



PENERAPAN ALJABAR *MAX-PLUS* PADA PENGATURAN SISTEM ANTRIAN *TRAFFIC LIGHT*

Andi Wibowo✉, Kristina Wijayanti, Rahayu Budhiati Veronica

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 Lt. 1, Kampus Sekaran Gunungpati, Semarang 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Januari 2018
Disetujui Februari 2018
Dipublikasikan November 2018

Keywords:
Aljabar Max-Plus
Traffic light
Algoritma Power

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengatur sistem antrian *traffic light* menggunakan aljabar max-plus. Penelitian ini berdasarkan data kepadatan arus dan data durasi *traffic light* pada persimpangan. Kemudian, disusun graf yang menggambarkan kondisi persimpangan dan merepresentasikan arah dari pergerakan masing-masing jalur. Selanjutnya disusun aturan sinkronisasi yang sesuai dengan graf dan pemodelan dari aljabar max-plus. Langkah berikutnya adalah membahas penjadwalan yang periodik dari barisan keadaan sistem *traffic light*. Analisis dari model aljabar max-plus sistem antrian *traffic light* menggunakan algoritma power diperoleh periode rata-rata durasi lampu hijau tiap fase adalah λ detik. Hasil analisis memperoleh hasil perhitungan untuk persimpangan Jarakah Semarang dengan $\lambda_1 = 53.5$. Berdasarkan periode tersebut, durasi *traffic light* lebih proporsional dari data primer dan sesuai dengan kepadatan masing-masing simpang di persimpangan Jarakah Semarang. Sedangkan untuk persimpangan Lotte Mart Semarang diperoleh hasil $\lambda_2 = 42$ dan berdasarkan periode tersebut menunjukkan durasi *traffic light* menjadi lebih optimal untuk mengurai kepadatan kendaraan yang melintasi persimpangan tersebut.

Abstract

The purpose of this study are to set the traffic light queuing system using max-plus algebra. This research is based on data of current density and traffic light data at intersection. Then, drawn graph illustrating the condition of the intersection and represents the direction of the movement of each path. Subsequently arranged synchronization rules corresponding to the graph and modeling of max-plus algebra. The next step to discuss the periodic scheduling of the line of traffic light systems. Analysis of the max-plus algebra model of the traffic light queuing system using the power algorithm obtained the average period of green light duration per phase is λ seconds. The result of the analysis obtained the calculation result for traffic light of Jarakah Semarang with $\lambda_1 = 53.5$. Based on the period, traffic light duration is more proportional than the primary data and corresponds to the density of each intersection at traffic light of Jarakah Semarang. As for the traffic light of Lotte Mart Semarang obtained $\lambda_2 = 42$. Based on the period shows the duration of traffic light more optimal to unravel the density of vehicles crossing the intersection.

How to Cite

Wibowo A., Wijayanti K., & Veronica, R.B. (2018). Penerapan Aljabar *Max-Plus* pada Pengaturan Sistem Antrian *Traffic light*. *UNNES Journal of Mathematics*, 7(2): 192- 205.

© 2018 Universitas Negeri Semarang

✉Alamat korespondensi:

E-mail: wibowoandi0804@gmail.com

p – ISSN 2252-6943

e – ISSN 2460-5859

PENDAHULUAN

Perkembangan peradaban yang semakin modern tentu menimbulkan masalah yang kompleks serta analisis yang lebih dalam untuk menanganinya. Seperti sistem manufaktur fleksibel, jaringan telekomunikasi, sistem proses paralel, sistem kontrol *traffic light*, sistem logistik dan lainnya. Macam-macam sistem yang telah disebutkan tadi adalah contoh dari permasalahan *Sistem Event Diskrit* (SED) (Rafflesia, 2012). Klas dari SED utamanya memuat sistem buatan manusia yang mampu mengontrol dan membantu mengatasi masalah-masalah tersebut. Dari hal tersebut tentu membutuhkan sejumlah komponen-komponen pendukung (*resources*). Gambaran yang akan dicapai dari karakteristik SED adalah kedinamikaannya yaitu *Event-Driven* yang bertolak belakang dengan *Time-Driven* (Subiono, 2015).

Dari perkembangan jaman tersebut, berangkat dari permasalahan kompleks yang ditemui di lingkungan perkotaan, muncul istilah *Smart City*. *Smart City* istilah pada kota yang dapat mengelola semua aspek permasalahan tersebut dengan baik, diselesaikan secara manual maupun digital. Salah satu dari permasalahan umum yang muncul yaitu masalah transportasi dan lalu lintas. Contoh tersebut sering menjadi pembahasan yang kita jumpai di kehidupan sehari-hari. Masalah transportasi sebenarnya menjadi bahasan yang dominan di Riset Operasi. Selain itu, sistem antrian juga memiliki ilmu tersendiri untuk menangani kasus kompleks yang menjadi pokok pembahasannya. Hal tersebut tentunya menjadi indikasi bahwa permasalahan tersebut penting untuk diatasi dalam suatu kota.

Berdasarkan data Badan Pengelolaan Daerah (Bappeda) dengan jumlah penduduk sekitar 1,6 juta jiwa. Kota Semarang bisa dipastikan akan mengalami masalah kepadatan lalu lintas serupa yang dialami kota-kota besar lainnya seperti Jakarta, Bandung dan Surabaya. Jumlah sepeda motor diperkirakan lebih dari 500.000 unit, sedangkan mobil sekitar 200.000 unit (Bappeda, 2016). Itu belum termasuk kendaraan bermotor dari luar daerah yang berlalu lalang di kota Semarang. Berdasarkan data Badan Pusat Statistik (BPS) pada 2015

panjang jalan (semua jenis) di Kota Semarang tercatat 2691 kilometer. Seiring dengan perkembangan perekonomian Kota Semarang yang terus ditingkatkan maka diperkirakan jumlah dari kendaraan juga akan semakin bertambah. Sementara itu, penambahan panjang dan lebar jalan tidak secepat pertambahan jumlah kendaraan yang beroperasi di darat. Sebagai contoh, bila semua mobil dan sepeda motor di Kota Semarang ditata berderet, maka akan memakan panjang jalan sekitar 1100 kilometer. Padahal tidak semua jalan di Kota Semarang dapat dilalui oleh mobil. Hal ini merupakan permasalahan nyata yang harus cepat diselesaikan. Solusi untuk mengatasi permasalahan transportasi ada beberapa cara, salah satu diantaranya dengan peningkatan dan perbaikan mutu fasilitas pelayanan transportasi publik dan pengelolaan sistem *traffic light* yang terintegrasi satu sama lain. Kemacetan terjadi karena terdapat konflik pergerakan yang ada di persimpangan. Hal tersebut terjadi akibat peningkatan volume perjalanan tidak diikuti dengan peningkatan prasarana transportasi yang memadai, maka akan terjadi suatu ketidakseimbangan antara permintaan (*demand*) dan pelayanan (*servery*) yang akhirnya akan menimbulkan suatu ketidak-lancaran dalam mobilitas yang berupa kemacetan (Nugroho, 2008). Untuk mengurangi konflik tersebut banyak dilakukan pengaturan agar dapat mengoptimalkan efektifitas persimpangan dengan menggunakan lampu lalu lintas. Lampu lalu lintas menandakan waktu kendaraan harus berjalan dan berhenti secara bergantian dari berbagai arah. Banyak ditemui lampu lalu lintas dengan durasi waktu lampu merah yang lama dan durasi waktu lampu hijau yang singkat. Hal ini menimbulkan antrian yang menumpuk sehingga terjadi kemacetan, ditambah lagi dengan banyak ditemui lampu lalu lintas yang saling berdekatan sehingga menimbulkan masalah baru yaitu pengendara menjumpai lampu merah yang terus menerus secara bergantian. Oleh karena itu dibutuhkan sebuah pengoptimalisasian dan pengintegrasian pengaturan lampu lalu lintas, khususnya dipersimpangan yang memiliki kepadatan kendaraan yang tinggi dan jarak antar lampu lalu lintas yang berdekatan.

