



PENYELESAIAN MASALAH PEWARNAAN GRAF DENGAN ALGORITMA GENETIKA

Lana Aristya Anggraini [✉], Isnaini Rosyida, dan Tri Sri Noor Asih

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 Lt. 1, Kampus Sekaran Gunungpati, Semarang 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:

Diterima Oktober 2017

Disetujui Nopember 2017

Dipublikasikan Mei 2019

Kata Kunci:

Pewarnaan Graf;

Metode *heuristic*;

Algoritma Genetika.

Abstrak

Pada penelitian ini, dijelaskan langkah-langkah matematis tentang penyelesaian masalah pewarnaan graf (*graph colouring*) dengan menggunakan Algoritma Genetika. Langkah – langkah tersebut meliputi konstruksi nilai *fitness*, proses *crossover*, dan proses mutasi pada Algoritma Genetika untuk masalah pewarnaan graf. Untuk menyelesaikan masalah pewarnaan graf dengan Algoritma Genetika, dilakukan pengkodean kromosom berbentuk *array*. Kemudian kromosom tersebut dikenakan operator seleksi dengan metode roda *roullet*, *crossover* satu titik dan mutasi satu gen sehingga menjadi populasi baru. Populasi baru yang terbentuk kemudian dievaluasi dengan konstruksi nilai *fitness* yang dibangun untuk meminimalisir kesalahan pewarnaan dan menemukan minimal warna. Proses tersebut dilakukan hingga didapatkan generasi yang memuat penyelesaian pewarnaan graf. Penyelesaian pewarnaan graf merupakan pelabelan titik dengan minimal warna dan nol kesalahan pewarnaan. Pada penelitian ini ditambahkan rancangan program dengan n tertentu untuk evaluasi nilai *fitness*, operator *crossover* dan mutasi telah berhasil dibuat.

Abstract

In this research, the researcher explains the mathematical methods on the accomplishment of the graph coloring using the Genetical Algorithms. Those methods are the construction of the fitness value, crossover process, and mutation process on the Genetical Algorithm in the completion of the matter of graph coloring. In completing the graph colouring using Genetical Algorithm, a coding process of array-shaped chromosome is conducted. Afterward, the chromosome is given operator selection using roullet wheel method, single dot crossover and single gene mutation so new population is gathered. This new population is subsequently evaluated using the fitness value method which is constructed to minimize coloring errors and to create minimum colors. This process is being conducted until the generation in which the graph coloring solution is contained. The completion of the Graph Coloring is a process of dot labeling with minimum colors and zero error coloring. In this research added program design to evaluate fitness value, crossover operator, and mutation for certain n has been succesfully conducted.

How to Cite

Anggraini L. A., Rosyida I., & Asih T.S.N. (2019). Penyelesaian Malah Pewarnaan Graf dengan Algoritma Genetika. *UNNES Journal of Mathematics* 8(1): 30-39.

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang dalam matematika diskrit yang menarik untuk dibahas karena berkaitan dengan permasalahan yang banyak ditemui dalam kehidupan sehari-hari (Wibisono, 2008). Teori graf mulai dikenalkan oleh seorang matematikawan bernama Leonhard Euler sekitar tahun 1736. Leonhard Euler mulai mengenalkan teori graf setelah menyelesaikan masalah jembatan *Koinsberg*. Masalah tersebut kemudian dimodelkan Euler dalam bentuk graf dengan memisalkan daratan sebagai sebuah titik dan jembatan penghubungnya adalah sebuah sisi. Keunikan teori graf adalah kesederhanaan pokok bahasan yang dipelajarinya, karena dapat disajikan sebagai titik (*vertex*) dan sisi (*edge*) (Jusuf, 2009). Salah satu bagian dari teori graf adalah pewarnaan graf.

Pewarnaan graf menurut Budayasa (2007: 151) terdapat dua macam, yaitu pewarnaan titik (*vertex*) dan pewarnaan sisi (*edge*). Misal G sebuah graf. Sebuah pewarnaan k dari G adalah pewarnaan semua titik G dengan menggunakan k warna sedemikian hingga dua titik G yang berhubungan langsung mendapat warna yang berbeda. Sebuah pewarnaan sisi pada graf G adalah pewarnaan semua sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi yang terkait pada titik yang sama mendapatkan warna yang berbeda. Bilangan yang menyatakan banyaknya warna minimal yang digunakan dalam pewarnaan titik graf disebut bilangan kromatik (Rosyida dkk, 2015). Menurut Susiloputro, Rochmad dan Alamsyah (2012) pewarnaan graf adalah pemberian warna yang biasanya direpresentasikan sebagai bilangan terurut mulai dari satu atau dapat langsung direpresentasikan dengan warna merah, biru, hijau dan lainnya pada suatu objek tertentu.

Algoritma yang seringkali digunakan untuk mewarnai graf yaitu Algoritma Pewarnaan Barisan-Sederhana (*The Simple Sequential Colouring Problem*) dan Algoritma Pewarnaan Barisan-Besar Utama yang lebih dikenal dengan Algoritma Welch Powell. Kedua algoritma tersebut hanyalah pendekatan dan tidak menjamin diperolehnya banyak warna dengan warna minimum (Budayasa, 2007:165).

