + \cdots + \frac{x_nd_n}{a_n} = 4x_1$$

karena bidang singgung melalui $c = (c_2, c_3, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, maka diperoleh

$$\frac{c_2 d_2}{a_2} + \frac{c_3 d_3}{a_3} + \cdots + \frac{c_n d_n}{a_n} = 4x_1$$

karena titik $d = (d_2, d_3, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$ merupakan titik singgung pada H^P, maka ini berarti setiap titik singgung dari bidang singgung pada H^P yang melalui $c = (c_2, c_3, \dots, c_n) \in R^n$, terletak pada bidang dengan persamaan

$$\frac{c_2 x_2}{a_2} + \frac{c_3 x_3}{a_3} + \cdots + \frac{c_n x_n}{a_n} = 4x_1$$

Jadi, persamaan berikut merupakan persamaan bidang kutub pada H^P

$$V^{H^P}: \frac{c_2 x_2}{a_2} + \frac{c_3 x_3}{a_3} + \cdots + \frac{c_n x_n}{a_n} = 4x_1$$

dengan bilangan arah

$$\left\{\frac{c_2}{a_2}, \frac{c_3}{a_3}, \dots, \frac{c_n}{a_n}\right\}.$$

Selanjutnya bidang datar-n V^{H^P}dinamakan bidang kutub c terhadap H^P, sedangkan titik c tersebut disebut titik kutub V^{H^P}terhadap H^P.

Hyper-paraboloida dengan pusat $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$

Persamaan Hyper-paraboloida

Permasalahan yang dibahas selanjutnya adalah bagaimana persamaan baku hyper-paraboloida di R^n dengan titik pusatnya selain $O(0,0,\dots,0)$ dan sumbu simetri sejajar dengan sumbu koordinat.

Untuk memperoleh penyelesaian permasalahan tersebut, dilakukan dengan translasi sumbu atau pergeseran terlebih dahulu dari $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ terhadap $(x_1', x_2', \dots, x_n')$. Misalkan ambil sebarang titik $O'(0,0,\dots,0)$ pada sumbu koordinat $x_1', x_2', \dots, x_n'$ dan $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ pada sumbu koordinat $x_1, x_2, \dots, x_n$. Melalui sebuah titik dapat dibangun sebuah sumbu koordinat x_1' dengan cara membentuk garis yang sejajar dengan sumbu x_1. Demikian juga dengan sumbu koordinat $x_2', x_3', \dots, x_n'$. Oleh karena sebarang titik A pada sumbu koordinat $x_1', x_2', \dots, x_n'$ dapat dikaitkan dengan koordinat $x_1, x_2, \dots, x_n$ dari titik A tersebut maka untuk setiap titik $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $P(x_1', x_2', \dots, x_n')$ pada sumbu koordinat $x_1, x_2, \dots, x_n$ dengan pusat $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ dapat dibuat persamaan oleh persamaan sebagai berikut.

$x_1 = x_1' + h_1$ atau $x_1' = x_1 - h_1$
$x_2 = x_2' + h_2$ atau $x_2' = x_2 - h_2$
$\vdots$ $\vdots$
$x_n = x_n' + h_n$ atau $x_n' = x_n - h_n$

Selanjutnya dari persamaan tersebut dapat digunakan untuk menentukan persamaan Hyper-paraboloida di $\mathbb{R}^n$ serta relasi yang terkait sebagai berikut.

Dipunyai suatu Hyper-paraboloida dengan titik pusat $O(0,0,\dots,0)$ dan titik fokusnya terletak pada sumbu x_1

$$\frac{x_2^{\,2}}{a_2} + \frac{x_3^{\,2}}{a_3} + \cdots + \frac{x_n^{\,2}}{a_n} = 4x_1$$

Dari persamaan tersebut, maka untuk persamaan hyper-paraboloida dengan titik pusat $O'(0,0,\dots,0)$ pada sumbu $x_1', x_2', \dots, x_n'$ adalah

$$\frac{x_2'^2}{a_2} + \frac{x_3'^2}{a_3} + \cdots + \frac{x_n'^2}{a_n} = 4x_1$$

karena untuk setiap titik $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $P(x_1', x_2', \dots, x_n')$ pada sumbu koordinat $x_1, x_2, \dots, x_n$ dengan pusat $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ terdapat hubungan

$x_1 = x_1' + h_1$ atau $x_1' = x_1 - h_1$
$x_2 = x_2' + h_2$ atau $x_2' = x_2 - h_2$
$\vdots$ $\vdots$
$x_n = x_n' + h_n$ atau $x_n' = x_n - h_n$

maka persamaan hyper-paraboloida dengan titik pusat $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ adalah

$$\frac{x_2'^2}{a_2} + \frac{x_3'^2}{a_3} + \cdots + \frac{x_n'^2}{a_n} = 4x_1$$

atau

$$\frac{(x_2 - h_2)^2}{a_2} + \frac{(x_3 - h_3)^2}{a_3} + \cdots + \frac{(x_n - h_n)^2}{a_n} = 4x_1$$

