UJM 1 (2) (2012)

UNNES Journal of Mathematics

http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujm

METODE MULTIPLE TIME SCALE UNTUK PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL TAK LINEAR SISTEM DOUBLE SHOCKBREAKER

Ismi Widyaningrum✉ , St. Budi Waluya dan Wuryanto

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 lantai 1 Kampus Sekaran, Gunungpati, Semarang, 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Juli 2012
Disetujui Agustus 2012
Dipublikasikan
Nopember2012

Keywords:
Double shockbreaker
Perturbation
Multiple Time Scale method
Fourth Runge Kutta method.

Abstrak

Persamaan diferensial linear muncul dalam banyak model fenomena kehidupan nyata. Persamaan diferensial linear orde dua memegang peranan penting dalam masalah gerak, khususnya dalam masalah sistem pegas massa. Dalam dunia otomotif dikenal *double shockbreaker* pada sepeda motor yang dapat dianalogikan dengan sistem pegas yang disusun secara paralel dengan satu beban sehingga didapat persamaan dari model matematika. Model matematikanya berupa persamaan kasus pada keadaan setimbang dan kasus dengan gaya gesek sebagai redaman. Masalah umumnya timbul adalah sulitnya menemukan solusi eksak (analitik) dari model matematika sehingga diperlukan teknik perturbasi untuk menyelesaikannya. Salah satu teknik perturbasi yang dapat digunakan adalah metode *Multiple Time Scale*. Metode ini menghasilkan solusi sementara dan aproksimasi yang mendekati solusi eksaknya, dapat dilihat dari plot solusi yang akan dihasilkan metode ini hampir mirip dengan plot solusi persamaan yang dihasilkan secara numerik oleh metode Runge Kutta Order Empat. Oleh karena itu, dilakukan perbandingan keakuratan hasil antara plot solusi metode *Multiple Time Scale* dengan metode Runge Kutta Order Empat.

Abstract

The linear differential equation appears in a number of real life phenomenon models. The two-order linear differential equation holds an important line in movement process, mainly in mass spring system. Within the automotive aspect it is known as *double shockbreaker* in motorcycle which analogy be as a parallel-mounted spring system with one load and therefore formed an equation of a math model. The math model is in the form of case equation in a balanced state and the case with friction as the damper. The most frequent main problem is that is hard to find a scientific solution (analytic) from the math model so a perturbation model is needed to solve it. One of the applicable perturbation techniques is the *Multiple Time Scale* method. This method results in a temporary solution and approximation which is similar to the scientific method, whereas it could be seen that from the solution plot resulted by this method is similar with the solution of equation resulted from Fourth Order Runge Kutta method. Therefore, an accurancy comparison of the results is done between *Multiple Time Scale* method with Fourth Order Rungge Kutta method solution plot.

✉ Alamat korespondensi:
E-mail: oryza_ismiva@yahoo.com

ISSN 2252-6943

Pendahuluan

Banyak fenomena-fenomena yang melahirkan model matematika, namun model matematikanya mengandung laju perubahan, sehingga diperlukan persamaan diferensial sebagai perhitungan matematis untuk memecahkan masalah-masalah tersebut (Kusumah, 1989). Finizio dan Ladas (1988), persamaan diferensial dapat dikelompokkan dalam dua kelas besar yaitu persamaan diferensial linear dan tak linear. Persamaan diferensial linear muncul dalam fenomena kehidupan nyata. Persamaan diferensial linear orde dua memegang peranan penting dalam masalah gerak, khususnya dalam masalah sistem pegas massa.