Seiring berkembangnya ilmu pengetahuan metode *heuristic* mulai digunakan untuk mewarnai graf. Metode *heuristic* merupakan suatu penyelesaian yang menggunakan konsep pendekatan. Pendekatan *heuristic* menggunakan suatu algoritma secara interaktif sehingga menghasilkan solusi yang mendekati optimal (Setyono dan Rusdiansyah, 2006). Metode *heuristic* yang sudah digunakan untuk mewarnai

graf adalah Algoritma Genetika, Tabu Search, dan Algoritma Semut (*Ant Colony*). Algoritma Genetika pernah digunakan oleh Gwee, Lim, dan Ho (1993) untuk mewarnai peta dengan menggunakan empat warna. Berikutnya Fleurent dan Ferland (1996) membandingkan Algoritma Genetika dengan Algoritma Hibrida pada pewarnaan graf. Croitoru dan Adriana (2002) meneliti penerapan Algoritma Genetika yang digabung dengan Tabu Search untuk menyelesaikan masalah pewarnaan graf. Glass dan Bennet (2003) meneliti bilangan kromatik yang diperoleh dari Algoritma Genetika dan Algoritma Tabu Search. Shen (2003) meneliti pewarnaan graf dengan Genetika *Programming*. Hindi dan Yampolskiy (2012) pewarnaan graf pada data CIMSACS. Barod, Hawanna dan Jagtap (2014) membandingkan Algoritma Genetika dan Algoritma Memetika untuk pewarnaan graf. Algoritma Tabu Search digunakan oleh Hertz (1987) untuk mencari teknik tabu search pada pewarnaan graf. Algoritma Semut digunakan oleh Costa dan Hertz (1997) pada kasus pewarnaan graf.

Algoritma Genetika adalah suatu algoritma pencarian yang berbasis pada mekanisme seleksi alam dan genetika (Fitriana dan Sugiharti, 2015). Pada Algoritma Genetika proses pencarian bersifat acak sehingga pemilihan operator yang digunakan sangat menentukan keberhasilan Algoritma Genetika dalam menemukan solusi optimum. Menurut Sari, Dwijanto, dan Sugiharti (2013) Algoritma genetika merupakan cabang dari Algoritma Evolusi yang basa digunakan untuk memecahkan masalah optimasi.

Komponen-komponen utama pada Algoritma Genetika meliputi pengkodean, proses inialisasi, evaluasi *fitness*, seleksi, *crossover*, dan mutasi. Pengkodean adalah suatu teknik untuk menyatakan populasi awal sebagai calon solusi suatu masalah ke dalam suatu kromosom sebagai suatu kunci pokok persoalan ketika menggunakan Algoritma Genetika. Teknik pengkodean ini meliputi pengkodean gen dan kromosom. Ukuran populasi tergantung pada masalah yang akan dipecahkan dan jenis operator genetika yang akan diimplementasikan. Setelah ukuran popuasi ditentukan, kemudian harus dilakukan inialisasi kromosom secara acak, namun tetap harus memperhatikan domain solusi dan kendala pada permasalahan yang ada. Beberapa penelitian menunjukkan bahwa ukuran popuasi yang terbiik tergantung dari barisan yang diencodekan. Seleksi bertujuan memberikan kesempatan reproduksi yang lebih besar bagi anggota populasi yang paling baik. Evaluasi *fitness* merupakan dasar untuk proses seleksi. *Crossover* (perkawinan silang) bertujuan

menambah keanekaragaman string dalam satu populasi dengan penyilangan antar string yang diperoleh dari reproduksi sebelumnya. Mutasi merupakan proses mengubah nilai dari satu atau beberapa gen dalam suatu kromosom. Selain untuk sebagai penekanan selektif yang lebih efisien, operator mutasi dapat digunakan untuk menghindari terjadinya konvergensi prematur tersebut dan tetap menjaga perbedaan kromosom dalam populasi.

Hindi dan Yampolskiy (2012) telah meneliti Algoritma Genetika untuk pewarnaan pada Graf Cimsacs. Pada jurnal tersebut dijelaskan tentang Algoritma Genetika yang diterapkan pada program komputer. Hindi dan Yampolskiy (2012) menjelaskan bahwa Algoritma Genetika sangat efisien untuk menyelesaikan masalah pewarnaan graf. Kekurangan pada jurnal tersebut adalah kurangnya penjelasan langkah-langkah untuk mewarnai suatu graf dengan Algoritma Genetika. Proses seleksi hingga pemilihan operator *crossover*, mutasi dan bagaimana evaluasi *fitness* tidak dijelaskan secara rinci. Pada penelitian ini, penulis akan membahas mengenai bagaimana konstruksi *fitness*, proses seleksi, *crossover*, mutasi, dan langkah-langkah penerapan Algoritma Genetika untuk menyelesaikan masalah pewarnaan pada graf.

Agar permasalahan tidak meluas, penulis membatasi ruang lingkup penelitian yaitu: pembahasan tentang penerapan Algoritma Genetika hanya untuk menyelesaikan pewarnaan pada graf, *crossover* yang dilakukan menggunakan *crossover* satu titik tanpa proses *random*, program hanya berlaku untuk jumlah titik tertentu.