Bentuk umum aljabar max-plus dengan sistem persamaan linear max-plus $A \otimes x = b$ dapat menjadi acuan dalam menyelesaikan terapan aljabar dengan memperhatikan sifat-sifat $A \otimes x = b$ dalam matrik dan vektor-vektornya (Rudhito, 2016). Selain itu, teori tentang graf juga menjadi alat bantu dalam menggambarkan kondisi *traffic light* menjadi bentuk graf berarah. Graf dalam aljabar max-plus dibahas oleh (Schutter, 2000). Graf berarah tersebut kemudian menjadi graf preseden atas matriks yang merepresentasikan kondisi *traffic light*. Pada penelitian ini, dibuat desain pengaturan lampu lalu lintas yang diintegrasikan dengan lampu lalu lintas lainnya menggunakan aljabar max-plus. Struktur jaringan *traffic light* meliputi kategori jaringan, fungsi jalan, klas dari jalan dan status dari jalan (Suprayitno, 2015).

(McEneaney, 2006) Aljabar max-plus merupakan suatu semifield komutatif atas $R_{max} = R \cup \{-\infty\}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian. $a \oplus b = \max\{a, b\}$, $a \otimes b = a + b$. Sedangkan menurut (Olsder, 1991) Untuk R himpunan bilangan riil, $R_{max} = R \cup \{-\infty\}$ dengan elemen netral $\varepsilon = -\infty$ dan elemen satuan $e = 0$ maka $\max(a, -\infty) = \max(-\infty, a) = a$ dan $a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty$. Untuk semua $a \in R_{max}$ maka $a \oplus \varepsilon = a \oplus e = a$ dan $a \otimes \varepsilon = e \otimes a = a$, dan elemen nol untuk \oplus dalam R_{max} dinyatakan dengan $\varepsilon = -\infty$.

Berdasarkan penjabaran di atas, penulis tertarik untuk mengkaji lebih jauh mengenai sistem persamaan linear aljabar max-plus serta penerapannya pada sistem antrian lampu lalu lintas. Mulai tahun 90an hingga saat ini kajian teori Aljabar Max-Plus untuk memodelkan, menganalisis dan mengkontrol jaringan transportasi dan lainnya terus berkembang. Berdasarkan karakteristik permasalahan tersebut penelitian ini dikaji dengan menggunakan model aljabar max-plus untuk mendesain pengaturan lampu lalu lintas (*traffic light*).

METODE PENELITIAN

Pada proses ini peneliti secara langsung melakukan observasi ke tempat penelitian dan mencari informasi yang diperlukan dalam proses penelitian sampai pada *detail* yang ingin diperoleh sehingga proses penelitian berjalan

lancar dan mendapatkan hasil yang diharapkan (Lall & Kristy, 2003).

Langkah yang ditempuh yaitu melakukan observasi lapangan terhadap objek penelitian yaitu di persimpangan yang menggunakan *traffic light* yang ada di Semarang. Tempat yang dipilih yaitu simpang tiga Jarakah dan simpang empat Lotte Mart Semarang. Pemilihan tempat tersebut guna mencari keselarasan data yang digunakan dalam penelitian dan untuk memastikan bahwa data tersebut dapat diteliti menggunakan alat Aljabar Max-Plus (Fahim, 2013).

Jenis data yang dikumpulkan antara lain (1) Data lama waktu lampu lalu lintas yang diterapkan sekarang (2) Data banyak kendaraan motor dan mobil yang melintas.

Metode yang digunakan dalam pengumpulan data penelitian ini adalah pengamatan dan pencatatan secara langsung untuk mengambil data primer dari tempat penelitian, yaitu durasi lampu merah, kuning, dan hijau menyala pada setiap persimpangan. Dari proses observasi, peneliti dapat melakukan analisis menggunakan bantuan alat aljabar max-plus untuk memperoleh nilai eigen dan vektor eigen atas matriks yang merepresentasikan sistem antrian pada *traffic light* dan dapat memberikan rekomendasi yang tepat bagi penyedia pelayanan publik dalam masalah pengaturan lampu lalu lintas. Penerapan aljabar max-plus dalam model sistem antrian juga dilakukan dengan model petri net dengan waktu (Subiono, 2009).

Analisis Data

Pembahasan dalam penelitian dimulai dari pembahasan algoritma power dalam Aljabar Max-Plus untuk membantu proses perhitungan. Diharapkan masalah sistem penjadwalan *traffic light* juga mampu diselesaikan dengan bantuan aljabar max-plus. Masalah yang dianalisis yaitu menemukan nilai eigen dan vektor eigen. Dari hasil perhitungan dapat digunakan sebagai bahan acuan penyusunan jadwal yang tepat pada *traffic light* yang ada di simpang tiga Jarakah dan simpang empat Lotte Mart Semarang..

Langkah-langkah analisis data adalah sebagai berikut:

1. Pendefinisian variabel pengaturan sistem lalu lintas
 Penelitian dimulai dari penggambaran sistem lalu lintas yang diteliti kedalam bentuk graf yang menjelaskan keadaan dari sistem tersebut. Graf tersebut kemudian ditentukan aturan arah sistem yang berlaku dari awal sistem sampai akhir sistem. Dari graf berarah kemudian disusun aturan sinkronisasi pada sistem lalu lintas untuk mengetahui karakteristik dan nilai masing-masing arus pada persimpangan yang akan menjadi acuan dalam menyusun persamaan. (Farlow, 2009) Matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ disebut *irreducible* jika graf $G = (V, A)$ dengan $V = \{1, 2, \dots, n\}$ dari matriks tersebut merupakan graf yang terhubung kuat yaitu jika setiap $i, j \in V, i \neq j$, terdapat suatu lintasan dari i ke j .
2. Mencari persamaan berdasarkan aturan dari aljabar max-plus $x(k + 1) = A \otimes x(k)$
 Aturan dari penerapan aljabar max-plus terutama pada penerapan disistem antrian dan penjadwalan memiliki bentuk $x(k + 1) = A \otimes x(k)$. Sistem tersebut menjadi acuan untuk penyesuaian model persimpangan dan membentuk matriks sesuai dengan persamaan yang telah diperoleh. Penyesuaian persamaan dengan sistem $x(k + 1) = A \otimes x(k)$ bertujuan untuk memperoleh matriks yang dapat menggambarkan kondisi sistem lalu lintas yang sesuai dengan kondisi dilapangan (Rudhito & Wahyuni, 2010).
3. Menghitung nilai eigen dan vektor eigen pada model matriks aljabar max-plus
 Proses selanjutnya yaitu mencari nilai eigen dan vektor eigen atas matriks yang menggambarkan kondisi sistem lalu lintas dengan menggunakan algoritma khusus pada aljabar max-plus yang menjadi pembahasan awal pada penelitian ini, yaitu dengan menggunakan algoritma power. Tentang nilai eigen dan vektor eigen atas aljabar max-plus pernah dibahas (Tunisa, 2016) namun bukan menggunakan algoritma power. Algoritma power dipilih karena memudahkan proses pencarian nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks dengan langkah-langkah yang sudah ditentukan. Definisi max-plus dalam matriks *closure* dan keberadaan *Eigenspace* (Sergeev, 2006).

4. Membandingkan keefektifan durasi *traffic light* lama dengan durasi baru
 Proses terakhir yaitu analisis dari sistem lalu lintas untuk mengetahui keefektifan durasi *traffic light* lama dengan yang baru melalui penjadwalan yang disusun berdasarkan hasil dari langkah ke-3. Penjadwalan disusun sampai menemukan jadwal yang periodik sebesar nilai eigen dan keberangkatan awal yang menyesuaikan vektor eigen. Dari proses tersebut dapat dibandingkan keefektifan durasi *traffic light* lama dengan durasi baru. Penjadwalan pernah dibahas dalam pembahasan penjadwalan kereta api oleh (Goverde, 2005).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Algoritma Power

Teorema 1 (Woude, 2000)

Jika keadaan awal $x(0) \neq \varepsilon$ sistem persamaan memenuhi $x(p) = c \otimes x(q)$ untuk beberapa bilangan bulat p dan q dengan $p > q \geq 0$ dan beberapa bilangan real c , maka

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k)}{k} = (\lambda \ \lambda \ \dots \ \lambda)^T$$

dengan $\lambda = \frac{c}{p-q}$ selanjutnya λ adalah suatu nilai eigen dari matriks A dengan vektor eigen diberikan oleh

$$v = \bigoplus_{i=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1))$$

Bukti.

