



MODEL EPIDEMI SEIR PADA PENYEBARAN PENYAKIT CAMPAK DENGAN PENGARUH VAKSINASI

Siti Kholisoh ✉, St. Budi Waluya, dan Muhammad Kharis

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 lantai 1 Kampus Sekaran, Gunungpati, Semarang, 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Juli 2012
Disetujui Agustus 2012
Dipublikasikan
Nopember 2012

Keywords:
Measles; SEIR epidemic;
equilibrium point;
vaccination.

Abstrak

Campak adalah suatu penyakit akut yang sangat menular yang disebabkan oleh virus campak golongan Paramyxovirus. Penyakit campak tersebut dinilai berbahaya karena dapat menyebabkan komplikasi, kerusakan otak dan organ tubuh lainnya, cacat seumur hidup, kelumpuhan dan bahkan kematian. Dalam tulisan ini akan dikaji model matematika untuk penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi. Model matematika yang digunakan berupa model epidemi SEIR dengan laju kelahiran diasumsikan sama dengan laju kematian. Dalam model ini terdapat pula dua titik kesetimbangan, yakni titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Analisis yang dilakukan menghasilkan angka rasio reproduksi dasar R_0 . Setelah dianalisis kestabilan pada titik kesetimbangan, titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotis untuk $R_0 < 1$. Sedangkan titik kesetimbangan endemik akan stabil asimtotis untuk $R_0 > 1$. Untuk mengilustrasikan model tersebut maka dilakukan simulasi model dengan menggunakan program Maple. Untuk $p < p_{\min}$ vaksinasi yang dilakukan belum berhasil membuat penyakit menghilang karena nilai $R_0 > 1$. Untuk $p > p_{\min}$ berhasil membuat penyakit menghilang dari populasi karena nilai $R_0 < 1$.

Abstract

Measles is an acute highly contagious disease caused by Paramyxovirus. Measles is considered as a dangerous disease because it cause complications, brain and other organs damage, lifelong disability, paralysis and even death. This paper studies a mathematical model for the spread of measles by vaccination effect. Mathematical model which is used is SEIR epidemic model where birth rate is assumed equal to mortality rate. In this model, there are two equilibrium points; they are disease-free point and endemic point. The analysis showed the numbers of basic reproduction ratio. Having analyzed the stability of the equilibrium point, the disease-free equilibrium point will be asymptotically stable $R_0 < 1$. While the endemic equilibrium will be asymptotically stable to $R_0 > 1$. To illustrate the model, simulation model was carried out using the program Maple. For $p < p_{\min}$, the vaccination had not been able to make the disease disappear because the value is $R_0 > 1$. In $p > p_{\min}$ successfully make the disease disappear from the population because of the value is $R_0 < 1$.

A. Pendahuluan

Campak adalah suatu penyakit akut yang sangat menular yang disebabkan oleh virus campak golongan Paramyxovirus. Penyakit ini ditandai dengan gejala awal demam, batuk, pilek, dan konjungtivis yang kemudian diikuti dengan bercak kemerahan pada kulit (rash) (Widoyono, 2005: 71). Kinbaby (2008) menyatakan bahwa penyakit campak (measles) tersebut dinilai berbahaya karena dapat menyebabkan komplikasi, kerusakan otak dan organ tubuh lainnya, cacat seumur hidup, kelumpuhan dan bahkan kematian.

Perkembangan ilmu pengetahuan di bidang matematika juga turut memberikan peranan penting dalam mencegah meluasnya penyebaran penyakit campak (measles) (Castelli & Romanelli, 2009). Peranan tersebut berupa model matematika yang mempelajari penyebaran penyakit. Model matematika juga dapat membantu dalam prediksi pengendalian epidemi di masa mendatang agar tidak terjadi endemik. Penyebaran penyakit campak dapat dibentuk menjadi sebuah model epidemi. Model epidemi yang dimaksud yaitu model SEIR. Tessa (2006) menyebutkan bahwa pada model SEIR, populasi dibagi menjadi empat kompartemen yakni populasi rentan (susceptibles), populasi laten (exposed), populasi terinfeksi (infectious), dan populasi kebal penyakit (recovered).