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka (*literature research*) dengan cara mengkaji sejumlah literatur (bahan pustaka) secara mendalam tentang materi yang berkaitan dengan graf, pewarnaan pada graf (*graph coloring*), Algoritma Genetika, dan penerapan Algoritma Genetika itu sendiri pada pewarnaan graf. Dalam penelitian ini, penjelasan teori dilakukan dengan menerapkannya pada pewarnaan graf.

Ide penemuan masalah didapatkan dari skripsi tentang Algoritma Tabu yang merupakan metode pencarian *heuristic* yang digunakan untuk menyelesaikan masalah pewarnaan graf. Setelah penulis mengkaji penerapan metode *heuristic* untuk pewarnaan graf, penulis menjadikan implementasi Algoritma Genetika untuk pewarnaan graf sebagai masalah yang akan dikaji lebih dalam.

Setelah dilakukan perumusan masalah, selanjutnya dilakukan pemecahan masalah. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam tahap pemecahan masalah adalah: mempelajari teori dan materi tentang graf, pewarnaan pada graf, dan Algoritma Genetika; menerapkan Algoritma Genetika untuk menyelesaikan masalah pewarnaan pada graf. Langkah-langkah menyelesaikan masalah pewarnaan pada graf dengan Algoritma Genetika meliputi: pembangkitan kromosom secara acak, mengevaluasi populasi dengan seleksi roda *roulette*, melakukan *crossover* satu titik, melakukan mutasi satu gen, mengevaluasi generasi baru dengan *fitness*, mengulangi proses sampai mendapat nilai *fitness* tertinggi berulang dengan rata-rata mendekati nilai *fitness* tertinggi (jumlah warna minimum dan nol kesalahan pewarnaan). Hasil akhir berupa pewarnaan graf dengan bilangan kromatik dan tidak ada titik bertetangga yang memiliki warna yang sama. Membuat rancangan program MATLAB untuk operator *crossover*, mutasi, dan evaluasi kromosom yang terbentuk.

Pada bagian akhir dilakukan penarikan kesimpulan sebagai pemecahan dari masalah yang telah dirumuskan. Berdasar hasil penelitian dan pembahasannya penulis akan membuat suatu kesimpulan terkait pewarnaan graf dengan menggunakan prinsip Algoritma Genetika. Pada tahap ini, penulis juga akan memberikan saran untuk masalah masalah yang ditemukan agar dapat bermanfaat bagi penelitian berikutnya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk menyelesaikan masalah pewarnaan graf dengan Algoritma Genetika, dijelaskan terlebih dahulu tentang konstruksi *fitness*, proses seleksi, *crossover* serta mutasi yang akan digunakan. Pemahaman konsep tentang konstruksi *fitness*, proses seleksi, *crossover* serta mutasi sangat dibutuhkan karena penyelesaian masalah dengan Algoritma Genetika merupakan pengulangan proses tersebut.

Konstruksi *Fitness* pada Algoritma Genetika untuk Pewarnaan Graf

Nilai *fitness* suatu kromosom menggambarkan kualitas kromosom dalam populasi tersebut. Nilai *fitness* pada pewarnaan graf didefinisikan dengan mempertimbangkan 2 hal yaitu: (1) Banyaknya warna; (2) Banyaknya kesalahan pewarnaan

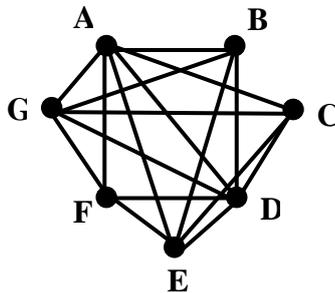
Pada pewarnaan graf banyaknya kesalahan pewarnaan dapat dilihat dari matriks *adjacency*. Kedua komponen penting dalam penyusunan fungsi *fitness* harus diminimumkan. Hanya saja kesalahan pada pewarnaan harus diberi bobot

lebih karena akan menyebabkan kromosom berada pada kawasan tidak layak (Zukhri, 2014). Sehingga rumus *fitness* untuk mencari bilangan kromatik adalah:

$$eval(v) = \frac{1}{f(v) + N * p(v)}$$

dengan $f(v)$ merupakan fungsi objektif, N merupakan banyaknya titik yang akan diwarnai, dan $p(v)$ merupakan banyaknya kesalahan pewarnaan. Dalam kasus pewarnaan fungsi objektif merupakan minimal warna pada kromosom.

Berikut ini disajikan ilustrasi penentuan nilai *fitness* untuk graf pada Gambar 1.



Gambar 1 Graf G

Matriks adjacency graf G pada Gambar 1:

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	1	1	1	1	1
B	1	0	0	1	1	0	1
C	1	0	0	1	1	0	1
D	1	1	1	0	1	1	1
E	1	1	1	1	0	1	0
F	1	0	0	1	1	0	1
G	1	1	1	1	0	1	0

Contoh kromosom pada masalah pewarnaan graf G pada gambar 1 sebagai berikut:

1	4	3	2	0	2	0
---	---	---	---	---	---	---

Kromosom tersebut memiliki 5 warna dan 1 kesalahan. Karena titik D tidak bisa memiliki warna yang sama dengan titik F

(dilihat dari matriks *adjacency* dimana titik D dan F bertetangga.