Langkah 1

Dari sistem $x(k + 1) = A \otimes x(k)$ vektor waktu siklus diberikan oleh $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k)}{k}$ selalu ada. Untuk mengetahui bobot rata-rata dari perilaku periodik sistem $x(k + 1) = A \otimes x(k)$ yang memenuhi $x(p) = c \otimes x(q)$. Tinjau kasus menggunakan vektor keadaan awal berdasarkan v . Dengan v merupakan vektor eigen dari matriks yang bersesuaian dengan nilai eigen λ .

Kasus 1

Jika $x(0) = v$ maka,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k)}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (\lambda^{\otimes k} \otimes v)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \lambda^{\otimes k} \right) \otimes \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} v \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} k \lambda \otimes \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} v \right) \\ &= \lambda \otimes \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} v \right) \\ &= \lambda \otimes 0 \end{aligned}$$

Kasus 2

Jika $x(0) \neq v$ maka terdapat bilangan p, q dengan $p > q \geq 0$ dan bilangan real c sehingga memenuhi $x(p) = c \otimes x(q)$.

Misalkan $l = p - q$, untuk $k = q + jl$ diperoleh

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k)}{k} &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{x(q + jl)}{q + jl} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{x(q) + j x(l)}{q + jl} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{x(q) + j(x(p - q))}{q + jl} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{x(q) \otimes jc}{q + jl} \\ &= \left(\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{x(q)}{q + jl} \right) \otimes \left(\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{jc}{q + jl} \right) \\ &= \left(\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{x(q)}{q + jl} \right) \otimes \left(\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{jc}{q + jl} \right) \\ &= 0 \otimes \frac{c}{l} \quad (\text{sebab } x(q) \in \mathbb{R}_{max}^n) \end{aligned}$$

Dari kedua kasus tersebut diperoleh bahwa $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k)}{k} = \lambda \otimes 0$ dan $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k)}{k} = 0 \otimes \frac{c}{l}$ maka,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k)}{k} = \lambda \otimes 0 = 0 \otimes \frac{c}{l}$$

Diperoleh $\lambda \otimes 0 = 0 \otimes \frac{c}{l} \Leftrightarrow \lambda = \frac{c}{l} \Leftrightarrow \lambda = \frac{c}{p-q}$

Oleh sebab itu bobot rata-rata dari perilaku periodik sistem $x(k + 1) = A \otimes x(k)$ dengan vektor keadaan awal $(0 \ 0 \ \dots \ 0)^T$ adalah $\lambda = \frac{c}{p-q}$. Jadi vektor waktu siklus dari $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k)}{k} = (\lambda \ \lambda \ \dots \ \lambda)^T$.

Langkah 2

Lemma 1

Jika λ dan $v = \bigoplus_{i=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q + i - 1))$

maka $A \otimes v = \lambda \otimes v$.

Bukti.

$$A \otimes v = A \otimes \left[\bigoplus_{i=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q + i - 1)) \right]$$

$$\begin{aligned} &= \bigoplus_{i=1}^{p-q} [A \otimes (\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q + i - 1))] \\ &= \bigoplus_{i=1}^{p-q} [\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes (A \otimes x(q + i - 1))] \\ &= \bigoplus_{i=1}^{p-q} [\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q + i)] \\ &= \bigoplus_{l=2}^{p-q+1} [\lambda^{\otimes(p-q-l+1)} \otimes x(q + l - 1)] \\ &= \lambda \otimes \left[\bigoplus_{l=2}^{p-q+1} \lambda^{\otimes(p-q-l)} \otimes x(q + l - 1) \right] \\ &= \lambda \otimes \left[\bigoplus_{l=1}^{p-q} \lambda^{\otimes(p-q-l)} \otimes x(q + l - 1) \right] \\ &= \lambda \otimes v \end{aligned}$$

Jadi $A \otimes v = \lambda \otimes v$.

Dari sistem $x(k + 1) = A \otimes x(k)$ jika terdapat λ dan v memenuhi $A \otimes v = \lambda \otimes v$ maka vektor v disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ . Jadi untuk Teorema 4.3 Algoritma Power (Terbukti).

Pembahasan tentang penjadwalan *traffic light* juga pernah dilakukan oleh (Setiawan, 2016) menggunakan algoritma welsh-powel atau pewarnaan pada teori graf. Kali ini pembahasan dilakukan analisis dengan algoritma power dalam aljabar max-plus.

Berdasarkan Teorema 4.1 dapat dijabarkan menjadi suatu algoritma yang mempermudah penyelesaian dalam aljabar max-plus untuk mendapatkan nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks persegi yang dikenal dengan algoritma power.

Algoritma power

1. Memulai dari sebarang vektor awal $x(0) \neq \varepsilon$.
2. Iterasi $x(k + 1) = A \otimes x(k)$ sampai ada bilangan bulat $p > q \geq 0$ dan bilangan real c sehingga suatu perilaku periodik terjadi, yaitu $x(p) = c \otimes x(q)$.
3. Mencari nilai eigen $\lambda = \frac{c}{p-q}$.
4. Mencari calon vektor eigen dengan,

$$v = \frac{1}{p-q} \sum_{i=1}^{p-q} x(q+i-1)$$

5. Tunjukkan bahwa $A \otimes v = \lambda \otimes v$. Jika terpenuhi maka v merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ selanjutnya algoritma berhenti.
6. Jika tidak, mulai $x(k+1) = A \otimes x(k)$ dengan $x(0) = v$ sampai ada bilangan $r \geq 0$, sehingga $x(r+1) = \lambda \otimes x(r)$. Maka $x(r)$ merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ .

Algoritma di atas digunakan untuk memperoleh nilai eigen dan vektor eigen dari dari matriks $A \in R_{max}^{n \times n}$ pada sistem $x(k+1) = A \otimes x(k)$ untuk semua $k = 0, 1, 2, \dots$. Penerapan Algoritma Power di atas perlu penambahan bukti yang menunjukkan $v = \frac{1}{p-q} \sum_{i=1}^{p-q} x(q+i-1)$ dapat memperoleh calon vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ . Selanjutnya diberikan Lemma 2 berikut.

Lemma 2

Jika $\lambda = \frac{c}{p-q}$ dan $v = \frac{1}{p-q} \sum_{i=1}^{p-q} x(q+i-1)$ maka $A \otimes v \leq \lambda \otimes v$.

Bukti.

Pembuktian fokus pada komponen ke $-i$ dari vektor $A \otimes v$, untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\begin{aligned} (A \otimes v)_i &= \max_j \{a_{ij} + v_j\} \\ &= \max_j \left\{ a_{ij} + \frac{1}{p-q} [x_j(q) + x_j(q+1) + \dots + x_j(p-2) + x_j(p-1)] \right\} \\ &= \max_j \left\{ \frac{1}{p-q} [(p-q)a_{ij} + x_j(q) + x_j(q+1) + \dots + x_j(p-2) + x_j(p-1)] \right\} \\ &= \frac{1}{p-q} \max_j \{p - qa_{ij} + x_j(q) + x_j(q+1) + \dots + x_j(p-2) + x_j(p-1)\} \\ &\leq \frac{1}{p-q} [\max_j \{a_{ij} + x_j(q)\} + \max_j \{a_{ij} + x_j(q+1)\} + \dots + \max_j \{a_{ij} + x_j(p-2)\} + \max_j \{a_{ij} + x_j(p-1)\}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{p-q} [x_i(q+1) + x_i(q+2) + \dots + x_i(p-1) + x_i(p)] \\ &= \frac{1}{p-q} [x_i(q+1) + x_i(q+2) + \dots + x_i(p-1) + x_i(q) + c] \\ &= \frac{1}{p-q} [x_i(q+1) + x_i(q+2) + \dots + x_i(p-1) + x_i(q)] + \lambda \\ &= v_i \otimes \lambda. \end{aligned}$$

Jadi $(A \otimes v)_i \leq v_i \otimes \lambda$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$. Akibat dari Lemma 2 muncul konsekuensi yaitu Akibat 1.

Akibat 1

Jika λ dan v yang diperoleh dari Lemma 2 berakibat $A \otimes v \leq v \otimes \lambda$ maka sistem $x(k+1) = A \otimes x(k)$ dimulai dengan $x(0) = v$ sehingga

$$x(k+1) \leq \lambda \otimes x(k) \text{ untuk semua } k = 0, 1, 2, \dots$$

Bukti.