Berdasarkan data dari WHO, penyebaran penyakit campak dapat ditekan dengan program vaksinasi. Sampai saat ini, program vaksinasi masih dipercaya sebagai cara yang paling efektif dalam menekan penyebaran penyakit campak. Oleh karena itu, vaksinasi perlu diperhatikan dalam model sebagai upaya untuk mencegah meluasnya penyakit.

Dari latar belakang tersebut, maka penulis merumuskan beberapa permasalahan yaitu bagaimana menurunkan model epidemi SEIR pada penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi, bagaimana menentukan titik kesetimbangan dan analisis kestabilan pada penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi, dan bagaimana simulasi model pada penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi menggunakan program Maple.

Sejalan dengan rumusan masalah, tujuan penulisan ini adalah untuk mengetahui

penurunan model epidemi SEIR pada penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi, mengetahui titik kesetimbangan dan analisis kestabilan pada penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi, dan mengetahui simulasi model pada penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi menggunakan program Maple.

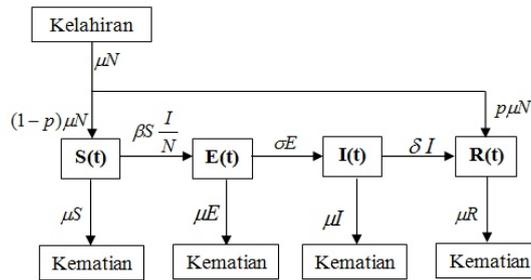
B. Pemodelan Matematika

Penyakit campak (measles) mempunyai periode laten (latent period). Adanya periode laten ini menjadi alasan pembentukan model SEIR, yakni muncul kelas ekspose (Exposed). Fakta ini telah diperhatikan oleh beberapa peneliti diantaranya Zhang & Ma (2003), Li & Jin (2005, 2006), Juan (2006), Tessa (2006), Zhang & Teng (2007), dan Li & Fang (2009). Dari beberapa penelitian tersebut belum ada yang membahas tentang pemodelan matematika pada penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi menggunakan model epidemi SEIR dengan populasi konstan. Berdasarkan keadaan tersebut akan dibahas model epidemi SEIR pada penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi.

Dalam pembentukan model ini dibatasi oleh beberapa asumsi. Asumsi-asumsi yang digunakan dalam model penyebaran penyakit campak sebagai berikut. (1) Jumlah populasi diasumsikan cukup besar. (2) Laju kelahiran dan laju kematian diasumsikan sama, sehingga total populasi diasumsikan konstan. (3) Populasi diasumsikan tertutup (tidak ada imigran dan emigran). (4) Semua bayi yang baru lahir diasumsikan rentan terhadap penyakit campak. (5) Populasi diasumsikan bercampur secara homogen yang berarti setiap individu mempunyai kemungkinan yang sama dalam melakukan kontak dengan individu lain. (6) Penyakit campak memiliki periode laten. (7) Individu yang terinfeksi penyakit campak dapat sembuh. (8) Diasumsikan hanya terdapat satu penyakit yang menyebar dalam populasi.

Selanjutnya, asumsi yang digunakan terhadap vaksinasi dalam model ini adalah sebagai berikut. (1) Vaksin hanya diberikan pada individu yang baru lahir. (2) Kemampuan vaksinasi adalah 100%. (3) Kekebalan yang terjadi karena vaksin bersifat permanen. Hal tersebut berarti individu yang mendapat vaksin tidak dapat terinfeksi oleh penyakit yang sama sampai waktu yang tidak terbatas.

Secara skematis proses penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi dalam suatu populasi dapat disajikan dalam diagram transfer pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram Transfer Penyebaran Penyakit Campak dengan Pengaruh Vaksinasi

Model matematika dari diagram transfer diatas selengkapnya dapat diekspresikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= (1-p)\mu N - \beta S \frac{I}{N} - \mu S, \\ \frac{dE}{dt} &= \beta S \frac{I}{N} - (\sigma + \mu)E, \\ \frac{dI}{dt} &= \sigma E - (\delta + \mu)I, \\ \frac{dR}{dt} &= p\mu N + \delta I - \mu R, \\ N &= S + E + I + R. \end{aligned} \tag{1}$$