Jadi diperoleh evaluasi *fitness*:

$$\frac{1}{5 + (7 * 1)} = 0,0833$$

Proses Seleksi, Crossover dan Mutasi Seleksi

Seleksi pada penyelesaian masalah ini menggunakan metode seleksi roda *roulette*, yang dimulai dengan langkah membangkitkan bilangan secara acak. Kemudian memilih induk berdasarkan probabilitasnya yang lebih dari nilai random. Sebagai ilustrasi, dijelaskan pada Tabel 1 dan Tabel 2.

Crossover

Metode *crossover* yang digunakan adalah *crossover* satu titik yang memisahkan kromosom menjadi dua bagian dan menyilangkan dengan kromosom lain dan membentuk kromosom baru.

Sebagai ilustrasi, dijelaskan dengan contoh.

Kromosom induk:

0	1	2	3	4	1	2
3	6	4	3	5	3	0

Hasil *Crossover*:

0	1	2	3	5	3	0
3	6	4	3	4	1	2

Mutasi

Mutasi yang digunakan sama dengan mutasi pada pengkodean biner yaitu merubah satu gen pada kromosom dengan bilangan acak lainnya. Sebagai ilustrasi, dijelaskan dengan contoh.

Kromosom induk:

2	5	1	1	4	6	6
---	---	---	---	---	---	---

Hasil mutasi:

2	5	6	1	4	6	6
---	---	---	---	---	---	---

Operator mutasi mengubah gen ketiga yang diberi label dengan simbol warna 1 menjadi warna 6. Pemilihan gen yang diubah dilakukan dilakukan secara *random*.

Tabel 1 Seleksi Roda *Roulette*

i	Kromosom (v)							Banyak warna	Kesalahan	Fitnes	vi/Sigma vj	Probabilitas
	A	B	C	D	E	F	G					
1	1	4	3	2	0	2	0	5	1	0,083333333	0,155909289	0,155909289
2	0	1	2	3	1	4	5	6	1	0,076923077	0,143916267	0,299825556
3	5	1	3	0	0	4	0	5	1	0,083333333	0,155909289	0,455734845
4	2	1	1	3	0	4	0	5	0	0,2	0,374182294	0,829917139
5	2	1	1	3	2	6	2	4	1	0,090909091	0,170082861	1
Jumlah										0,534498834	1	

Tabel 2 Hasil Seleksi

r	Hasil seleksi	Kromosom (v)						
		A	B	C	D	E	F	G
0,066943	1	1	4	3	2	0	2	0
0,878240	5	2	1	1	3	2	6	2
0,886468	5	2	1	1	3	2	6	2
0,194691	2	0	1	2	3	1	4	5
0,976446	5	2	1	1	3	2	6	2

Algoritma Genetika untuk Pewarnaan Graf

Langkah-langkah Algoritma Genetika untuk menyelesaikan masalah pewarnaan graf adalah sebagai berikut:

1. Membangkitkan populasi awal
Populasi awal dibangkitkan secara random. Populasi terdiri dari beberapa kromosom yang merepresentasikan solusi yang diinginkan (pengkodean). Representasi kromosom pada pewarnaan graf berupa sebuah array dengan panjang berdasarkan jumlah simpul dalam grafik. Menyimbolkan setiap noktah dengan simbol yang menyatakan warna. Setiap sel dalam array menyatakan nilai dari 0 sampai $n - 1$, dengan n adalah banyaknya warna. Dengan keterangan berupa ketetanggaan antara simpul ditunjukkan oleh sebuah matriks adjacency yang berdimensi $n \times n$ di mana n merupakan jumlah simpul.
2. Menyeleksi induk dengan metode seleksi roda rolet
3. Membentuk generasi baru pada induk yang terpilih dengan operator *crossover* dan mutasi.
4. Mengevaluasi solusi pada generasi baru.
5. Proses ini mengevaluasi setiap populasi dengan menghitung nilai fitness setiap kromosom. Sehingga kromosom memiliki warna minimum dengan nol kesalahan.

Nilai fitness pada pewarnaan graf didefinisikan dengan mempertimbangkan 2 hal yaitu banyaknya warna dan banyaknya kesalahan pewarnaan.

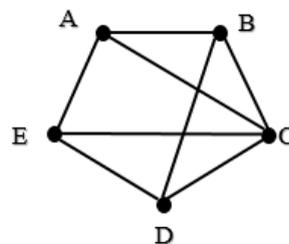
Pada pewarnaan graf banyaknya kesalahan pewarnaan dapat dilihat dari matriks adjacency. Kedua komponen penting dalam penyusunan fungsi fitness harus diminimumkan. Hanya saja kesalahan pada pewarnaan harus diberi bobot lebih karena akan menyebabkan kromosom beradapada kawasan tidak layak (Zukhri,2002). Sehingga rumus fitness untuk mencari bilangan kromatik adalah:

$$eval(v) = \frac{1}{f(v) + N * p(v)}$$

Dengan $f(v)$ merupakan fungsi objektif, N merupakan banyaknya simpul yang akan diwarnai, dan $p(v)$ merupakan banyaknya kesalahan pewarnaan. Dalam kasus pewarnaan fungsi objektif merupakan minimal warna pada kromosom.