Dalam dunia otomotif, kenyamanan berkendaraan sangat dipengaruhi pegas yang terdapat di dalam *shockbreaker*. Pada sepeda motor ada yang menggunakan sistem *mono shockbreaker* dan *double shockbreaker*. Sepeda motor yang menggunakan sistem *mono shockbreaker* dapat dianalogikan dengan sistem satu pegas dan satu beban, sedangkan sistem *double shockbreaker* pada sepeda motor dapat dianalogikan dengan sistem dua pegas yang disusun secara paralel dengan satu beban (Pauliza, 2008: 140). Dalam penelitian ini yang akan dibahas adalah persamaan diferensial tak linear dari sistem *double shockbreaker* dimana persamaannya diketahui dari model matematika.

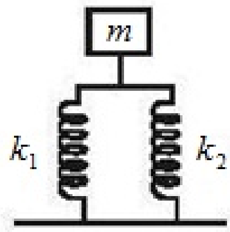
Persamaan diferensial tak linear khususnya yang mengandung suku-suku gangguan (perturbasi) dapat diselesaikan dengan menggunakan metode-metode perturbasi. Salah satu metode perturbasi yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial tak linear adalah metode *Multiple Time Scale*. Metode *Multiple Time Scale* sangat baik untuk aproksimasi solusi persamaan diferensial tak linear (Horsen & Brake, 2009: 401). Metode ini menghasilkan solusi sementara dan aproksimasi yang mendekati solusi eksaknya (Pakdemerli & Boyaci, 1999: 273). Oleh karena suku-suku sekuler dalam persamaan aproksimasi dapat dihilangkan sehingga suku-suku yang menyebabkan tidak terbatasnya solusi dapat dieliminir atau dibuang (Waluya, 2009: 98). Jadi dapat disimpulkan bahwa metode ini memberikan hasil yang sangat akurat ketika parameter gangguannya kecil.

Dari latar belakang tersebut, maka penulis merumuskan beberapa permasalahan yaitu bagaimana model matematika dari sistem *double shockbreaker* pada sepeda motor, bagaimana solusi persamaan diferensial tak linear dari sistem *double shockbreaker* pada sepeda motor dengan menggunakan metode *Multiple Time Scale*, bagaimana aplikasi program *Maple* untuk visualisasi solusi persamaan diferensial tak linear dari sistem *double shockbreaker* pada sepeda motor.

Sejalan dengan rumusan masalah, tujuan penulisan ini adalah untuk mengetahui model matematika dari sistem *double shockbreaker* pada sepeda motor, mengetahui solusi persamaan diferensial tak linear dari sistem *double shockbreaker* pada sepeda motor dengan menggunakan metode *Multiple Time Scale*, mengetahui aplikasi program *Maple* untuk visualisasi solusi persamaan diferensial tak linear dari sistem *double shockbreaker* pada sepeda motor dengan menggunakan metode *Multiple Time Scale*.

Model Matematika

Kasus pertama yaitu gaya pemulih F diasumsikan tidak mendapat gaya luar, maka gaya yang bekerja pada massa m hanya gaya pegas. Gaya pegas ini bergantung pada elastisitas pegas dan dinyatakan secara linear oleh posisi massa terhadap posisi setimbang. Hubungan ini didekati secara linear yang dikenal dengan *Hukum Hooke*,yaitu $F = -k.y$, jadi untuk persamaan pada sistem *double shockbreaker* atau dianalogikan sebagai sistem dua pegas yang disusun secara paralel dengan satu beban seperti gambar di bawah ini



Gambar 1. *Double shockbreaker* merupakan analogi dari susunan paralel pegas

Persamaannya dinyatakan sebagai berikut,

$$F = -(k_1 + k_2).y \qquad (1)$$

dimana k adalah konstanta pegas dan y : adalah posisi massa terhadap posisi setimbang. Tanda minus menunjukkan bahwa arah gaya pemulih berlawana dengan arah simpangannya. Kecepatan sesaat massa tersebut adalah

$$v=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{dy}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2} \qquad (2)$$

Sedangkan percepatan sesaat dari massa tersebut adalah

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{dy}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2} \qquad (3)$$