Dengan $S(t), E(t), I(t)$ dan $R(t)$ masing - masing menyatakan jumlah individu yang rentan, laten, infeksi dan sembuh saat t . Dengan parameter-parameter yang digunakan sebagai berikut. Parameter μ menyatakan laju kelahiran dan laju kematian tiap individu pada populasi, β merupakan peluang individu rentan menjadi individu laten setelah berinteraksi dengan individu terinfeksi, σ menyatakan laju transfer dari laten menjadi terinfeksi, δ menyatakan laju kesembuhan tiap individu dan p proporsi vaksinasi. Semua parameter tersebut bernilai positif dan untuk p bernilai $0 \leq p \leq 1$.

Dari sistem (1) diperoleh $\frac{dN}{dt} = 0$ sehingga $N(t) = k$ untuk k bilangan real. Karena $N(t)$ konstan, sistem (1) dapat diskala dengan total populasi N untuk menyederhanakan sistem (1) dan memudahkan analisis yang dilakukan. Proporsi banyaknya individu pada masing-masing kelompok dapat dinyatakan

$$s = \frac{S}{N}, e = \frac{E}{N}, i = \frac{I}{N}, r = \frac{R}{N}. \tag{2}$$

Dari persamaan (2), diperoleh $s + e + i + r = \frac{S}{N} + \frac{E}{N} + \frac{I}{N} + \frac{R}{N} = \frac{N}{N} = 1$.

Oleh karena itu, sistem (1) ekuivalen dengan sistem berikut

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= (1-p)\mu - \beta si - \mu s, \\ \frac{de}{dt} &= \beta si - (\sigma + \mu)e, \\ \frac{di}{dt} &= \sigma e - (\delta + \mu)i, \\ \frac{dr}{dt} &= p\mu + \delta i - \mu r. \end{aligned} \tag{3}$$

Sistem (3) merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear yang lebih sederhana dari sistem (1) yang mempresentasikan model epidemi SEIR dengan pengaruh vaksinasi.

C. Analisa Model

Titik kesetimbangan diperoleh dengan menjadikan persamaan dari sistem (3) sama dengan nol. Saat diperoleh $i=0$ titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu

$$E_0 = (s, e, i, r) = (1-p, 0, 0, p) \text{ uk diperoleh } i \neq 0 \text{ k kesetimbangan endemik}$$

$E_1 = (s^*, e^*, i^*, r^*)$. Selengkapnya diberikan dalam teorema berikut ini:

Teorema 1

Dipunyai $R_0 = \frac{\beta\sigma(1-p)}{(\delta + \mu)(\sigma + \mu)}$.

Dari sistem persamaan (3) di atas. Berdasarkan nilai R_0 tersebut diperoleh

1. Jika $R_0 \leq 1$ maka sistem persamaan (3)

hanya mempunyai 1 titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = (s, e, i, r) = (1-p, 0, 0, p)$

2. Jika $R_0 > 1$ maka sistem persamaan (3) mempunyai 2 titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit

$E_0 = (s, e, i, r) = (1-p, 0, 0, p)$ dan titik kesetimbangan tidak bebas penyakit atau endemik $E_1 = (s^*, e^*, i^*, r^*)$ dengan

$$s^* = \frac{(\delta + \mu)(\sigma + \mu)}{\sigma\beta},$$

$$e^* = \frac{\mu(1-p)}{(\sigma + \mu)} - \frac{\mu(\delta + \mu)}{\sigma\beta},$$

$$i^* = \frac{(1-p)\mu\sigma}{(\delta + \mu)(\sigma + \mu)} - \frac{\mu}{\beta}, \text{ dan}$$

$$r^* = \frac{\beta\sigma\delta(1-p) + (p\beta - \delta)(\delta + \mu)(\sigma + \mu)}{\beta(\delta + \mu)(\sigma + \mu)}.$$

Bukti:

Titik kesetimbangan dicari dengan

membuat nol $\frac{ds}{dt}, \frac{de}{dt}, \frac{di}{dt}$, dan $\frac{dr}{dt}$ diperoleh

sistem (4) sebagai berikut.