6. Proses berhenti jika kesalahan pewarnaan sama dengan nol dengan kata lain nilai fitness maksimum telah tercapai. Namun jika belum kembali ke langkah ke 2.
7. Hasil akhirnya berupa generasi baru dengan nol konflik. Dari hasil pewarnaan graf tersebut dapat diketahui bilangan kromatik yaitu jumlah warna yang berbeda yang dapat digunakan untuk mewarnai simpul. Dan juga menemukan minimum jumlah warna yang berbeda yang dibutuhkan untuk mewarnai grafik tertentu tanpa melanggar kendala adjacency. Angka pada grafik tertentu (G) dikenal sebagai Number Chromatic ($X(G)$) (Isabel Méndez Díaz dan Paula Zabala 1999). Jika $k = \{1, 2, 3 \dots\}$ dan $P(G, k)$ adalah jumlah yang mungkin solusi untuk mewarnai graf G dengan warna k , maka
$$x(G) = \min(k: P(G, k) > 0)$$

Simulasi



Gambar 2 Graf G

Matriks adjacency Gambar 2 Graf G pada simulasi :

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	1
B	1	0	1	1	0
C	1	1	0	1	1
D	0	1	1	0	1
E	1	0	1	1	0

1. Membangun kromosom acak
Dengan bantuan Microsoft Excel, populasi awal dibangkitkan dari bilangan 0 sampai 4 yang menunjukkan 5 warna yang memungkinkan untuk mewarnai 5 titik graf. Kromosom merupakan array dengan panjang 5 gen. Kromosom dibangkitkan sebanyak 20 populasi berdasarkan penelitian yang sudah sering dilakukan. Pembangkitan kromosom secara acak ditunjukkan pada Tabel 3.
2. Evaluasi Populasi Awal
Evaluasi banyaknya warna dan kesalahan pewarnaan pada kromosom yang telah dibangkitkan. Dengan melihat banyaknya kesalahan pewarnaan berdasarkan matriks adjacency pada graf. Proses evaluasi populasi awal ditunjukkan pada Tabel 4.

Tabel 3 Populasi Pertama

a					
i	Kromosom (v)				
	A	B	C	D	E
1	4	4	2	1	1
2	4	0	3	0	0
3	2	3	0	4	2
4	4	4	3	2	1
5	0	3	4	1	3
6	1	4	2	3	0
7	4	4	4	3	2
8	2	1	4	4	3
9	4	0	4	0	0
10	1	0	4	0	0
11	4	4	1	0	1
12	1	4	0	3	3
13	3	2	3	0	4
14	4	3	0	4	1
15	2	3	1	2	1
16	2	4	2	2	4
17	3	3	0	3	0
18	1	1	1	2	4
19	2	0	1	1	2
20	2	0	1	4	0

Tabel 4 Evaluasi Populasi Awal

i	Kromosom (v)					Banyaknya Warna f(v)	Kesalahan Pewarnaan p(v)
	A	B	C	D	E		
1	4	4	2	1	1	3	2
2	4	0	3	0	0	3	1
3	2	3	0	4	2	4	1
4	4	4	3	2	1	4	1
5	0	3	4	1	3	4	0
6	1	4	2	3	0	5	0
7	4	4	4	3	2	3	2
8	2	1	4	4	3	4	1
9	4	0	4	0	0	2	2
10	1	0	4	0	0	3	1
11	4	4	1	0	1	3	2
12	1	4	0	3	3	4	1
13	3	2	3	0	4	4	1
14	4	3	0	4	1	4	0
15	2	3	1	2	1	3	1
16	2	4	2	2	4	2	1
17	3	3	0	3	0	2	2
18	1	1	1	2	4	3	2
19	2	0	1	1	2	3	2
20	2	0	1	4	0	4	0

Tabel 5 Seleksi Roda *Roulette*

i	Kromosom (v)					Banyaknya Warna f(v)	Kesalahan Pewarnaan p(v)	Fitness eval	vi/Sigma vj	Probabilitas
	A	B	C	D	E					
1	4	4	2	1	1	3	2	0,07692	0,02988	0,02988
2	4	0	3	0	0	3	1	0,12500	0,04855	0,07843
3	2	3	0	4	2	4	1	0,11111	0,04316	0,12158
4	4	4	3	2	1	4	1	0,11111	0,04316	0,16474
5	0	3	4	1	3	4	0	0,25000	0,09710	0,26184
6	1	4	2	3	0	5	0	0,20000	0,07768	0,33951
7	4	4	4	3	2	3	2	0,07692	0,02988	0,36939
8	2	1	4	4	3	4	1	0,11111	0,04316	0,41255
9	4	0	4	0	0	2	2	0,08333	0,03237	0,44491
10	1	0	4	0	0	3	1	0,12500	0,04855	0,49346
11	4	4	1	0	1	3	2	0,07692	0,02988	0,52334
12	1	4	0	3	3	4	1	0,11111	0,04316	0,56649
13	3	2	3	0	4	4	1	0,11111	0,04316	0,60965
14	4	3	0	4	1	4	0	0,25000	0,09710	0,70675
15	2	3	1	2	1	3	1	0,12500	0,04855	0,75530
16	2	4	2	2	4	2	1	0,14286	0,05549	0,81078
17	3	3	0	3	0	2	2	0,08333	0,03237	0,84315
18	1	1	1	2	4	3	2	0,07692	0,02988	0,87302
19	2	0	1	1	2	3	2	0,07692	0,02988	0,90290
20	2	0	1	4	0	4	0	0,25000	0,09710	1

3. Seleksi roda *roulette*

Proses seleksi dilakukan dengan pemilihan secara acak menggunakan bilangan riil dengan langkah-langkah:

i. Bangkitkan bilangan random yang bernilai antara 0 sampai 1.

ii. Jika r kurang dari sama dengan probabilitas kromosom pertama, maka pilih kromosom

iii. pertama, jika kurang dari sama dengan probabilitas kromosom i , maka pilih kromosom ke i .