Dengan menggunakan *Hukum Hooke* dan *Newton* kedua, persamaan gerak untuk massa m dengan mengabaikan gaya gesekan adalah

$$m.a=-(k_1+k_2).y$$

$$\Leftrightarrow m.\frac{d^2y}{dt^2}=-(k_1+k_2).y$$

$$\Leftrightarrow m.\frac{d^2y}{dt^2}+(k_1+k_2).y=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{(k_1+k_2)}{m}y=0 \qquad (4)$$

Sedangkan kasus kedua gaya gesek yang terjadi pada massa yang merupakan suatu redaman diperhitungkan. Dimana besarnya gaya gesek sebanding dengan kecepatan, sehingga

$$F_{gesek}=-b\,v=-2\,m\,\gamma\frac{dy}{dt} \qquad (5)$$

dengan $\gamma=\frac{b}{2m}=$ frekuensi redaman.

Pada pegas yang dipengaruhi gaya-gaya yang bekerja sesuai dengan Hukum *Newton* Kedua, sehingga

$$\sum F=m.a$$

$$\Leftrightarrow -(k_1+k_2)y-2m\gamma\frac{dy}{dt}=m.a$$

$$\Leftrightarrow -(k_1+k_2)y-2m\gamma\frac{dy}{dt}=m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\Leftrightarrow (k_1+k_2)y+2m\gamma\frac{dy}{dt}+m\frac{d^2y}{dt^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2y}{dt^2}+2\gamma\frac{dy}{dt}+\frac{(k_1+k_2)}{m}y=0 \qquad (6)$$

Jadi model matematika untuk kasus sistem *double shockbreaker* dengan redaman adalah

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\gamma\frac{dy}{dt}+\frac{(k_1+k_2)}{m}y=0$$

Metode Multiple Time Scale

Metode *Multiple Time Scale* adalah salah satu metode perturbasi yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial tak linear yang mengandung suku-suku perturbasi (gangguan). Metode *Multiple Time Scale* memberikan solusi bagaimana menghilangkan suku-suku tersebut, sehingga dapat menghasilkan solusi yang tidak menjauh dari solusi eksaknya (Waluya, 2009: 98). Langkah-langkah dalam menyelesaikan persamaan diferensial tak linear dengan metode *Multiple Time Scale* adalah

1. Mengasumsikan solusi persamaan dalam sebuah perluasan n dalam bentuk deret pangkat dalam ε yaitu

$$y(t_1,t_2)=y_0(t_1,t_2)+\varepsilon y_1(t_1,t_2)+\varepsilon^2y_2(t_1,t_2)+\ldots$$

2. Mencari turunan pertama dan kedua dari solusi tersebut kemudian mensubstitusikannya dalam persamaan diferensial tak linear yang akan diselesaikan, sampai didapatkan suku-suku sejenis dalam order ε.

3. Menyelesaikan permasalahan order ε dan didapatkan solusi aproksimasi dari persamaan diferensial.

Kasus pertama.

$$y''+\gamma y=0,\ y(0)=1,\ \frac{dy}{dt}(0)=0 \qquad (7)$$

dimana

$$\gamma=\frac{(k_1+k_2)}{m},\ 0<\gamma<<1$$

Asumsikan solusi persamaan (7) ditulis dalam bentuk deret pangkat dalam ε yaitu:

$$y(t_1,t_2)=y_0(t_1,t_2)+\varepsilon y_1(t_1,t_2)+\varepsilon^2y_2(t_1,t_2)+\ldots \qquad (8)$$

Dengan $t_1=t, t_2=\varepsilon t$ dan

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t_1}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_2}+\ldots \qquad (9)$$