$$(1-p)\mu - \beta si - \mu s = 0,$$

$$\beta si - (\sigma + \mu)e = 0, \tag{4}$$

$$\sigma e - (\delta + \mu)i = 0,$$

$$p\mu + \delta - \mu r = 0.$$

Penentuan eksistensi titik kesetimbangan bebas penyakit tidak tergantung dari syarat R_0 sehingga dapat langsung ditentukan dari sistem (4) yaitu dengan membuat $i=0$ yang disubstitusikan pada

persamaan $\frac{ds}{dt}, \frac{de}{dt}, \frac{dr}{dt}$ diperoleh dan $s = 1-p$,

$e = 0, i = 0$ dan $r = p$. Sehingga saat $i=0$ diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit

$E_0 = (s, e, i, r) = (1-p, 0, 0, p)$. Maka sistem (3) pasti mempunyai titik kesetimbangan bebas penyakit untuk segala kondisi R_0 .

Penentuan titik kesetimbangan endemik dilakukan dengan mencari nilai $i \neq 0$ dan mensyaratkan $i > 0$.

Dari persamaan pertama, ketiga dan

keempat pada sistem (4) diperoleh:

$$s = \frac{(1-p)\mu}{\beta i + \mu}, e = \frac{(\delta + \mu)i}{\sigma}, \text{ dan } r = \frac{i\delta + p\mu}{\mu}.$$

Substitusikan ke persamaan kedua pada sistem (4) diperoleh nilai $i=0$ atau

$$\frac{(1-p)\beta\mu}{\beta i + \mu} - (\sigma + \mu)\frac{(\delta + \mu)}{\sigma} = 0.$$

Saat $i \neq 0$, diperoleh $i^* = \frac{(1-p)\mu\sigma}{(\delta + \mu)(\sigma + \mu)} - \frac{\mu}{\beta} =$

$$\frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1).$$

Dipunyai $R_0 > 1$.

Jelas nilai $i^* > 0$.

Sehingga saat $i^* > 0$ diperoleh titik kesetimbangan tidak bebas penyakit atau endemik

$E_1 = (s^*, e^*, i^*, r^*)$ dengan

$$s^* = \frac{(\delta + \mu)(\sigma + \mu)}{\sigma\beta},$$

$$e^* = \frac{\mu(1-p)}{(\sigma + \mu)} - \frac{\mu(\delta + \mu)}{\sigma\beta},$$

$$i^* = \frac{(1-p)\mu\sigma}{(\delta + \mu)(\sigma + \mu)} - \frac{\mu}{\beta}, \text{ dan}$$

$$r^* = \frac{\beta\sigma\delta(1-p) + (p\beta - \delta)(\delta + \mu)(\sigma + \mu)}{\beta(\delta + \mu)(\sigma + \mu)}.$$

Karena penentuan titik kesetimbangan bebas penyakit tidak tergantung dari syarat R_0 dan penentuan titik kesetimbangan endemik tergantung dari syarat $R_0 > 1$

Jadi untuk $R_0 > 1$ diperoleh 2 titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit

$E_0 = (s, e, i, r)$ dan titik kesetimbangan endemik $E_1 = (s^*, e^*, i^*, r^*)$.

Teorema 2

1. Jika $R_0 < 1$ maka titik kesetimbangan E_0 stabil asimtotik lokal
2. Jika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan E_0 tidak stabil dan titik kesetimbangan endemik E_1 stabil asimtotik lokal.

Bukti :

Matriks jacobian model penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi adalah

$$J^*(E) = \begin{pmatrix} -\beta i - \mu & 0 & -\beta s & 0 \\ \beta i & -(\sigma + \mu) & \beta s & 0 \\ 0 & \sigma & -(\delta + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\mu \end{pmatrix}$$

Untuk $E_0 = (s, e, i, r) = (1-p, 0, 0, p)$ dan $E_1 = (s^*, e^*, i^*, r^*)$ dengan

$$s^* = \frac{(\delta + \mu)(\sigma + \mu)}{\sigma \beta},$$

$$e^* = \frac{\mu(1-p)}{(\sigma + \mu)} - \frac{\mu(\delta + \mu)}{\sigma \beta},$$

$$i^* = \frac{(1-p)\mu\sigma}{(\delta + \mu)(\sigma + \mu)} - \frac{\mu}{\beta}, \text{ dan}$$

$$r^* = \frac{\beta\sigma\delta(1-p) + (p\beta - \delta)(\delta + \mu)(\sigma + \mu)}{\beta(\delta + \mu)(\sigma + \mu)}.$$