Jelas $x(k) = A^{\otimes k} \otimes v$ untuk semua $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A^{\otimes k+1} \otimes v = A^{\otimes k} \otimes (A \otimes v) \\ &\leq A^{\otimes k} \otimes (\lambda \otimes v) \\ &= \lambda \otimes (A^{\otimes k} \otimes v) = \lambda \otimes x(k). \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } x(k+1) \leq \lambda \otimes x(k).$$

Jika $A \otimes v < \lambda \otimes v$ maka mulai sistem $x(k+1) = A \otimes x(k)$ dengan $x(0) = v$ sampai terdapat bilangan $r \geq 0$, sehingga $x(r+1) = \lambda \otimes x(r)$. Sehingga $x(r)$ merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ .

Dari Akibat 1 diperoleh $x(k+1) \leq \lambda \otimes x(k)$ untuk semua $k = 0, 1, 2, \dots$

Asumsi $x(r+1) = \lambda \otimes x(r)$ untuk semua $r = q, q+1, \dots, p-1$.

Misalkan terdapat $q \leq r_0 \leq p-1$ dan $1 \leq i_0 \leq n$ sedemikian hingga $x_{i_0}(r_0+1) < \lambda \otimes x_{i_0}(r_0)$.

Karena untuk semua $r \neq r_0$ dan $r = q, q+1, \dots, p-1$ dan dipunyai $x_{i_0}(r_0+1) \leq \lambda \otimes x_{i_0}(r_0)$.

$$\text{Diperoleh } x_{i_0}(p) < \lambda^{\otimes p-q} \otimes x_{i_0}(q)$$

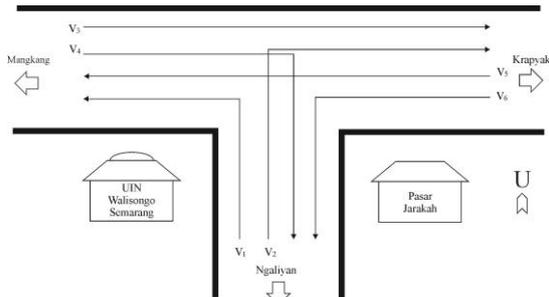
Dari periodisasi diperoleh $x(p) = c \otimes x(q)$ menunjukkan bahwa $x_{i_0}(p) = c \otimes x_{i_0}(q)$

Oleh sebab itu diperoleh $c < \lambda^{\otimes p-q}$ atau $\lambda > \frac{c}{p-q}$.

Hal ini kontradiksi bahwa perilaku periodik haruslah sama dengan bobot rata-rata $\lambda = \frac{c}{p-q}$ dari $x(r + 1) = \lambda \otimes x(r)$.

Jadi diperoleh $x(r + 1) = \lambda \otimes x(r)$ untuk semua $r = q, q + 1, \dots, p - 1$. Ini menunjukkan bahwa $x(q)$ sebagai vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ . Algoritma Power terpenuhi.

Pembahasan Sistem Traffic light Simpang Tiga Jarakah



Gambar 1. Sistem Traffic light Simpang Tiga Jarakah

Gambar 1 merepresentasikan arus-arus dari simpang tiga Jarakah dan aturan yang diterapkan pada pergerakan arus simpang tersebut.

Tabel 1. Durasi Lampu Menyala Simpang Tiga Jarakah

| Arus Simpang | Durasi Lampu Menyala (detik) | | | Total |
|----------------------|------------------------------|--------|-------|-------|
| | Hijau | Kuning | Merah | |
| Ngaliyan ke Krapyak | 25 | 4 | 86 | 115 |
| Mangkang ke Krapyak | 74 | 4 | 37 | 115 |
| Mangkang ke Ngaliyan | 15 | 4 | 96 | 115 |
| Krapyak ke Mangkang | 55 | 4 | 56 | 115 |
| Total | 168 | 16 | 276 | 460 |

Data primer Tabel 1 tersebut diambil pada tanggal 11 juni 2017 yaitu pada rentang waktu pukul 08.00-09.30 WIB. Waktu tersebut dipilih dikarenakan jumlah kepadatan kendaraan yang melintas di jalan tersebut menurut peneliti merupakan jam sibuk dari persimpangan, sehingga banyak terjadi antrian yang panjang pada saat terjadi pengaturan lalu lintas.

Tabel 2. Beban Waktu Simpang Tiga Jarakah

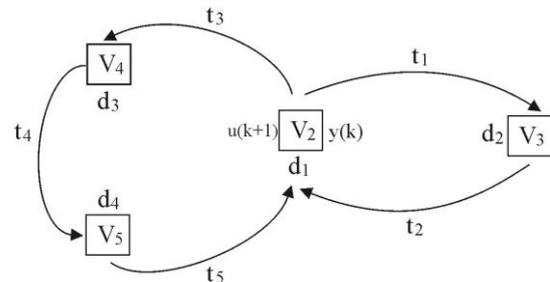
| Arus Simpang | Beban waktu (meter/detik) |
|----------------------|---------------------------|
| Ngaliyan ke Krapyak | 1.29 |
| Mangkang ke Krapyak | 4.45 |
| Mangkang ke Ngaliyan | 2.54 |
| Krapyak ke Mangkang | 2.03 |

Dari Tabel 2 bisa dilihat bahwa beban waktu untuk mengatasi kemacetan pada arus Mangkang ke arah Krapyak dan Krapyak ke arah Mangkang memiliki selisih yang cukup banyak yaitu $4.45 - 2.03 = 2.42$ padahal penerapan di lapangan kedua arus tersebut memiliki kepadatan kendaraan (terutama mobil) yang tidak jauh berbeda yaitu 0.295 kendaraan/detik untuk Mangkang ke Krapyak dan 0.258 kendaraan/detik untuk Krapyak ke Mangkang. Agar durasi masing-masing arus seimbang perlu adanya penambahan durasi durasi lampu hijau pada arah Krapyak ke Ngaliyan serta pengurangan durasi durasi lampu hijau pada arah Mangkang ke Krapyak. Rekayasa durasi waktu adalah perubahan lama durasi lampu lalu lintas yang lama dengan pertimbangan yang kondisional sesuai dengan kondisi yang dibutuhkan. Rekayasa durasi waktu yang baru simpang tiga Jarakah diperoleh berdasarkan selisih terbesar dari beban waktu tiap arus. Dari Tabel 2. maka akan diketahui selisihnya sebesar $4.45 - 2.03 = 2.42$, atau $4.45 - 1.29 = 3.16$. Kedua nilai tersebut dibulatkan menjadi 3.

Tabel 3. Rekayasa Durasi Lampu Menyala Simpang Tiga Jarakah

| Arus Simpang | Durasi Lampu Menyala | | | Total |
|----------------------|----------------------|--------|-------|-------|
| | Hijau | Kuning | Merah | |
| Ngaliyan ke Krapyak | 28 | 4 | 83 | 115 |
| Mangkang ke Krapyak | 71 | 4 | 40 | 115 |
| Mangkang ke Ngaliyan | 12 | 4 | 99 | 115 |
| Krapyak ke Mangkang | 58 | 4 | 53 | 115 |
| Total | 169 | 16 | 275 | 460 |

Data Tabel 3 tersebut merupakan rekayasa yang dilakukan sesuai dengan keadaan beban waktu masing-masing arus. Graf berarah menunjukkan bahwa sistem simpang tiga Jarakah terhubung dengan kuat karena bobot setiap arus memiliki lintasan dari fase awal ke fase akhir suatu siklus.



Gambar 2. Graf Berarah Sistem Simpang Tiga Jarakah

Dari Gambar 2 arus *traffic light* yang dirancang dalam suatu graf dapat dimodelkan menggunakan aljabar max-plus.

Selanjutnya disusun aturan sinkronisasi yang menggambarkan kondisi sistem. (Hasanah & Putrawangsa, 2015). Berdasarkan aturan sinkronisasi model yang disusun dari pengaturan lampu lalu lintas pada simpang tiga Jarakah diperoleh persamaan (1) sebagai berikut.

$$x_1(k+1) = u(k+1) \oplus (x_2(k) \otimes 75) \oplus (x_4(k) \otimes 62) \oplus -\infty$$

$$x_2(k+1) = u(k+1) \oplus (x_1(k) \otimes 32) \oplus (x_5(k) \otimes 83) \oplus -\infty$$

$$x_3(k+1) = u(k+1) \oplus (x_1(k) \otimes 32) \oplus (x_5(k) \otimes 83) \oplus -\infty$$

$$x_4(k+1) = u(k+1) \oplus (x_3(k) \otimes 16) \oplus -\infty$$

$$x_5(k) = u(k+1) \oplus -\infty$$

dari persamaan (1) diperoleh model berikut,

$$x(k+1) = \bigoplus_{p=1}^M (A \otimes x(k+1-p)), k \geq 0$$

Matriks A adalah matriks berukuran $n \times n$, dengan n adalah banyaknya variabel. Matriks A berkaitan dengan vektor $x(k+1-p)$ yang berukuran $n \times 1$. Sedangkan M adalah banyaknya iterasi pada sistem.