Dengan demikian diperoleh persamaan

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y_0}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial y_0}{\partial t_2} + \varepsilon \frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial y_1}{\partial t_2} + \ldots \qquad (10)$$

$$\frac{d^2 y}{dt_2} = \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_2^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1 \partial t_2} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_2^2} + \ldots \quad (11)$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (8) dan (11) ke persamaan (7) diperoleh

$$\left(\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2} + \gamma y_0\right) + \varepsilon\left(2\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + \gamma y_1\right) + \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_2^2} + 2\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1 \partial t_2} + \gamma y_2\right) + \varepsilon^3\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_2^2}\right) + \ldots = 0 \qquad (12)$$

dari persamaan (12) diperoleh

$O(\varepsilon^0)$ adalah $\left(\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2} + \gamma y_0\right) = 0$

$O(\varepsilon^1)$ adalah $\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + \gamma y_1 = -2\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_2}$

Dari kondisi awal masalah (7) maka untuk order $O(\varepsilon^0)$ menjadi

$$O(\varepsilon^0)\begin{cases} \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2} + \gamma y_0 = 0 \\ y_0 = 1, \frac{\partial y_0}{\partial t_1} = 0, \text{untuk } t_1 = t_2 = 0 \end{cases} \qquad (13)$$

Solusi masalah dalam persamaan (13) dapat diberikan dengan

$$y_0(t_1, t_2) = A_0(t_2)\sin\left(\sqrt{\gamma} t_1\right) + B_0(t_2)\cos\left(\sqrt{\gamma} t_1\right) \qquad (14)$$

Dimana $A_0(t_2)$ dan $B_0(t_2)$ adalah sembarang fungsi dalam t_2 yang memenuhi kondisi $A_0(0) = 0$ dan $B_0(0) = 1$.

maka $y_0(t_1, t_2) = \cos\left(\sqrt{\gamma} t_1\right)$

Masalah dalam order $O(\varepsilon^1)$ diberikan dengan

$$O(\varepsilon^1)\begin{cases} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + \gamma y_1 = -2\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_2} \\ y_1(0) = 1, \frac{\partial y_1}{\partial t_1} = 0, \text{untuk } t_1 = t_2 = 0 \end{cases} \qquad (15)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (14) ke persamaan (15) diperoleh

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + \gamma y_1 + 2A_0'(t_2)\sqrt{\gamma}\cos\left(\sqrt{\gamma} t_1\right) - 2B_0'(t_2)\sqrt{\gamma}\sin\left(\sqrt{\gamma} t_1\right) = 0 \qquad (16)$$

Solusi umum masalah pada persamaan (16) adalah

$$y_1(t_1, t_2) = A_1(t_2)\sin\left(\sqrt{\gamma} t_1\right) + B_1(t_2)\cos\left(\sqrt{\gamma} t_1\right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(\left(-A_0'(t_2) - B_0'(t_2)\left(\sqrt{\gamma} t_1\right)\right)\cos\left(\sqrt{\gamma} t_1\right) - \sin\left(\sqrt{\gamma} t_1\right)A_0'(t_2)\left(\sqrt{\gamma} t_1\right)\right) \qquad (17)$$

Untuk menghilangkan suku-suku sekuler pada persamaan (17) maka harus dipunyai

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} A_0'(t_2) - t_1 B_0'(t_2) = 0 \\ t_1 A_0'(t_2) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Sehingga solusi persamaan (15) adalah $y(t_1, t_2) = \cos\left(\sqrt{\gamma}\, t_1\right)$.

Jadi solusi Multiple Time Scale untuk kasus pertama, persamaan (7) adalah

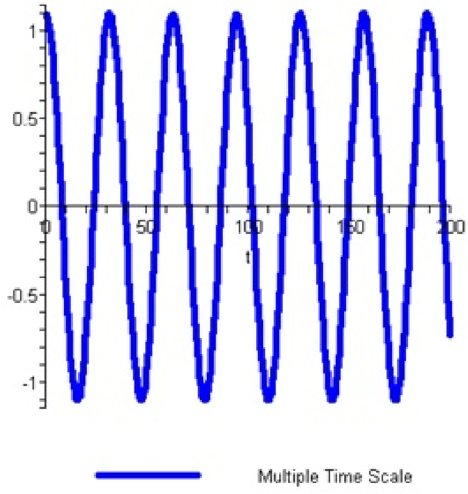
$$y(t, \varepsilon t) = \cos\left(\sqrt{\gamma}\, t\right) + \varepsilon\cos\left(\sqrt{\gamma} t\right) + \ldots$$