Bidang Singgung Hyper-paraboloida

Dipunyai persamaan garis dengan bilangan arah $b = (b_2, b_3, \dots, b_n)$ menyinggung hyper-paraboloida dengan titik pusat $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ di titik $(x')' = ((x_2')', (x_3')', \dots, (x_n')')$ yaitu

$$\frac{(x_2') - (x_2')'}{b_2} = \frac{(x_3') - (x_3')'}{b_3} = \cdots = \frac{(x_n') - (x_n')'}{b_n} = \lambda$$

dengan syarat

$$\frac{(x_2')' b_2}{a_2} + \frac{(x_3')' b_3}{a_3} + \cdots + \frac{(x_n')' b_n}{a_n} = 0$$

kemudian suatu persamaan bidang singgung hyper-paraboloida dengan titik pusat

$O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ dan titik fokusnya terletak pada sumbu $x_1{}'$ adalah

$$\frac{x_2 x_2{}'}{a_2} + \frac{x_3 x_3{}'}{a_3} + \cdots + \frac{x_n x_n{}'}{a_n} = 4x_1{}'$$

dengan bilangan arah

$$\left\{\frac{x_2{}'}{a_2}, \frac{x_3{}'}{a_3}, \dots, \frac{x_n{}'}{a_n}\right\}$$

Dari persamaan tersebut maka persamaan bidang singgung untuk hyper-paraboloida dengan titik pusat $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ pada sumbu koordinat $x_1{}', x_2{}', \dots, x_n{}'$ adalah

$$\frac{x_2{}'(x_2{}')'}{a_2} + \frac{x_3{}'(x_3{}')'}{a_3} + \cdots + \frac{x_n{}'(x_n{}')'}{a_n} = 4x_1{}'$$

dengan bilangan arah

$$\left\{\frac{(x_2{}')'}{a_2}, \frac{(x_3{}')'}{a_3}, \dots, \frac{(x_n{}')'}{a_n}\right\}$$

karena untuk setiap titik $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $P(x_1{}', x_2{}', \dots, x_n{}')$ pada sumbu koordinat $x_1, x_2, \dots, x_n$ dengan pusat $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ terdapat hubungan

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1{}' + h_1 \text{ atau } x_1{}' = x_1 - h_1 \\ x_2 &= x_2{}' + h_2 \text{ atau } x_2{}' = x_2 - h_2 \\ &\vdots \\ x_n &= x_n{}' + h_n \text{ atau } x_n{}' = x_n - h_n \end{aligned}$$

Jadi persamaan garis singgung hyper-paraboloida dengan titik pusat $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ adalah

$$\frac{x_2 - x_2{}'}{b_2} = \frac{\mathrm{x}_3 - \mathrm{x}_3{}'}{\mathrm{b}_3} = \cdots = \frac{x_n - x_n{}'}{b_n} = \lambda$$

dengan syarat

$$\frac{(x_2{}' - h_2)b_2}{a_2} = \frac{(x_3{}' - h_3)b_3}{a_3} = \cdots = \frac{(x_n{}' - h_n)b_n}{a_n} = 0$$

Persamaan bidang singgung hyper-paraboloida dengan titik pusat $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ adalah

$$\frac{(x_2 - h_2)(x_2{}' - h_2)}{a_2} + \frac{(x_3 - h_3)(x_3{}' - h_3)}{a_3} + \cdots + \frac{(x_n - h_n)(x_n{}' - h_n)}{a_n} = 4x_1{}'$$

Bidang Kutub Hyper-paraboloida

Dipunyai suatu persamaan bidang kutub hyper-paraboloida dengan titik pusat $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ dan titik fokusnya pada sumbu $x_1{}'$

$$\frac{x_2{}^2}{a_2} + \frac{x_3{}^2}{a_3} + \cdots + \frac{x_n{}^2}{a_n} = 4x_1$$

dengan bilangan arah

$$\left\{\frac{x_2}{a_2}, \frac{x_3}{a_3}, \dots, \frac{x_n}{a_n}\right\}$$

Dari persamaan tersebut, maka persamaan bidang singgung untuk hyper-paraboloida dengan titik pusat $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ pada sumbu koordinat $x_1{}', x_2{}', \dots, x_n{}'$ adalah

$$\frac{b_2{}' x_2{}'}{a_2} + \frac{b_3{}' x_3{}'}{a_3} + \cdots + \frac{b_n{}' x_n{}'}{a_n} = 4x_1{}'$$

dengan bilangan arah

$$\left\{\frac{b_2{}'}{a_2}, \frac{b_3{}'}{a_3}, \dots, \frac{b_n{}'}{a_n}\right\}$$