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_4(k) \end{bmatrix}, \text{ dan } A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,4} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{4,1} & a_{4,2} & \dots & a_{4,4} \end{bmatrix}$$

Dari persamaan (1) diperoleh entri dari matriks A adalah

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 75 & \varepsilon & 62 \\ 32 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 32 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 16 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dan vektor eigen atas matriks A dapat dicari dengan langkah-langkah sebagai berikut.

- Langkah pertama dengan memulai dari sebarang vektor awal $x(0) \neq \varepsilon$,

dengan vektor keadaan awal $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- Langkah kedua dengan Iterasi $x(k+1) = A \otimes x(k)$ sampai ada bilangan bulat $p > q \geq 0$ dan bilangan real c sehingga suatu perilaku periodik terjadi, yaitu $x(p) = c \otimes x(q)$.

Iterasi pertama

$$A \otimes x(0) = \begin{bmatrix} \varepsilon & 75 & \varepsilon & 62 \\ 32 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 32 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 16 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 32 \\ 32 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Iterasi kedua

$$A \otimes x(0) = \begin{bmatrix} \varepsilon & 75 & \varepsilon & 62 \\ 32 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 32 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 16 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 75 \\ 32 \\ 32 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107 \\ 107 \\ 107 \\ 48 \end{bmatrix}$$

Iterasi tersebut berlanjut sampai menemukan kondisi $x(p) = c \otimes x(q)$ dalam algoritma power.

| | | | | |
|--|--|---|--|--|
| $x(0)$ | $x(1)$ | $x(2)$ | $x(3)$ | $x(4) \dots$ |
| \downarrow | \downarrow | \downarrow | \downarrow | \downarrow |
| $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 75 \\ 32 \\ 32 \\ 16 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 107 \\ 107 \\ 107 \\ 48 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 182 \\ 139 \\ 139 \\ 123 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 214 \\ 214 \\ 214 \\ 155 \end{bmatrix} \dots$ |

Dari proses iterasi yang dilakukan, maka didapatkan hasil yang memenuhi algoritma power yaitu

$$\begin{bmatrix} 214 \\ 214 \\ 214 \\ 155 \end{bmatrix} = 107 \otimes \begin{bmatrix} 107 \\ 107 \\ 107 \\ 48 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x(4) = 107 \otimes x(2)$$

- Langkah ketiga dalam algoritma power diperoleh nilai $p = 4, q = 2$ dan $c = 107$. Jadi nilai eigen atas matriks A adalah

$$\lambda = \frac{c}{p-q} = \frac{107}{4-2} = \frac{107}{2} = 53,5$$

- Menghitung vektor eigen

$$v = \frac{1}{p-q} \sum_{i=1}^{p-q} x(q+i-1)$$

Jadi vektor yang bersesuaian adalah

$$v = \frac{1}{6-4} (x(2) + x(3)) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 107 \\ 107 \\ 107 \\ 48 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 182 \\ 139 \\ 139 \\ 123 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 289 \\ 246 \\ 246 \\ 171 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 144,5 \\ 123 \\ 123 \\ 85,5 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya selidiki bahwa v adalah vektor eigen dari matriks A untuk nilai eigen $\lambda = 53,5$ sebagai berikut,

$$A \otimes v = \begin{bmatrix} \varepsilon & 75 & \varepsilon & 62 \\ 32 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 32 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 16 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 144,5 \\ 123 \\ 123 \\ 85,5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 198 \\ 176,5 \\ 176,5 \\ 139 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \otimes v = 53,5 \otimes \begin{bmatrix} 144,5 \\ 123 \\ 123 \\ 85,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 198 \\ 176,5 \\ 176,5 \\ 139 \end{bmatrix}$$

dengan demikian $A \otimes v = \lambda \otimes v$.

Jadi vektor eigen atas matriks A yang bersesuaian dengan $\lambda = 53,5$ adalah

$$v = \begin{bmatrix} 144,5 \\ 123 \\ 123 \\ 85,5 \end{bmatrix}$$

Pembahasan selanjutnya yaitu mengenai pengaturan penjadwalan simpang tiga Jarakah dengan memanfaatkan nilai eigen dan vektor eigen yang sudah diperoleh dari proses algoritma power.

Analisis Model Simpang Tiga Jarakah

Selanjutnya dilakukan analisis berdasarkan perhitungan yang dilakukan terhadap graf yang merepresentasikan sistem dari simpang tiga Jarakah. Unit fase yang ada pada graf sistem simpang tiga Jarakah sebanyak 4 unit. Nilai 53,5 merupakan nilai eigen dari matriks A . Dengan kata lain, waktu rata-rata satu fase penyalaan durasi lampu hijau pada sistem simpang tiga Jarakah adalah 53,5 satuan waktu. Selain itu persimpangan Jarakah sebenarnya sudah menerapkan sistem *Auto Traffic Control System (ATCS)* yaitu dengan pemasangan CCTV pada persimpangan tersebut tetapi pada penerapannya durasi durasi yang diterapkan belum sesuai dengan kepadatan kendaraan yang melintasi setiap simpang pada persimpangan tersebut, maka dari itu kajian lebih mendalam terkait durasi durasi yang proporsional dengan keadaan dilapangan dapat menggunakan kajian aljabar max plus.

Jadi agar saat keberangkatan *traffic light* periodik dengan periode sebesar λ , maka $x(0)$

yaitu keberangkatan awal pelanggan, haruslah merupakan suatu vektor eigen yang bersesuaian dengan λ . Dari vektor eigen yang diperoleh diatas maka,

$$A \otimes v = \begin{bmatrix} \varepsilon & 75 & \varepsilon & 62 \\ 32 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 32 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 16 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 144,5 \\ 123 \\ 123 \\ 85,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 198 \\ 176,5 \\ 176,5 \\ 139 \end{bmatrix}$$

Iterasinya akan berlangsung seperti berikut.

$$\begin{matrix} x(0) & x(1) & x(2) & x(3) \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{bmatrix} 144,5 \\ 123 \\ 123 \\ 85,5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 198 \\ 176,5 \\ 176,5 \\ 139 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 251,5 \\ 230 \\ 230 \\ 192,5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 305 \\ 283,5 \\ 283,5 \\ 246 \end{bmatrix} \dots \end{matrix}$$

berlanjut sampai $k = n$

Tabel 4. Perhitungan Saat Keberangkatan Simpang Tiga Periodik

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_1 | 144,5 | 198 | 251,5 | 305 | 358,5 | 412 | 465,5 |
| x_2 | 123 | 176,5 | 230 | 283,5 | 337 | 390,5 | 444 |
| x_3 | 123 | 176,5 | 230 | 283,5 | 337 | 390,5 | 444 |
| x_4 | 85,5 | 139 | 192,5 | 246 | 299,5 | 353 | 406,5 |

Dari Tabel 4 terlihat bahwa saat awal keberangkatan tercepat *traffic light* adalah vektor eigen $x(0) = [144.5 \ 123 \ 123 \ 85.5]^T$ sehingga keberangkatan *traffic light* pada saat pelayanan dalam sistem antrian tersebut periodik, dengan periode sebesar 53,5. Dari data durasi baru di atas diperoleh beban waktu masing-masing simpang arus yang lebih proporsional dilihat dari kebutuhan kepadatan kendaraan masing-masing arus simpang.