Plot solusi aproksimasi persamaan pegas tanpa gaya luar

$$y'' + \gamma y = 0,\ y(0) = 1,\ \frac{dy}{dt}(0) = 0$$

dengan menggunakan metode *Multiple Time Scale* dengan $\varepsilon = 0{,}1$ dan $\gamma = 0{,}04$ diberikan pada Gambar 2.

Plot Solusi Persamaan Kasus pada Keadaan Setimbang dengan Metode *Multiple Time Scale*



Gambar 2. Plot solusi aproksimasi persamaan kasus 1,

$$y'' + \gamma y = 0, y(0) = 1, \frac{dy}{dt}(0) = 0$$

dengan metode *Multiple Time Scale*

Dari Gambar 2, dapat dilihat bahwa untuk nilai t yang semakin besar, solusinya akan menghasilkan nilai yang periodik dengan simpangan tetap yaitu 1. Hal ini disebabkan karena suku sekuler yang terbentuk di dalam perhitungan dihilangkan dengan menggunakan metode *Multiple Time Scale*.

Kasus kedua, dipunyai persamaan

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -(k_1 + k_2)y - 2m\gamma\frac{dy}{dt} \qquad (19)$$

Ekivalen dari persamaan (19) yaitu

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\gamma\frac{dy}{dt} + \frac{(k_1 + k_2)}{m}y = 0.$$

Padakasusgetaranteredam $\frac{k_1 + k_2}{m}$ dimisalkan sebagai α, maka

$$y'' + 2\,\varepsilon s\, y' + \alpha y = 0,\ y(0) = 1, \frac{dy}{dt}(0) = 0 \qquad (20)$$

Asumsikan solusi persamaan (4.19) ditulis dalam deret pangkat dalam ε yaitu:

$$y(t_1, t_2) = y_0(t_1, t_2) + \varepsilon y_1(t_1, t_2) + \varepsilon^2 y_2(t_1, t_2) + \ldots \qquad (21)$$

Dengan $t_1 = t, t_2 = \varepsilon t$ dan

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t_2} + \ldots \qquad (22)$$

dengan demikian diperoleh persamaan

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y_0}{\partial t_1} + \varepsilon\frac{\partial y_0}{\partial t_2} + \varepsilon\frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \varepsilon^2\frac{\partial y_1}{\partial t_2} + \ldots \qquad (23)$$

$$\frac{d^2y}{dt_2} = \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^{\,2}} + 2\varepsilon\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_2} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_2^{\,2}} + \varepsilon\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^{\,2}} + 2\varepsilon^2\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1 \partial t_2} + \varepsilon^3\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_2^{\,2}} + \ldots \qquad (24)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (21), (23) dan (24) ke persamaan (20) diperoleh

$$\left(\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^{\,2}} + \alpha y_0\right) + \varepsilon\left(2\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^{\,2}} + 2s\frac{\partial y_0}{\partial t_1} + \alpha y_1\right) + \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_2^{\,2}} + 2\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1 \partial t_2} + 2s\frac{\partial y_0}{\partial t_1} + 2s\frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \alpha y_2\right) + \varepsilon^3\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_2^{\,2}} + 2s\frac{\partial y_1}{\partial t_2}\right) + \ldots = 0 \qquad (25)$$

dari persamaan (25) diperoleh

$$O(\varepsilon^0) \text{ adalah } \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^{\,2}} + \alpha y_0 = 0$$

$$O(\varepsilon^1) \text{ adalah } 2\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^{\,2}} + 2s\frac{\partial y_0}{\partial t_1} + \alpha y_1 = 0$$