Untuk kasus E_0 , diperoleh semua nilai eigen negatif apabila $R_0 < 1$ dan ada satu nilai eigen yang positif apabila $R_0 > 1$. Dengan kata lain jika $R_0 < 1$ maka titik kesetimbangan E_0 stabil asimtotik lokal dan jika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan E_0 tidak stabil. Untuk kasus E_1 diperoleh persamaan karakteristiknya

$$(\lambda + \mu)(c_0\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3) = 0$$

dengan

$$c_0 = 1, c_1 = \delta + 3\mu + \sigma + \beta i^*,$$

$$c_2 = \sigma\delta + 2\sigma\mu + 2\mu\delta + 3\mu^2 + \beta i^* \delta + \beta i^* 2\mu + \beta i^* \sigma - \sigma\beta s^*, \text{ dan}$$

$$c_3 = \beta i^* \sigma\delta + \beta i^* \sigma\mu + \beta i^* \mu\delta + \beta i^* \mu^2 + \mu\sigma\delta + \mu^2\sigma + \mu^2\delta + \mu^3 - \mu\sigma\beta s^*$$

Diperoleh nilai eigen yaitu $\lambda_1 = -\mu$. Jelas nilai c_0, c_1 positif dan $c_2, c_3, c_1c_2 - c_0c_3$ positif saat $R_0 > 1$. Dengan menggunakan kriteria Ruth Hurwitz untuk polinom pangkat 3 diperoleh simpulan bahwa $c_0\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3 = 0$ mempunyai akar-akar dengan bagian real negatif. Maka titik kesetimbangan endemik E_1 stabil asimtotik lokal.

D. Simulasi Model

Simulasi dilakukan dengan memberikan nilai-nilai untuk masing-masing parameter

sesuai dengan kondisi R_0 dengan teorema yang telah diberikan di atas. Simulasi ini diberikan untuk memberikan gambaran geometris dari teorema eksistensi dan kestabilan dari titik-titik kesetimbangan model ini.

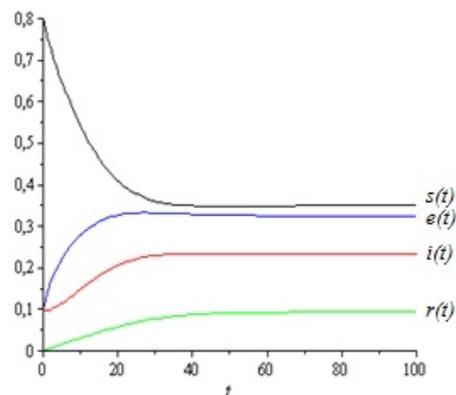
Berdasarkan penjelasan makna nilai-nilai parameter, nilai μ menyatakan rata-rata jumlah individu yang lahir dan jumlah individu yang meninggal tiap satuan waktu, β menyatakan rata-rata proporsi jumlah kontak yang menyebabkan individu rentan menjadi laten setelah melakukan kontak dengan individu yang terinfeksi, $\sigma\sigma^{-1}$ menyatakan rata-rata masa laten atau masa inkubasi, menyatakan $r\delta^{-1}$ rata masa terinfeksi dan p menyatakan rata-rata proporsi vaksinasi. Nilai-nilai parameter yang diberikan untuk membuat simulasi dari model penyebaran penyakit campak, disajikan dalam Tabel 1.

Tabel 1. Nilai Parameter untuk Simulasi Model

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
μ	0.1	σ	0.1
β	0.8	δ	0.04

Kondisi awal rasio jumlah penduduk pada kelas susceptibles, exposed, infectious, dan recovered masing-masing adalah 0.8, 0.1, 0.1 dan 0.

Jika penyakit tersebut tidak dicegah dengan program vaksinasi maka nilai $p = 0$. Proporsi individu susceptibles, exposed, infectious, dan recovered untuk $p = 0$ dapat ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Proporsi individu susceptibles $s(t)$, exposed $e(t)$, infectious $i(t)$, dan recovered $r(t)$.