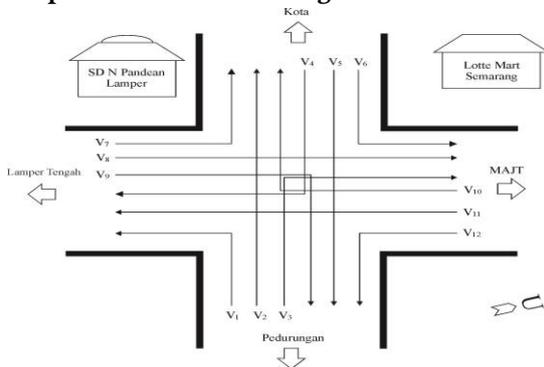
Dari analisis model simpang tiga Jarakah diperoleh durasi baru pengaturan lampu lalu lintas pada Tabel 5.

Tabel 5. Durasi Lampu Lalu Lintas Baru Simpang Tiga Jarakah

| Arus Simpang | Durasi Lama (detik) | | | Durasi Baru (detik) | | |
|----------------------|---------------------|--------|-------|---------------------|--------|-------|
| | Hijau | Kuning | Merah | Hijau | Kuning | Merah |
| Ngalihan ke Krapyak | 25 | 4 | 86 | 28 | 4 | 83 |
| Mangkang ke Krapyak | 74 | 4 | 37 | 69 | 4 | 42 |
| Mangkang ke Ngalihan | 15 | 4 | 96 | 12 | 4 | 99 |
| Krapyak ke Mangkang | 55 | 4 | 56 | 58 | 4 | 53 |
| Total | 169 | 16 | 275 | 167 | 16 | 277 |

Dari data Tabel 5 durasi baru di atas, diperoleh simpang arus yang lebih proporsional dan sesuai dengan kebutuhan kepadatan kendaraan masing-masing simpang.

Pembahasan Sistem *Traffic light* Simpang Empat Lotte Mart Semarang



Gambar 3. Sistem *Traffic light* Simpang Empat Lotte Mart Semarang

Gambar 3 merepresentasikan arus-arus dari simpang empat Lotte Mart dan aturan yang diterapkan pada pergerakan arus simpang tersebut.

Tabel 6. Durasi Lampu Menyala Simpang Empat Lotte Mart Semarang

| Arus Simpang | Durasi Lampu Menyala | | | Total |
|--------------------------------------|----------------------|--------|-------|-------|
| | Hijau | Kuning | Merah | |
| Kota ke Lamper Tengah | 19 | 3 | 156 | 178 |
| Kota ke Pedurungan | 71 | 3 | 104 | 178 |
| Lamper Tengah ke Pedurungan dan MAJT | 29 | 3 | 146 | 178 |
| Pedurungan ke MAJT | 19 | 3 | 156 | 178 |
| Pedurungan ke Kota | 71 | 3 | 104 | 178 |
| MAJT ke Lamper Tengah dan Kota | 29 | 3 | 146 | 178 |
| Total | 296 | 24 | 1104 | 1424 |

Data Primer Tabel 6 diambil dua hari yaitu pada tanggal 16 Juni 2017 dan 18 Juni 2017 yaitu pada pukul 16.00-18.00 WIB. Waktu tersebut dipilih dikarenakan kepadatan kendaraan yang melintas di daerah tersebut menurut peneliti merupakan jam sibuk dari persimpangan sehingga terjadi antrian yang berkepanjangan.

Tabel 7. Beban Waktu Simpang Empat Lotte Mart Semarang

| Arus Simpang | Beban waktu (meter/detik) |
|--------------------------------------|---------------------------|
| Kota ke Lamper Tengah | 1.77 |
| Kota ke Pedurungan | 1.92 |
| Lamper Tengah ke Pedurungan dan MAJT | 0.95 |
| Pedurungan ke MAJT | 2.36 |
| Pedurungan ke Kota | 1.47 |
| MAJT ke Lamper Tengah dan Kota | 0.62 |

Dari Tabel 7 bisa dilihat bahwa beban waktu untuk mengatasi kemacetan pada arus Kota ke Lamper Tengah dan Pedurungan ke MAJT memiliki selisih sebesar

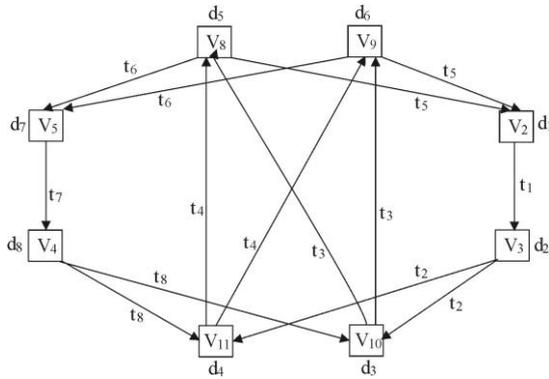
$2.36 - 1.77 = 0.59$, penerapan di lapangan kedua arus tersebut berjalan secara bersamaan dan memiliki kepadatan kendaraan (terutama mobil) yang tidak jauh berbeda yaitu 0.039 kendaraan/detik untuk arus Kota ke Lamper Tengah dan 0.033 kendaraan/detik untuk arus Pedurungan ke MAJT. Arus Kota ke Pedurungan dan Pedurungan ke Kota memiliki selisih sebesar $1.92 - 1.47 = 0.45$, penerapan di lapangan kedua arus tersebut berjalan secara bersamaan dan memiliki kepadatan kendaraan (terutama mobil) sebesar 0.241 kendaraan/detik untuk arus Kota ke Pedurungan dan 0.303 kendaraan/detik untuk arus Pedurungan ke Kota. Sedangkan arus Lamper Tengah ke Pedurungan dan MAJT berjalan secara bergantian dengan arus MAJT ke Lamper Tengah dan Kota, tetapi keduanya memiliki beban waktu untuk mengurai kemacetan yang masih rendah yaitu dibawah satu detik/kendaraan.

Agar durasi menyala lampu seimbang perlu adanya penambahan durasi lampu hijau di kedua arus tersebut. Rekeyasa durasi waktu yang baru simpang empat Lotte Mart Semarang diperoleh berdasarkan kebutuhan masing-masing arus yang memiliki kepadatan kendaraan cukup besar.

Tabel 8. Rekeyasa Durasi Lampu Menyala Simpang Empat Lotte Mart

| Arus Simpang | Durasi Lampu Menyala | | | Total |
|--------------------------------------|----------------------|--------|-------|-------|
| | Hijau | Kuning | Merah | |
| Kota ke Lamper Tengah | 21 | 3 | 156 | 180 |
| Kota ke Pedurungan | 73 | 3 | 104 | 180 |
| Lamper Tengah ke Pedurungan dan MAJT | 31 | 3 | 146 | 180 |
| Pedurungan ke MAJT | 21 | 3 | 156 | 180 |
| Pedurungan ke Kota | 73 | 3 | 104 | 180 |
| MAJT ke Lamper Tengah dan Kota | 31 | 3 | 146 | 180 |

Data Tabel 8 merupakan rekeyasa yang dilakukan sesuai dengan keadaan beban waktu masing-masing arus Graf berarah dibawah ini menunjukkan bahwa sistem simpang empat Lotte Mart terhubung dengan kuat. Bobot setiap arus memiliki lintasan dari fase awal ke fase akhir suatu siklus. Dari arus yang telah dirancang dalam suatu graf tersebut memiliki dua lintasan yang berbeda namun dengan bobot yang sama sampai fase akhir lintasan. Sehingga kedua lintasan yang tergambar dalam graf tersebut memiliki siklus yang sama.



Gambar 4. Graf Berarah Simpang Empat Lotte Mart Semarang

Dari Gambar 4 arus *traffic light* yang dirancang dalam suatu graf dapat dimodelkan menggunakan aljabar max-plus.