Dari kondisi awal masalah (20) maka untuk order $O(\varepsilon^0)$ menjadi

$$O(\varepsilon^0)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^{\,2}} + \alpha y_0 = 0 \\ y_0 = 1, \dfrac{\partial y_0}{\partial t_1} = 0, \text{untuk } t_1 = t_2 = 0 \end{cases} \qquad (26)$$

Solusi masalah dalam persamaan (26) dapat diberikan dengan

$$y_0(t_1, t_2) = A_0(t_2)\sin\left(\sqrt{\alpha}\, t_1\right) + B_0(t_2)\cos\left(\sqrt{\alpha}\, t_1\right) \qquad (27)$$

dimana $A_0(t_2)$ dan $B_0(t_2)$ adalah sembarang fungsi dalam t_2 yang memenuhi kondisi $A_0(0) = 0$ dan $B_0(0) = 1$.

Maka solusi persamaan (26) menjadi

$$y_0(t_1, t_2) = A_0(t_2)\sin\left(\sqrt{\alpha}\, t_1\right) + B_0(t_2)\cos\left(\sqrt{\alpha}\, t_1\right) \qquad (28)$$

Masalah dalam order

$$O(\varepsilon^1)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^{\,2}} + \alpha y_1 = -2\dfrac{\partial^2 y_0}{\partial t_2 \partial t_1} - 2s\dfrac{\partial y_0}{\partial t_1} \\ y_1(0) = 1, \dfrac{\partial y_1}{\partial t_1} = 0, \text{untuk } t_1 = t_2 = 0 \end{cases} \quad (29)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (27) ke persamaan (29) diperoleh

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^{\,2}} + \alpha y_1 + 2A_0'(t_2)\cos(\sqrt{\alpha} t_1)\sqrt{\alpha} - 2B_0'(t_2) \sin(\sqrt{\alpha}\, t_1)\sqrt{\alpha} + 2\, s\, A_0(t_2)\cos(\sqrt{\alpha}\, t_1)\sqrt{\alpha} - 2\, s\, B_0(t_2)\sin(\sqrt{\alpha}\, t_1)\sqrt{\alpha} = 0 \quad (30)$$

Solusi umum masalah pada persamaan (30) adalah

$$y_1(t_1, t_2) = A_1(t_2)\sin(\sqrt{\alpha}\, t_1) + B_1(t_2)\cos(\sqrt{\alpha}\, t_1) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\big((-A_0'(t_2) - s\, A_0(t_2) - B_0'(t_2)\sqrt{\alpha}\, t_1 - s\, B_0(t_2)\sqrt{\alpha}\, t_1)\cos(\sqrt{\alpha}\, t_1) + \sin(\sqrt{\alpha}\, t_1)(A_0'(t_2)\sqrt{\alpha}\, t_1 + s\, A_0(t_2)\sqrt{\alpha}\, t_1)\big) \quad (31)$$

Untuk menghilangkan suku-suku sekuler pada persamaan (31) maka harus dipunyai

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{-A_0'(t_2)}{\sqrt{\alpha}} - \dfrac{s}{\sqrt{\alpha}} A_0(t_2) - B_0'(t_2)t_1 - s\, B_0(t_2)t_1 \\ A_0'(t_2)t_1 + s\, A_0(t_2)t_1 \end{matrix}\right\} \quad (32)$$

Dari kondisi awal pada persamaan (29) diperoleh

$$A_1(0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} s \text{ dan } B_1(0) = 1$$

maka solusi persamaan (29) adalah

$$y_1(t_1, t_2) = \frac{s}{\sqrt{\alpha}}\sin(\sqrt{\alpha}\, t_1) + \cos(\sqrt{\alpha}\, t_1) - s\, t_1 \cos(\sqrt{\alpha}\, t_1)$$