Pada kondisi setimbang tersebut, penyakit akan selalu ada sampai waktu tak

terbatas. Kondisi setimbang dicapai saat $E_1 = (s^*, e^*, i^*, r^*) = (0.350, 0.325, 0.232, 0.093)$. Titik E_1 tersebut merupakan titik kesetimbangan endemik karena nilai $i^* \neq 0$. Selanjutnya, akan ditentukan kestabilan dari titik kesetimbangan endemik E_1 . Besarnya rasio reproduksi dasar pada saat adalah $R_0 = 2,86$. Nilai $R_0 > 1$ mengakibatkan keempat nilai eigen matriks Jacobian pada model ini berupa bilangan real negatif. Oleh karena itu, titik kesetimbangan endemik E_1 bersifat stabil asimtotis.

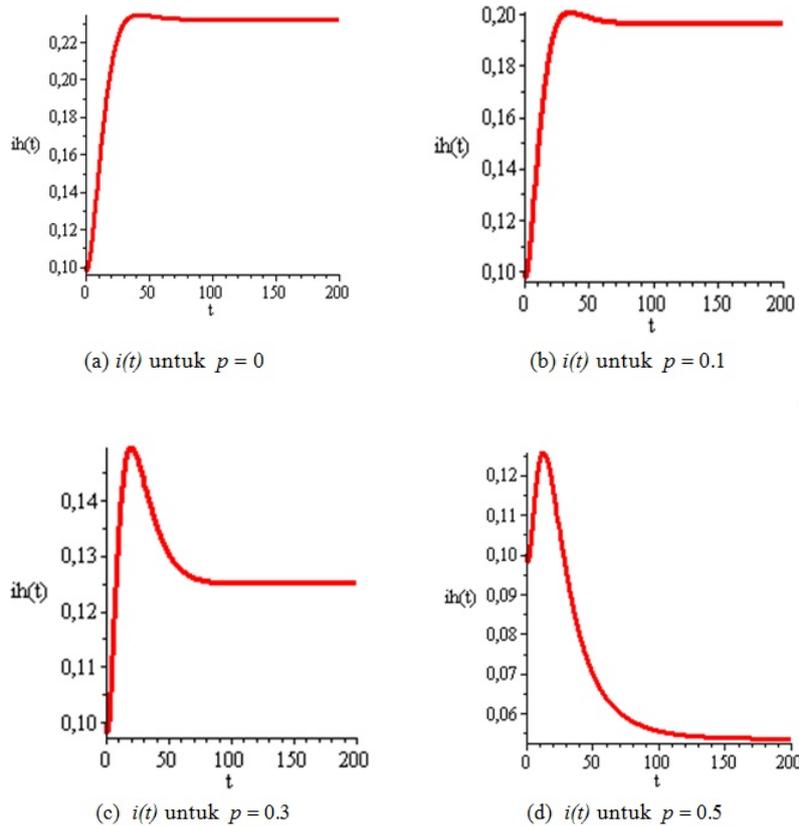
Selanjutnya, program vaksinasi dilakukan untuk mencegah meluasnya penyakit. Vaksinasi dianggap berhasil jika pada waktu tertentu penyakit akan menghilang dari populasi. Rasio reproduksi dasar dapat digunakan untuk menentukan apakah penyakit

tersebut akan menghilang dari populasi atau bersifat endemik. Penyakit akan menghilang dari populasi pada waktu tertentu jika $R_0 < 1$, sedangkan penyakit akan tetap ada sampai waktu yang tidak terbatas jika $R_0 > 1$.

Jika dilakukan program vaksinasi, maka tingkat vaksinasi minimumnya adalah $p = 0.66$.

Besarnya rasio reproduksi dasar pada saat $p = 0.66$ adalah $R_0 = 0.97$, nilai $R_0 < 1$ nilai parameter yang tetap, akan diselidiki bagaimana pengaruh vaksinasi jika tingkat vaksinasi yang dilakukan lebih kecil dari tingkat vaksinasi minimum yaitu $p = 0.66$.

Gambar 3 menunjukkan proporsi individu *infectious* untuk tingkat vaksinasi yang bervariasi yang lebih kecil dari tingkat vaksinasi minimum.