Selanjutnya disusun aturan sinkronisasi yang menggambarkan kondisi sistem. Berdasarkan aturan sinkronisasi model yang disusun dari pengaturan lampu lalu lintas pada simpang empat Lotte Mart Semarang diperoleh persamaan (2) sebagai berikut.

$$x_1(k + 1) = u(k + 1) \oplus (x_7(k) \otimes 34) \oplus (x_8(k) \otimes 34) \oplus -\infty$$

$$x_2(k + 1) = u(k + 1) \oplus (x_7(k) \otimes 34) \oplus (x_8(k) \otimes 34) \oplus -\infty$$

$$x_3(k + 1) = u(k + 1) \oplus (x_1(k) \otimes 76) \oplus (x_9(k) \otimes 104) \oplus -\infty$$

$$x_4(k + 1) = u(k + 1) \oplus (x_2(k) \otimes 76) \oplus (x_9(k) \otimes 104) \oplus -\infty$$

$$x_5(k + 1) = u(k + 1) \oplus (x_3(k) \otimes 24) \oplus (x_4(k) \otimes 24) \oplus -\infty$$

$$x_6(k + 1) = u(k + 1) \oplus (x_3(k) \otimes 24) \oplus (x_4(k) \otimes 24) \oplus -\infty$$

$$x_7(k + 1) = u(k + 1) \oplus (x_5(k) \otimes 34) \oplus (x_6(k) \otimes 34) \oplus -\infty$$

$$x_8(k + 1) = u(k + 1) \oplus (x_5(k) \otimes 34) \oplus (x_6(k) \otimes 34) \oplus -\infty$$

$$x_9(k) = u(k + 1) \oplus -\infty$$

dari persamaan (2) diperoleh model berikut,

$$x(k + 1) = \bigoplus_{p=1}^M (B \otimes x(k + 1 - p)), k \geq 0$$

Matriks B adalah matriks berukuran $n \times n$, dengan n adalah banyaknya variabel. Matriks B berkaitan dengan vektor $x(k + 1 - p)$ yang berukuran $n \times 1$. Sedangkan M adalah banyaknya iterasi pada sistem.

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_8(k) \end{bmatrix}, \text{ dan } B = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,8} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,8} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{8,1} & a_{8,2} & \dots & a_{8,8} \end{bmatrix}$$

Dari persamaan (2) diperoleh entri dari matriks B adalah

$$B = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & 34 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & 34 \\ 76 & \varepsilon \\ \varepsilon & 76 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 24 & 24 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 24 & 24 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & 34 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & 34 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dan vektor eigen atas matriks B dapat dicari dengan langkah-langkah sebagai berikut.

- Langkah pertama dengan memulai dari sebarang vektor awal $x(0) \neq \varepsilon$

dengan vektor keadaan awal $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- Langkah kedua dengan Iterasi $x(k + 1) = B \otimes x(k)$ sampai ada bilangan bulat $p > q \geq 0$ dan bilangan real c sehingga suatu perilaku periodik terjadi, yaitu $x(p) = c \otimes x(q)$.

Iterasi pertama

$$B \otimes x(0) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & 34 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & 34 \\ 76 & \varepsilon \\ \varepsilon & 76 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 24 & 24 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 24 & 24 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & 34 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & 34 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 34 \\ 76 \\ 76 \\ 24 \\ 24 \\ 34 \\ 34 \end{bmatrix}$$

Iterasi kedua

$$B \otimes x(1) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & 34 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & 34 \\ 76 & \varepsilon \\ \varepsilon & 76 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 24 & 24 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 24 & 24 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & 34 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & 34 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 34 \\ 34 \\ 76 \\ 76 \\ 24 \\ 24 \\ 34 \\ 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 68 \\ 68 \\ 110 \\ 110 \\ 100 \\ 100 \\ 58 \\ 58 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 194 \\ 194 \\ 330 \\ 330 \\ 258 \\ 258 \\ 226 \\ 226 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 48.5 \\ 48.5 \\ 82.5 \\ 82.5 \\ 64.5 \\ 64.5 \\ 56.5 \\ 56.5 \end{bmatrix}$$

Proses iterasi tersebut berlangsung sampai mendapatkan kondisi yang sesuai dengan algoritma power.

$$\begin{matrix} x(0) & x(1) & x(2) & x(3) & x(4) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 34 \\ 34 \\ 76 \\ 76 \\ 24 \\ 24 \\ 34 \\ 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 68 \\ 68 \\ 110 \\ 110 \\ 100 \\ 100 \\ 58 \\ 58 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 92 \\ 92 \\ 144 \\ 144 \\ 134 \\ 134 \\ 134 \\ 134 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 168 \\ 168 \\ 168 \\ 168 \\ 168 \\ 168 \\ 168 \\ 168 \end{bmatrix} \dots$$

Dari proses iterasi yang dilakukan, maka didapatkan hasil yang memenuhi algoritma power yaitu

$$\begin{bmatrix} 168 \\ 168 \\ 168 \\ 168 \\ 168 \\ 168 \\ 168 \\ 168 \end{bmatrix} = 168 \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x(4) = 168 \otimes x(0)$$

3. Langkah ketiga dalam algoritma power diperoleh nilai $p = 4, q = 0$ dan $c = 160$.
Jadi nilai eigen atas matriks B adalah

$$\lambda = \frac{c}{p - q} = \frac{168}{4 - 0} = \frac{168}{4} = 42$$

4. Menghitung calon vektor eigen

$$v = \frac{1}{p - q} \sum_{i=1}^{p-q} x(q + i - 1)$$

Jadi vektor yang bersesuaian adalah

$$v = \frac{1}{4 - 0} (x(0) + x(1) + x(2) + x(3))$$

$$= \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 34 \\ 34 \\ 76 \\ 76 \\ 24 \\ 24 \\ 34 \\ 34 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 68 \\ 68 \\ 110 \\ 110 \\ 100 \\ 100 \\ 58 \\ 58 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 92 \\ 92 \\ 144 \\ 144 \\ 134 \\ 134 \\ 134 \\ 134 \end{bmatrix} \right)$$

Selanjutnya selidiki bahwa v adalah vektor eigen dari matriks B untuk nilai eigen $\lambda = 42$ sebagai berikut.

$$B \otimes v = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & 34 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & 34 \\ 76 & \varepsilon \\ \varepsilon & 76 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 24 & 24 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 24 & 24 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & 34 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & 34 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 48.5 \\ 48.5 \\ 82.5 \\ 82.5 \\ 64.5 \\ 64.5 \\ 56.5 \\ 56.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90.5 \\ 90.5 \\ 124.5 \\ 124.5 \\ 106.5 \\ 106.5 \\ 98.5 \\ 98.5 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \otimes v = 42 \otimes \begin{bmatrix} 48.5 \\ 48.5 \\ 82.5 \\ 82.5 \\ 64.5 \\ 64.5 \\ 56.5 \\ 56.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90.5 \\ 90.5 \\ 124.5 \\ 124.5 \\ 106.5 \\ 106.5 \\ 98.5 \\ 98.5 \end{bmatrix}$$

dengan demikian $B \otimes v = \lambda \otimes v$.

Jadi vektor eigen atas matriks B yang bersesuaian dengan $\lambda = 42$ adalah

$$v = \begin{bmatrix} 48.5 \\ 48.5 \\ 82.5 \\ 82.5 \\ 64.5 \\ 64.5 \\ 56.5 \\ 56.5 \end{bmatrix}$$

Pengaturan penjadwalan simpang empat Lotte Mart Semarang dengan memanfaatkan nilai eigen dan vektor eigen yang sudah diperoleh.

Analisis Model Simpang Empat Lotte Mart Semarang

Berdasarkan pengamatan dan perhitungan yang dilakukan terhadap graf yang merepresentasikan sistem dari simpang empat Lotte Mart. Unit fase yang ada pada graf sistem simpang empat Lotte Mart Semarang sebanyak 8 unit. Nilai 42 merupakan nilai eigen atas matriks B . Dengan kata lain, waktu rata-rata satu fase penyalaan durasi lampu hijau pada

sistem simpang empat Lotte Mart Semarang adalah 42 satuan waktu. Jadi agar saat keberangkatan *traffic light* periodik dengan periode sebesar λ , maka $x(0)$ yaitu saat keberangkatan awal pelanggan, haruslah merupakan suatu vektor eigen yang bersesuaian dengan λ . Dari vektor eigen yang diperoleh diatas maka,

$$B \otimes v = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & 34 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & 34 \\ 76 & \varepsilon \\ \varepsilon & 76 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 24 & 24 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 24 & 24 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & 34 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & 34 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 48.5 \\ 48.5 \\ 82.5 \\ 82.5 \\ 64.5 \\ 64.5 \\ 56.5 \\ 56.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90.5 \\ 90.5 \\ 124.5 \\ 124.5 \\ 106.5 \\ 106.5 \\ 98.5 \\ 98.5 \end{bmatrix}$$

Iterasinya akan berlangsung seperti berikut.

$$\begin{matrix} x(0) & x(1) & x(2) \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{bmatrix} 48.5 \\ 48.5 \\ 82.5 \\ 82.5 \\ 64.5 \\ 64.5 \\ 56.5 \\ 56.5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 90.5 \\ 90.5 \\ 124.5 \\ 124.5 \\ 106.5 \\ 106.5 \\ 98.5 \\ 98.5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 132.5 \\ 132.5 \\ 166.5 \\ 166.5 \\ 148.5 \\ 148.5 \\ 140.5 \\ 140.5 \end{bmatrix} \dots \end{matrix}$$

berlanjut sampai $k = n$.