- iv. Ulangi langkah di atas sebanyak kromosom dalam sebuah populasi.
 4. Proses dan hasil seleksi roda roulette dapat dilihat pada Tabel 5 dan Tabel 6.

Tabel 6 Hasil Seleksi

<i>r</i>	Hasil Seleksi	Kromosom Induk
0,66511	14	4 3 0 4 1
0,85451	18	1 1 1 2 4
0,67541	14	4 3 0 4 1
0,50997	11	4 4 1 0 1
0,10052	3	2 3 0 4 2
0,77185	16	2 4 2 2 4
0,04425	2	4 0 3 0 0
0,41489	9	4 0 4 0 0
0,47992	10	1 0 4 0 0
0,34982	7	4 4 4 3 2
0,78007	16	2 4 2 2 4
0,08607	3	2 3 0 4 2
0,48182	10	1 0 4 0 0
0,76906	16	2 4 2 2 4
0,41623	9	4 0 4 0 0
0,26222	6	1 4 2 3 0
0,64751	14	4 3 0 4 1
0,09513	3	2 3 0 4 2
0,28115	6	1 4 2 3 0
0,65847	14	4 3 0 4 1

Tabel 7 Pemilihan induk Crossover

<i>i</i>	Hasil seleksi	Induk
1	14	x
2	18	x
3	14	x
4	11	v
5	3	x
6	16	v
7	2	x
8	9	v
9	10	x
10	7	v
11	16	x
12	3	v
13	10	v
14	16	v
15	9	x
16	6	v
17	14	x
18	3	v
19	6	v
20	14	x

Tabel 8 Proses Crossover

Kromosom Induk					Hasil crossover				
4	3	0	4	1	4	3	0	4	1
1	1	1	2	4	1	1	1	2	4
4	3	0	4	1	4	3	0	4	1
4	4	1	0	1	4	4	1	2	4
2	3	0	4	2	2	3	0	4	2
2	4	2	2	4	2	4	2	0	1
4	0	3	0	0	4	0	3	0	0
4	0	4	0	0	4	0	4	3	2
1	0	4	0	0	1	0	4	0	0
4	4	4	3	2	4	4	4	0	0
2	4	2	2	4	2	4	2	2	4
2	3	0	4	2	2	3	0	0	0
1	0	4	0	0	1	0	4	4	2
2	4	2	2	4	2	4	2	3	0
4	0	4	0	0	4	0	4	0	0
1	4	2	3	0	1	4	2	2	4
4	3	0	4	1	4	3	0	4	1
2	3	0	4	2	2	3	0	3	0
1	4	2	3	0	1	4	2	4	2
4	3	0	4	1	4	3	0	4	1

Tabel 9 Pemilihan induk mutasi

<i>i</i>	<i>r</i>	induk
1	0,42438	x
2	0,16579	x
3	0,7039	x
4	0,36785	x
5	0,54426	x
6	0,24208	x
7	0,00885	v
8	0,1972	x
9	0,1277	x
10	0,07064	x
11	0,80111	x
12	0,11337	x
13	0,14805	x
14	0,84593	x
15	0,47451	x
16	0,75295	x
17	0,34504	x
18	0,16455	x
19	0,3579	x
20	0,98851	x

5. Crossover satu titik
 Sebelum melakukan proses crossover, induk crossover dipilih berdasarkan bilangan acak antara 0 sampai 1 yang probabilitasnya kurang dari 60%. Probabilitas crossover 60% menurut Desiani dan Arhani (2006)

merupakan probabilitas terbaik. Proses *crossover* ditunjukkan pada Tabel 7 dan Tabel 8.

Tabel 10 Proses Mutasi

Kromosom Induk					Hasil Mutasi				
4	3	0	4	1	4	3	0	4	1
1	1	1	2	4	1	1	1	2	4
4	3	0	4	1	4	3	0	4	1
4	4	1	2	4	4	4	1	2	4
2	3	0	4	2	2	3	0	4	2
2	4	2	0	1	2	4	2	0	1
4	0	3	0	0	4	0	3	4	0
4	0	4	3	2	4	0	4	3	2
1	0	4	0	0	1	0	4	0	0
4	4	4	0	0	4	4	4	0	0
2	4	2	2	4	2	4	2	2	4
2	3	0	0	0	2	3	0	0	3
1	0	4	4	2	1	0	4	4	2
2	4	2	3	0	2	4	2	3	0
4	0	4	0	0	4	0	4	0	0
1	4	2	2	4	1	4	2	2	4
4	3	0	4	1	4	3	0	4	1
2	3	0	3	0	2	3	0	3	0
1	4	2	4	2	1	4	2	4	2
4	3	0	4	1	4	3	0	4	1

6. Mutasi

Seperti halnya proses *crossover*, proses mutasi pertama kali membangkitkan bilangan random dengan probabilitas 1% dikarenakan menurut Desiani dan Arhani (2006) mutasi hanya digunakan untuk menambah variasi kromosm. Teknik mutasi yang digunakan merupakan mutasi satu gen dimana salah satu gen diubah menjadi angka random antara 0 sampai banyaknya titik –

7. Evaluasi Populasi Baru

Setelah terbentuk populasi baru, maka dilakukan evaluasi populasi untuk menentukan apakah proses berhenti atau dilanjutkan karena belum menemukan minimum pewarnaan dengan nol kesalahan pewarnaan. Proses evaluasi populasi ditunjukkan pada Tabel 11.