Karena untuk setiap titik $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $P(x_1{}', x_2{}', \dots, x_n{}')$ pada sumbu koordinat $x_1, x_2, \dots, x_n$ dengan pusat $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ terdapat hubungan

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1{}' + h_1 \text{ atau } x_1{}' = x_1 - h_1 \\ x_2 &= x_2{}' + h_2 \text{ atau } x_2{}' = x_2 - h_2 \\ &\vdots \\ x_n &= x_n{}' + h_n \text{ atau } x_n{}' = x_n - h_n \end{aligned}$$

Jadi persamaan bidang kutub hyper-paraboloida dengan titik pusat $O'(h_1, h_2, \dots, h_n)$ adalah

$$\frac{(b_2 - h_2)(x_2 - h_2)}{a_2} + \frac{(b_3 - h_3)(x_3 - h_3)}{a_3} + \cdots + \frac{(b_n - h_n)(x_n - h_n)}{a_n} = 4x_1$$

`Parabola merupakan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik dan suatu garis (direktrik). Dari defnisi parabola tersebut terdapat suatu permukaan yang merupakan suatu ruang pada dimensi-*3* yang terbentuk dengan menganalogikan bidang parabola. Permukaan tersebut dinamakan paraboloida. Dari analogi parabola pada dimensi-*2* ke paraboloida pada dimensi-*3* serta penelitian sebelumnya, maka dapat dianalogikan juga sampai ke dimensi-*n* yang dinamakan dengan hyper-paraboloida.

Telah dibuktikan juga bahwa $\mathbb{R}^n$ yang merupakan unsur penyusun hyper-paraboloida merupakan ruang vektor, ruang hasil kali dalam, dan ruang metrik. Ruang vektor, ruang hasil kali dalam, dan ruang metrik tersebut merupakan syarat yang harus dipenuhi untuk menganalogikan suatu persamaan ke dalam dimensi-*n*.

Hyper-paraboloida merupakan pengembangan dari paraboloida ke dalam dimensi-n. Telah diketahui bahwa ada dua ruang yang dapat diperoleh dari menganalogikan bidang parabola, yaitu paraboloida eliptik dan paraboloida hiperbolik. Akan tetapi pada penulisan ini yang dikaji hanya hyper-paraboloida yang merupakan pengembangan dari paraboloida eliptik.

Pada hasil penelitian tersebut penulis membatasi masalah yang dibahas, yaitu hanya mengenai persamaan hyper-paraboloida, persamaan bidang singgung hyper-paraboloida, dan persamaan bidang kutub hyper-paraboloida yang memiliki titik pusat di $O(0,0,\dots,0)$ dan di $O'(h_1,h_2,\dots,h_n)$. Karena cakupan bahasan hyper-paraboloida yang cukup luas, penulis juga membatasi agar sumbu simetri hyper-paraboloida tersebut sejajar dengan sumbu koordinat dan titik fokusnya terletak pada sumbu simetri.

SIMPULAN

Dari penelitian ini, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:
Persamaan-persamaan Hyper-paraboloida dengan titik pusat $O(0,0,\dots,0)$ dan titik fokusnya terletak pada sumbu $x_1$sebagai berikut:

(a) Persamaan hyper-paraboloida H^P yaitu

$$H^P: 4x_1 = \frac{x_2^{\,2}}{a_2} + \frac{x_3^{\,2}}{a_3} + \cdots + \frac{x_n^{\,2}}{a_n}$$

(b) Persamaan bidang singgung pada H^P di titik $x' = (x_2', x_3', \dots, x_n') \in \mathbb{R}^n$ yaitu

$$\frac{x_2x_2'}{a_2} + \frac{x_3x_3'}{a_3} + \cdots + \frac{x_nx_n'}{a_n} = 4x_1'$$

dengan bilangan arah

$$\left\{\frac{(x_2')}{a_2}, \frac{(x_3')}{a_3}, \dots, \frac{(x_n')}{a_n}\right\}$$

(c) Persamaan bidang kutub pada H^P dengan titik kutub $c = (c_2, c_3, \dots, c_n) \in R^n$ yaitu

$$V^{H^P}: \frac{c_2x_2}{a_2} + \frac{c_3x_3}{a_3} + \cdots + \frac{c_nx_n}{a_n} = 4x_1$$

dengan bilangan arah

$$\left\{\frac{c_2}{a_2}, \frac{c_3}{a_3}, \dots, \frac{c_n}{a_n}\right\}.$$

Persamaan-persamaan Hyper-paraboloida dengan titik pusat $O'(h_1,h_2,\dots,h_n)$ dan titik fokusnya terletak pada sumbu x_1' sebagai berikut:

(a) Persamaan hyper-paraboloida $H^{P'}$ yaitu

$$H^{P'}: \frac{x_2'^2}{a_2} + \frac{x_3'^2}{a_3} + \cdots + \frac{x_n'^2}{a_n} = 4x_1$$

atau

$$H^{P'}: \frac{(x_2-h_2)^2}{a_2} + \frac{(x_3-h_3)^2}{a_3} + \cdots + \frac{(x_n-h_n)^2}{a_n} = 4x_1$$

(b) Persamaan bidang singgung pada $H^{P'}$ di titik $(x')' = ((x_2')', (x_3')', \dots, (x_n')')$ yaitu

$$\frac{x_2'(x_2')'}{a_2} + \frac{x_3'(x_3')'}{a_3} + \cdots + \frac{x_n'(x_n')'}{a_n} = 4x_1'$$

dengan bilangan arah

$$\left\{\frac{(x_2')'}{a_2}, \frac{(x_3')'}{a_3}, \dots, \frac{(x_n')'}{a_n}\right\}$$

atau

$$\frac{(x_2-h_2)(x_2'-h_2)}{a_2} + \frac{(x_3-h_3)(x_3'-h_3)}{a_3} + \cdots + \frac{(x_n-h_n)(x_n'-h_n)}{a_n} = 4x_1'$$

(c) Persamaan bidang kutub pada $H^{P'}$ dengan titik kutub $(b_2', b_3', \dots, b_n')$ yaitu

$$\frac{b_2'x_2'}{a_2} + \frac{b_3'x_3'}{a_3} + \cdots + \frac{b_n'x_n'}{a_n} = 4x_1'$$

dengan bilangan arah

$$\left\{\frac{b_2'}{a_2}, \frac{b_3'}{a_3}, \dots, \frac{b_n'}{a_n}\right\}$$

atau

$$\frac{(b_2-h_2)(x_2-h_2)}{a_2} + \frac{(b_3-h_3)(x_3-h_3)}{a_3} + \cdots + \frac{(b_n-h_n)(x_n-h_n)}{a_n} = 4x_1$$

Telah diketahui bahwa pada penulisan skripsi ini, hasil dari pembahasan materi pada hyper-paraboloida tersebut berasal dari pengembangan materi paraboloida eliptik pada dimensi-n. Hasil tersebut juga bergantung pada beberapa syarat yaitu titik fokus terletak pada sumbu simetri, titik $O(0,0,\dots,0)$ sebagai titik pusatnya, dan sumbu simetri yang memuat titik fokus tersebut sejajar dengan sumbu koordinat.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. 1987. *Aljabar Linear Elementer (5thed).* Translated by Silaban, P & Susila, I. N. Jakarta: Erlangga.

Bartle, R. G. & Sherbert, D. R. 2000. *Introduction to Real Analysis (*$3^{th} ed$). New York: John Wiley & Sons, Inc.

Guven, B. & Kosa T. 2008. The Effect of Dynamic Geometry Software on Student Mathematics Teacher's Spatial Visualization Skills. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, 7(4): 100-107.

Henle, M. 1969. *Modern Geometries The Analytic Approach*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

In'am, A. 2003. *Pengantar Geometri*. UMM Pers: Malang.

Kletenik, D., Vefimov, N., & Soroka, O. 2002. *Problems in Analytic Geometry*. Moscow: The Minerva Group, Inc.

Kurnianto, Y. S. 2003. *Geometri Euclide* R^n. Skripsi. Yogyakarta: FMIPA Universitas Gajah Mada.

Mamona D., J., & Down, M. 2005. The Identity of Problem Solving. *Journal of Mathematical Behaviour*, 24: 385-401.

Moeharti, H. W. 1986. *Materi Pokok Sistem-Sistem Geometri*. Jakarta: Universitas Terbuka.

Saragih, S. 2012. Application of Generative Learning in Cooperative Settings TPS on Learning Areas and Space Analitic Goemetry. *Jurnal Pendidikan Matematika PARADIKMA*, 6(1): 27-48.

Susanto. 2012. *Geometri Analitik Dasar*. Jember: FKIP Universitas Jember.

Tsukerman, E. On Polygons Admitting a Simson Line as Discrete Analogs of Parabolas. *Forum Geometricorum*, 13: 197-208.

Veronica, R. B. 2011. *Aljabar Linear Elementer 2*. Semarang: UNNES.