Diperoleh Tabel 9 yang menggambarkan keadaan tersebut.

Tabel 9. Perhitungan Keberangkatan Simping Empat Periodik

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_1 | 48,5 | 90,5 | 132,5 | 174,5 | 216,5 | 258,5 | 300,5 |
| x_2 | 48,5 | 90,5 | 132,5 | 174,5 | 216,5 | 258,5 | 300,5 |
| x_3 | 82,5 | 124,5 | 166,5 | 208,5 | 250,5 | 292,5 | 334,5 |
| x_4 | 82,5 | 124,5 | 166,5 | 208,5 | 250,5 | 292,5 | 334,5 |
| x_5 | 64,5 | 106,5 | 148,5 | 190,5 | 232,5 | 274,5 | 316,5 |
| x_6 | 64,5 | 106,5 | 148,5 | 190,5 | 232,5 | 274,5 | 316,5 |
| x_7 | 56,5 | 98,5 | 140,5 | 182,5 | 224,5 | 266,5 | 308,5 |
| x_8 | 56,5 | 98,5 | 140,5 | 182,5 | 224,5 | 266,5 | 308,5 |

Terlihat bahwa saat awal keberangkatan tercepat *traffic light* adalah vektor eigen $x(0) = [48.5 \ 48.5 \ 82.5 \ 82.5 \ 64.5 \ 64.5 \ 56.5 \ 56.5]^T$, sehingga keberangkatan *traffic light* pada saat pelayanan dalam sistem antrian tersebut periodik, dengan periode sebesar 42. Dengan analisis dari aljabar Max-Plus pada simpang empat Lotte Mart Semarang maka rekomendasi dari rekayasa durasi lampu lalu lintas yang baru, akan menambah beban waktu dari masing-masing simpang empat Lotte Mart Semarang. Hal tersebut diharapkan dapat mengurai antrian di masing-masing arus simpang.

Dari analisis model simpang Simping empat Lotte Mart Semarang diperoleh durasi baru pengaturan lampu lalu lintas sebagai berikut.

Tabel 10. Durasi Lampu Lalu Lintas Baru Simping Empat Lotte Mart

| Arus Simping | Durasi lama (detik) | | | Durasi Baru (detik) | | |
|---------------------------|---------------------|--------|-------|---------------------|--------|-------|
| | Hijau | Kuning | Merah | Hijau | Kuning | Merah |
| Kota ke Lamper Tengah | 19 | 3 | 156 | 21 | 3 | 156 |
| Kota ke Pedurungan | 71 | 3 | 104 | 73 | 3 | 104 |
| LT ke Pedurungan dan MAJT | 29 | 3 | 146 | 31 | 3 | 146 |
| Pedurungan ke MAJT | 19 | 3 | 156 | 21 | 3 | 156 |
| Pedurungan ke Kota | 71 | 3 | 104 | 73 | 3 | 104 |
| MAJT ke LT dan Kota | 29 | 3 | 146 | 31 | 3 | 146 |
| Total | 238 | 18 | 812 | 250 | 18 | 812 |

PENUTUP

Berdasarkan hasil penelitian disimpulkan bahwa penerapan aljabar max-plus pada proses pengaturan *traffic light* di simpang tiga Jarakah dan simpang empat Lotte Mart Semarang dapat membantu mengurai kemacetan, hal tersebut bisa dilihat dari proporsi dan kapasitas penyalaan lampu hijau di dua tempat tersebut yang lebih efektif dari durasi yang diterapkan sebelumnya.

Dari hasil penelitian ini, ada beberapa saran yang digunakan untuk penelitian selanjutnya yaitu: (1) Pada setiap persimpangan di Kota Semarang utamanya pada jalan-jalan yang padat kendaraan bisa menerapkan sistem *Auto Traffic Control System* (ATCS). Dengan menggunakan sistem tersebut maka durasi nyala lampu pada persimpangan dapat disesuaikan dengan kepadatan kendaraan pada saat itu. Sehingga kondisi *steady state* bisa terpenuhi pada sistem antrian *traffic light*. (2) Penerapan dan analisis menggunakan

aljabar max-plus bisa dikembangkan pada Sitem Even Diskrit lainnya dengan perhitungan yang lebih akurat dan aplikatif.

DAFTAR PUSTAKA

- Bappeda Kota Semarang. 2016. *Data Strategis Kota Semarang 2016*. Semarang: Badan Pengelolaan Daerah Kota Semarang.
- Fahim, K., Subchan, & Subiono. 2013. Aplikasi Aljabar Max-plus Pada Pemodelan Dan Penjadwalan Busway. *Jurnal Teknik Pomits*, Vol. 1 No.1: 1-6.
- Farlow, K.G. 2009. *Max-Plus Algebra*. Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University.
- Goverde, R.M.P. 2007. Railway Timetable Stability Analysis Using Max-Plus System Theory. *Transportation Research Part BI*, 41: 179-201.
- Hasanah, U, & Putrawangsa, S. 2015. Penggunaan Aljabar Max-Plus Dalam Pembentukan Model Matematis Pada Sistem Penjadwalan Praktikum Laboratorium. *Jurnal Pendidikan Matematika*, Vol. 8: 75-88.
- Lall, B.K, & Kristy, C.J. 2003. *Dasar-dasar Rekayasa Transportasi*. Edisi Ketiga. Jakarta : Penerbit Erlangga.
- McEneaney, W. 2005. *Max-Plus Methods for Nonlinear Control and Estimation*. San Diego: University of California.
- Nugroho, A. D. 2008. *Analisis penerapan belok kiri langsung terhadap tundaan lalu lintas pada pendekatan persimpangan bersinyal*. Tesis. Semarang. Program Magister Teknik Sipil Universitas Diponegoro.
- Olsder, G.J. 1991. Eigenvalues of Dinamic Max-Min System. *Discrete Event Dynamic System: Theory and Application*, 1: 177-207.
- Rafflesia, U. 2012. Penerapan Aljabar Max-Plus Pada Sistem Produksi Meubel Rotan. *Jurnal Gradien*, Vol 8: 775-779.
- Rudhito, A. 2016. *Aljabar Max-Plus dan Penerapannya*. Jogjakarta: Universitas Sanata Dharma.
- Rudhito, A., Wahyuni, S., Suparwanto, A, & Susilo, F. 2010. Pemodelan aljabar max-plus dan evaluasi kinerja jaringan antrian fork-join taksiklik dengan kapasitas penyangga takhingga. *Jurnal Matematika*. Vol.1: 8-15
- Schutter, B.D. 2000. On The Ultimate Behavior Of The Sequence Of Consecutive Powers Of A Matrix In The Max-Plus Algebra. *Linear Algebra And Its Applications*, 307: 103-117.
- Sergeev, S. 2007. Max-Plus Definite Matrix Closures And Their Eigenspace. *Linear Algebra and its Application*, 421: 182-201.
- Setiawan, D.A., Suyitno, A, & Arifudin, R. 2016. Penerapan Graf Pada Persimpangan Menggunakan Algoritma Welsh-Powel Untuk Optimalisasi Pengaturan Traffic light. *UNNES Journal of Mathematic*, 5(2): 1-9.
- Subiono. 2015. *Aljabar Min-Max-Plus dan Terapannya*. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Subiono. 2009. Aljabar Max-Plus Dan Aplikasinya: Model Sistem Antrian. *Limits*, Vol. 6: 49-59.
- Suprayitno, H. 2015. Traffic Flow Quality As Part Of Network Quality For A Sparse Road Network. *Prosedia Engineering*, 125: 564-570.
- Tunisa, K., Wijayanti, K, & Veronica, R.B. 2016. Nilai Eigen dan Vektor Eigen Pada Aljabar Max-Plus. *UNNES Journal of Mathematic*, 7(1): 1-10.
- Woude, J.V.B. 2000. Power Algorithms For (Max,+) And Bipartite (Min,Max,+) Systems. *Discrete Event Dynamic System: Theory and Application*, 10: 369-389.