8. Karena belum ditemukan solusi pewarnaan maka proses kembali ke pembentukan populasi baru.

9. Setelah melakukan 5 generasi diperoleh populasi baru pada generasi kelima yang ditunjukkan pada Tabel 12.

10. Proses boleh berhenti karena telah ditemukan kromosom dengan minimal warna dan nol kesalahan pewarnaan. Hasil berupa *array* dengan panjang 5 dan pewarnaan 4 2 0 4 2 atau 4 0 3 4 0 dengan nol kesalahan pewarnaan. Bilangan kromatik pada pewarnaan graf diatas adalah 3.

Tabel 11 Proses Evaluasi Populasi Generasi Kedua

i	Kromosom (v)					Banyak warna	Kesalahan	Fitnes
	A	B	C	D	E			
1	4	3	0	4	1	4	0	0,25000
2	1	1	1	2	4	3	2	0,07692
3	4	3	0	4	1	4	0	0,25000
4	4	4	1	2	4	3	1	0,12500
5	2	3	0	4	2	4	1	0,11111
6	2	4	2	0	1	4	1	0,11111
7	4	0	3	4	0	3	0	0,33333
8	4	0	4	3	2	4	1	0,11111
9	1	0	4	0	0	3	1	0,12500
10	4	4	4	0	0	2	3	0,05882
11	2	4	2	2	4	2	1	0,14286
12	2	3	0	0	3	3	1	0,12500
13	1	0	4	4	2	4	1	0,11111
14	2	4	2	3	0	4	1	0,11111
15	4	0	4	0	0	2	2	0,08333
16	1	4	2	2	4	3	1	0,12500
17	4	3	0	4	1	4	0	0,25000
18	2	3	0	3	0	3	2	0,07692
19	1	4	2	4	2	3	2	0,07692
20	4	3	0	4	1	4	0	0,25000
							Jumlah	2,90467

Tabel 12 Populasi Baru Generasi Kelima

i	Kromosom (v)					Banyak Warna	Kesalahan Pewarnaan	Fitness
	A	B	C	D	E			
1	4	2	0	4	2	3	0	0,33333
2	4	0	4	4	1	3	1	0,12500
3	4	0	2	4	2	3	1	0,12500
4	4	3	0	4	2	4	0	0,25000
5	4	0	2	4	1	4	0	0,25000
6	4	0	2	4	2	3	1	0,12500
7	4	0	2	4	0	3	0	0,33333
8	1	0	4	4	0	3	1	0,12500
9	4	0	3	4	2	4	0	0,25000
10	4	0	3	4	0	3	0	0,33333
11	4	0	3	4	0	3	0	0,33333
12	1	4	2	4	1	3	2	0,07692
13	4	0	3	0	0	3	1	0,12500
14	1	0	2	1	2	3	1	0,12500
15	4	0	4	4	0	2	1	0,14286
16	1	0	4	4	2	4	1	0,11111
17	4	3	0	4	2	4	0	0,25000
18	4	3	0	4	2	4	0	0,25000
19	2	4	2	4	2	2	2	0,08333
20	2	4	2	4	1	3	2	0,07692
Jumlah								3,82448

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, penulis memperoleh hasil bahwa Algoritma Genetika dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah pewarnaan graf dengan hasil yang optimal. Hanya saja dengan pengerjaan secara manual waktu yang diperlukan dalam proses pengerjaan cukup lama, karena menggunakan bilangan dan probabilitas secara random. Dibandingkan dengan penelitian Hindi dan Yampolskiy (2012) untuk simulasi pewarnaan graf pada 7 titik peneliti memperoleh hasil yang sama, yaitu 4 warna dengan nol kesalahan pewarnaan. Dapat disimpulkan penelitian ini memperoleh hasil yang selaras dengan yang telah diteliti oleh Hindi dan Yampolskiy (2012). Kekurangan pada penelitian ini adalah pembuatan program hanya sebagai alat untuk membantu pada beberapa proses, sehingga waktu pengerjaan tidak efektif. Keunggulan pada penelitian ini adalah penulis membahas langkah-langkah dan metode yang digunakan dalam penyelesaian masalah pewarnaan graf dengan Algoritma Genetika yang belum dijelaskan oleh peneliti sebelumnya.