Gambar 3. Proporsi individu *infectious* untuk $p = 0$, $p = 0.1$, $p = 0.3$, dan $p = 0.5$.

Dengan demikian, jika $p < 0.66$ maka penyakit tidak akan menghilang dari populasi sampai waktu yang tidak terbatas. Kondisi kesetimbangan yang dicapai merupakan titik

kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan dan rasio reproduksi dasar untuk $p = 0$, $p = 0.1$, $p = 0.3$ dan $p = 0.5$ disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Titik kesetimbangan dan rasio reproduksi dasar untuk $p = 0, p = 0.1, p = 0.3$ dan $p = 0.5$

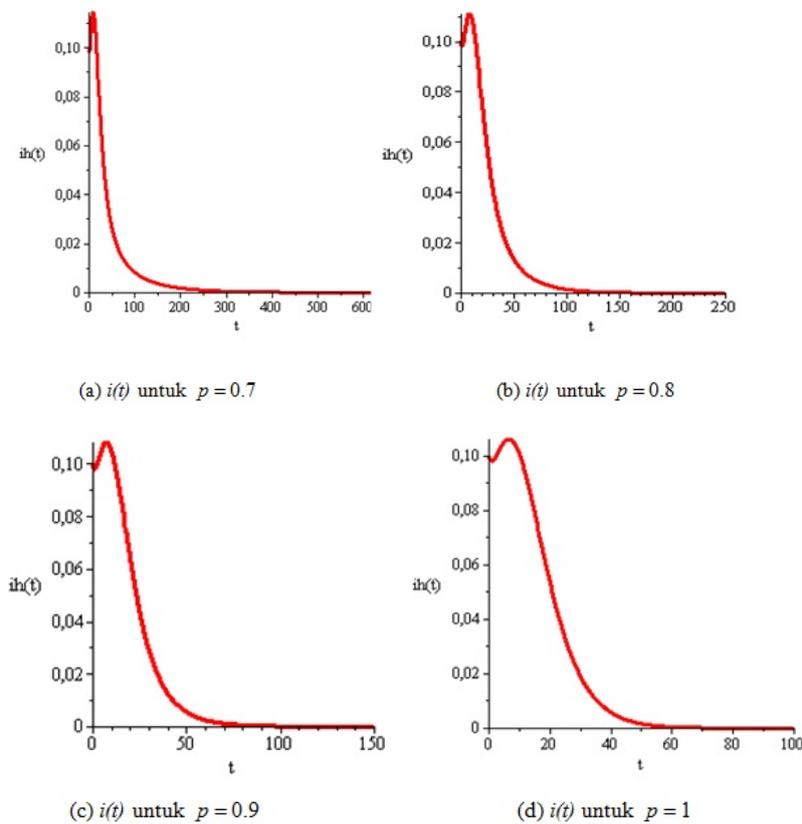
p	Titik Kesetimbangan	R_0
0	(0.350,0.325,0.232,0.093)	2.86
0.1	(0.350,0.275,0.196,0.179)	2.57
0.3	(0.350,0.175,0.125,0.350)	2
0.5	(0.350,0.075,0.054,0.521)	1.43

Tabel 2 menunjukkan bahwa semakin tinggi tingkat vaksinasi maka rasio reproduksi dasar R_0 akan semakin menurun. Namun, untuk $p < 0.66$ vaksinasi yang

dilakukan belum berhasil membuat penyakit menghilang karena nilai $\text{sef} R_0 > 1$ penyakit akan selalu ada sampai waktu yang tidak terbatas.

Agar penyebaran penyakit dapat dicegah dengan sukses, maka tingkat vaksinasi yang dilakukan harus cukup lebih besar dari tingkat vaksinasi minimum. Oleh karena itu, selanjutnya dilakukan simulasi untuk $p > 0.66$.

Gambar 4 menunjukkan proporsi individu infectious dengan tingkat vaksinasi yang bervariasi untuk $p > 0.66$.



Gambar 4. Proporsi individu *infectious* untuk $p = 0.7, p = 0.8, p = 0.9$, dan $p = 1$.