Jadi solusi *Multiple Time scale* untuk kasus kedua, persamaan (20) adalah

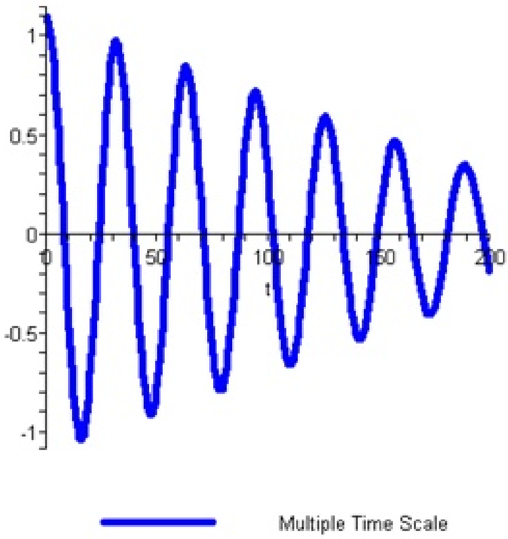
$$y(t, \varepsilon t) = \cos(\sqrt{\alpha}\, t) + \varepsilon\left(\frac{\sin(\sqrt{\alpha}\, t)}{\sqrt{\alpha}} + \cos(\sqrt{\alpha}\, t) - s\, t\cos(\sqrt{\alpha}\, t)\right).$$

Plot solusi aproksimasi persamaan pegas dengan gaya gesek sebagai bentuk redaman $y'' + 2\,\varepsilon s\, y' + \alpha y = 0,$

$$y(0) = 1, \frac{dy}{dt}(0) = 0$$

dengan $\varepsilon = 0{,}1$ dan $s = \alpha = 0{,}04$ menggunakan metode *Multiple Time Scale* diberikan pada Gambar 3.

Plot Solusi Persamaan Kasus Teredam dengan Metode *Multiple Time Scale*



Gambar 3. Plot solusi aproksimasi persamaan kasus 2,

$$y'' + 2\,\varepsilon s\, y' + \alpha y = 0,\ y(0) = 1, \frac{dy}{dt}(0) = 0$$

dengan metode *Multiple Time Scale*

Dari Gambar 3, dapat dilihat bahwa untuk nilai t yang semakin besar, solusinya akan menghasilkan nilai yang periodik dengan simpangan semakin kecil. Hal ini disebabkan karena suku sekuler yang terbentuk di dalam perhitungan dihilangkan dengan menggunakan metode *Multiple Time Scale*.

PERBANDINGAN PLOT SOLUSI

Metode Runge-Kutta merupakan metode popular untuk memecahkan masalah nilai awal untuk suatu sistem persamaan diferensial biasa berikut

$$y' = f(x, y), a \le x \le b, y(a) = y_0 \quad (33)$$

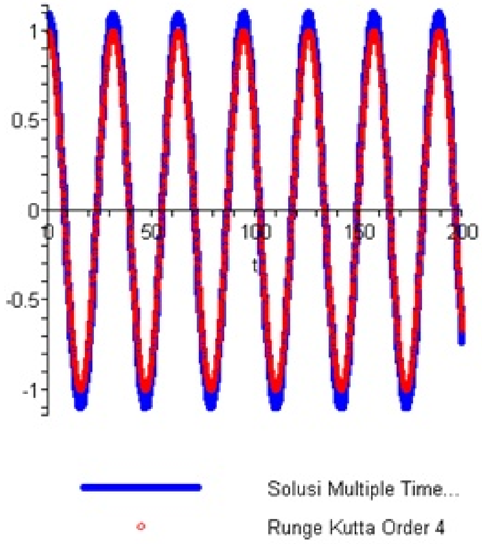
dengan panjang langkah h yang diberikan melalui selang $[a, b]$ sehingga berturut-turut menghasilkan aproksimasi y_n menuju y_{n+1} (Waziri et al., 2010: 51). Tabel langkah perhitungan metode Runge Kutta Order Empat (Lihat Dolu & Tatong, 2011).