PENUTUP

Penyelesaian masalah pewarnaan graf dengan Algoritma Genetika bisa menjadi salah satu alternatif penyelesaian masalah pewarnaan graf. Langkah-langkah penyelesaian masalah pewarnaan graf dengan Algoritma Genetika yaitu: membangkitkan populasi awal secara random, menyeleksi induk dengan metode seleksi roda roulette, membentuk generasi baru dengan operator crossover dan operator mutasi, mengevaluasi solusi

baru yang terbentuk, dan proses terhenti jika sudah mendapatkan nilai fitness maksimal (minimal warna dengan nol kesalahan). Dari hasil pewarnaan graf tersebut dapat diketahui bilangan kromatik yaitu jumlah warna minimum berbeda yang dibutuhkan untuk mewarnai graf G tanpa melanggar kendala *adjacency*, yang dinotasikan dengan $X(G)$. Jika $k = \{1, 2, 3 \dots\}$ dan $P(G, k)$ adalah jumlah solusi untuk mewarnai graf G dengan k , maka $\chi(G) = \min\{k : P(G, k) > 0\}$. Pembuatan rancang program untuk evaluasi fitness, proses *crossover* dan mutasi menggunakan bantuan software MATLAB.

Saran yang dapat diberikan untuk penelitian berikutnya adalah penyelesaian masalah pewarnaan graf dengan Algoritma Genetika dengan proses *crossover* random, pembuatan program untuk jumlah n titik sebarang, penelitian menggunakan studi kasus yang merupakan penerapan dari masalah pewarnaan graf dengan menggunakan Algoritma Genetika dan pengembangan Algoritma Genetika untuk pewarnaan pada graf fuzzy.

DAFTAR PUSTAKA

- Barod, P., Hawanna, V, & Jagtap, V. 2014. Genetic and Memetic Algorithm on Graph Colouring. *Scientific Journal of Impact Factor (SJIF)* 1, 269-276.
- Budayasa, I. K. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.
- Costa, D, & Hertz, A. 1997. Ants can colour graphs, *Journal of the Operational Research Society* 48, 295-305.

- Croitoru, C, & Adriana, A. 2002. A New Genetic Graph Coloring Heuristic. In *Proceedings of The Computational Symposium on Graph Coloring and its Generalizations*, 63-74. Ithaca, New York, USA.
- Desiani, A, & Arhani, M. 2006. *Konsep Kecerdasan Buatan*. Yogyakarta: Andi Offset.
- Fitriana, E. N, & Sugiharti. E. 2015. Implementasi Algoritma Genetika dengan Teknik Kendali Logika Fuzzy untuk Mengatasi TSP Menggunakan MATLAB. 2015. *Unnes Journal of Mathematics*, vol. 4, no. 2: 1-9.
- Fleurent, C, & Ferland, J. A. 1996. "Genetic and hybrid algorithms for graph coloring," *Annals of Operations Research*, vol. 63, pp. 437-461.
- Glass, C. A, & Bennett, A. P. 2003. Genetic algorithm for graph coloring: Exploration of Galinier and Hao's algorithm. *Journal of Combinatorial Optimization* 3: 229-236
- Gwee, B. H., Lim, M. H, & Ho, J. S. 1993. Solving fourcolouring map problem using genetic algorithm. In *Proceedings of First New Zealand International Two-Stream Conference on Artificial Neural Networks and Expert Systems*, 332-333. New Zealand.
- Hertz, D. A. 1987. Using Tabu Search technique for Graph Coloring. *Computing Springer Verlag* 39, 345-351.
- Hindi, M. M, & Yampolskiy, R. V. 2012. Genetic Algorithm Applied to the Graph Coloring Problem. Kentucky : *Computer Engineering and Computer Science J.B Speed School of Engineering Louisville*.
- Jusuf, H. 2009. *Pewarnaan Graph Pada Simpul Untuk Mendeteksi Konflik Penjadwalan Kuliah*. Seminar Nasional Aplikasi Teknologi Informasi. ISSN:1907-5022.
- Rosyida, I., Widodo, Indarti, Ch. R., Sugeng, K.A. 2015 A new approach for determining fuzzy chromatic number of fuzzy graph. *Journal of Intelligent & Fuzzy System*, 28, 2331-2341.
- Sari, F. A., Dwijanto, & Sugiharti. E. 2013. Implementasi Algoritma Genetika untuk menyelesaikan Masalah Travelling Salesman Problem menggunakan Software MATLAB. *Unnes Journal of Mathematics*, vol. 2, no. 2: 1-5,
- Susiloputro, A., Rochmad, & Alamsyah. 2012. Penerapan Pewarnaan Graf pada Penjadwalan Ujian menggunakan Algoritma Welsh Powell. *Unnes Journal of Mathematics*, vol. 1, no.1: 1-7.
- Shen, J. W. 2003. Solving the Graph Coloring Problem using Genetic Programming, in *Genetic Algorithms and Genetic Programming*. Stanford 187-196.
- Setyono, O. & Rusdiansyah, A. 2006. Perancangan Sistem Rute Dan Penjadwalan Pengiriman Barang Di PT. Karya Mandiri Kencana Surabaya. *Prosiding Seminar Nasional Manajemen Teknologi III, Prodi MMT ITS*, Surabaya.
- Wibisono, S. 2008. *Matematika Diskrit (2nd ed.)*. Yogyakarta : Graha Ilmu.
- Zukhri, Z. 2014. *Algoritma Genetika: Metode Komputasi Evolusioner untuk Menyelesaikan Masalah Optimasi*. Yogyakarta: Andi Offsite.