Berdasarkan Gambar 4 untuk $p > 0.66$, $i(t) \rightarrow 0$ artinya penyakit akan menghilang dari populasi dalam waktu tertentu. Semakin tinggi tingkat vaksinasi, penyakit akan menghilang dari populasi dalam waktu yang semakin cepat. Titik kesetimbangan dan rasio reproduksi dasar untuk $p = 0.7, p = 0.8, p = 0.9$ dan $p = 1$ disajikan pada Tabel 3.

Tabel 3. Titik kesetimbangan dan rasio reproduksi dasar untuk $p = 0.7, p = 0.8, p = 0.9$ dan $p = 1$

p	Titik Kesetimbangan	R_0
0.7	(0.3, 0, 0, 0.7)	0.86
0.8	(0.2, 0, 0, 0.8)	0.57
0.9	(0.1, 0, 0, 0.9)	0.29
1	(0, 0, 0, 1)	0

Tabel 3 menunjukkan bahwa untuk $p > 0.66$, kenaikan tingkat vaksinasi menyebabkan nilai R_0 semakin menurun.

Karena untuk $p > 0.66$, nilai $R_0 < 1$ maka penyakit secara berangsur-angsur akan menghilang dari populasi. Pada titik kesetimbangan untuk $p = 1$, proporsi individu susceptibles bernilai nol. Hal ini menunjukkan bahwa semua individu telah kebal dari penyakit campak dan memasuki kelompok recovered. Titik kesetimbangan yang dicapai adalah titik kesetimbangan bebas penyakit karena $i(t) = 0$.

E. Simpulan

$$\text{Berdasarkan } R_0 = \frac{\beta\sigma(1-p)}{(\delta+\mu)(\sigma+\mu)}, \text{ jika}$$

semakin tinggi tingkat vaksinasi maka rasio reproduksi dasar R_0 akan semakin menurun. Namun, untuk $p < 0.66$ vaksinasi yang dilakukan belum berhasil membuat penyakit menghilang karena nilai $R_0 > 1$. Agar penyebaran penyakit dapat dicegah dengan sukses, maka $p > 0.66$. karena nilai $R_0 < 1$ sehingga penyakit secara berangsur-angsur akan menghilang dari populasi. Semakin besar tingkat vaksinasi maka semakin cepat penyakit menghilang dari populasi.

F. Daftar Pustaka

- Castellini, H. & Romanelli L. 2009. On the Propagation of Social Epidemic in Sosial. Networks under SIR Model, 70: 40-53.
- Hethcote H W. 2000. The Mathematic of Infectious Diseases. SIAM Review, 42. No.4 5599-653.
- Juan, Z., L. Jianquan, & M. Zhien. 2006. GLOBAL DYNAMICS OF AN SEIR EPIDEMIC MODEL WITH IMMIGRATION OF DIFFERENT COMPARTMENTS. Acta Mathematica Scientia. 26B(3): 551-567
- Kinbaby. 2008. Imunisasi: Past and present. Lancet, 54: 75-80.
- Li, G. & Z. Jin. 2005. Global stability of an SEIR epidemic model with infectious force in latent, infected and immune period. Chaos, Solitons & Fractal, 25: 1177 – 1184.
- Li, G., W. Wang, & Z. Jin. 2006. Global stability of an SEIR epidemic model with constant immigration. Chaos, Solitons & Fractal, 30: 1012 – 1019.
- Li, X.Z. & B. Fang. 2009. Stability of an Age-structured SEIR Epidemic Model with Infectivity in Latent Period. Applications and Applied Mathematics. 4: 218 – 236.
- Tessa, O.M. 2006. Mathematical model for control of measles by vaccination. Proceedings of Mali Symposium on Applied Sciences. Niger: Abdou Moumouni University.
- Widoyono. 2005. PENYAKIT TROPIS Epidemiologi, Penularan, Pencegahan & Pemberantasannya. Jakarta: Erlangga.
- WHO. 2011. Measles. <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs286/en/> [diakses 19-02-2012].
- Zhang, J. & Z. Ma. 2003. Global dynamics of an SEIR epidemic model with saturating contact rate. Mathematical Biosciences, 185 : 15–32.
- Zhang, T & Z. Teng. 2007. On a Nonautonomous SEIRS Model in Epidemiology. Bulletin of Mathematical Biology. 69: 2537–2559.