Perbandingan plot solusi aproksimasi menggunakan metode *Multiple Time Scale* dan metode Runge Kutta Order 4 dari persamaan kasus pertama

$$y''+\gamma y=0,\ y(0)=1,\ \frac{dy}{dt}(0)=0$$

dengan $\varepsilon=0{,}1$ dan $\gamma=0{,}04$ diberikan pada Gambar 4.

Plot Solusi Persamaan Kasus pada Keadaan Setimbang dengan Metode Multiple Time Scale dan metode Runge Kutta Order 4



Gambar 4. Perbandingan plot solusi persamaan kasus 1,

$$y''+\gamma y=0,\ y(0)=1,\ \frac{dy}{dt}(0)=0$$

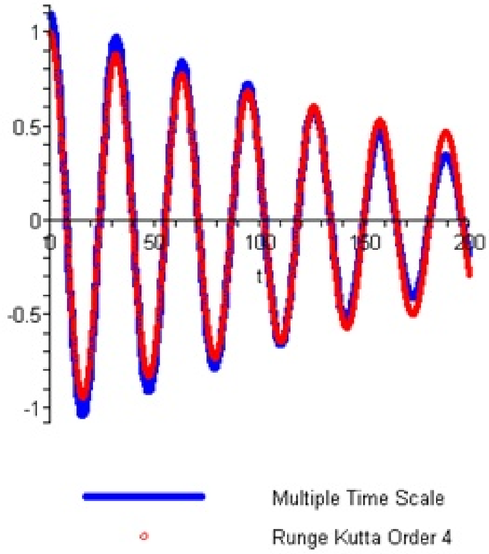
dengan $\varepsilon=0{,}1$ dan $\gamma=0{,}04$

Perbandingan plot solusi aproksimasi menggunakan metode *Multiple Time Scale* dan metode Runge Kutta order 4 dari persamaan kasus dengan gaya gesek sebagai bentuk redaman

$$y''+2\varepsilon s y'+\alpha y=0,\ y(0)=1,\ \frac{dy}{dt}(0)=0$$

dengan $\varepsilon=0{,}1$ dan $\gamma=0{,}04$ diberikan pada Gambar 5.

Plot Solusi Persamaan Pegas Teredam dengan Metode Multiple Time Scale dan metode Runge Kutta Order 4



Gambar 5. Perbandingan plot solusi persamaan kasus 2,

$$y''+2\varepsilon s y'+\alpha y=0,\ y(0)=1,\ \frac{dy}{dt}(0)=0$$

dengan $\varepsilon=0{,}1$ dan $s=\alpha=0{,}04$

Daftar Pustaka

Dolu, A. & B. Tatang. 2011. Analisis Getaran Non Linier dan Fenomena Chaos pada Solusi Persamaan Diferensial Duffing. *Jurnal SMARTek*, 9(3):173-186.

Finizio, N. & Ladas, G. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern.* Jakarta: Erlangga.

Horssen, W.T. & Brake, M.C. 2009. On the multiple scales perturbation method for difference equations. *Nonlinear Dyn*, 55:401-418.

Kusumah, Y.S. 1989. *Persamaan Diferensial*. Jakarta : Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi Depdikbud.

Pakdemirli, M. & Boyaci, H. 1999. A Comparison of Different Versions of The Method of Multiple Scales for an Arbitrary Model of ODD Nonlinearities. *Mathematical & Computational Applications*, 5(3):273-282.

Pauliza, O. 2008. *Fisika Kelompok Teknologi dan Kesehatan untuk Sekolah Menengah Kejuruan Kelas X*. Jakarta: Grasindo.

Waluya, S. B. 2009. *Metode Perturbasi untuk Nonlinear Oscillator.* Semarang: Unnes Press.

Waziri, M.Y., H. Musa, Saidu, I. 2010. A Simplified Derivation and Analysis of Fourth Order Runge Kutta Method. *International Journal of Computer Applications*, 9(8):51-55.