UJM 3 (1) (2014)
Unnes Journal of Mathematics
http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujm

SOLUSI SISTEM OSILASI DUA DERAJAT KEBEBASAN PADA RANGKAIAN PEGAS GANDENG DENGAN PEREDAM DAN GAYA LUAR

Zumrotul Munawaroh, Moch Chotim, Wuryanto

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 Lt.1, Kampus Sekaran Gunungpati, Semarang 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Agustus 2013
Disetujui September 2013
Dipublikasikan Mei 2014

Keywords:
Coupled Spring Oscilation
Two Degree of Fredom Oscilation
Laplace Transform

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui cara penurunan model matematika sistem gerak pada rangkaian pegas gandeng dengan peredam dan gaya luar serta mengetahui cara menentukan solusinya dengan transformasi laplace dan bantuan software Maple. Metode penelitian yang digunakan adalah metode studi pustaka. Dalam penelitian ini dapat disimpulkan: (1) Persamaan gerak yang bekerja pada m_1 dan m_2 dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial order dua (2) Langkah awal pencarian solusi persamaan geraknya menggunakan transformasi laplace sehingga diperoleh nilai X(s) dan Y(s), (3) Selanjutnya, dengan bantuan Maple diperoleh solusi dari persamaan gerak pegas yaitu x(t) dan y(t) yang berturut-turut merupakan transformasi laplace invers dari X(s) dan Y(s).

Abstract

This study was caried out how to build mathematical models of forced dumped coupled spring oscilation and find out the solution of the models that would be helped by laplace transform and Maple software tools. Observational method that is utilized is studi's method library. This study gets to be concluded: (1) Movement equation which worked to m_1 and m_2 are shown by second order differential equation (2) The first step to find out solution of movement equation used laplace transform until gets X(s) and Y(s) (3) After that, with helped of Maple software tools the solution of movement equations are find out as x(t) and y(t) those are the invers of laplace transform of X(s) and Y(s).

© 2014 Universitas Negeri Semarang

Alamat korespondensi:
zumrotul_munawaroh@yahoo.com

ISSN 2252-6943

Pendahuluan

Berbagai masalah dalam kehidupan sehari-hari dapat lebih mudah dimengerti dengan menggunakan pendekatan matematika. Salah satu cabang dari matematika modern yang penting dan mempunyai cakupan wilayah yang luas adalah persamaan diferensial. Persamaan diferensial adalah persamaan yang memiliki fungsi-fungsi turunan yang tidak diketahui. Menurut Finizio dan Ladas (1998), persamaan diferensial dapat dikelompokkan menjadi dua kelas besar yaitu persamaan diferensial linear dan tak linear. Persamaan diferensial linear muncul dalam banyak model dalam fenomena kehidupan nyata, tetapi tidak jarang juga ditemui permasalahan nyata yang dapat dimodelkan dalam persamaan diferensial tak linear (Rahayu, Sugiatno, dan Prihandono, 2012). Sebagai contoh Hukum kedua Newton mengenai gerak yang meliputi turunan (percepatan). Dengan sendirinya, persamaan diferensial order dua memegang peranan penting dalam masalah gerak, khususnya sistem pegas massa. Pada sistem gerak pegas massa, akan bekerja gaya pemulih yang disebabkan gaya yang bekerja pada massa di ujung pegas . Persamaan diferensial akan muncul dalam pemodelan sistem gerak pegas massa tersebut(Susilo, Yunianto, dan Variani,2012). Umumnya, untuk menentukan solusi dari masalah tersebut diperlukan suatu pemodelan matematika.

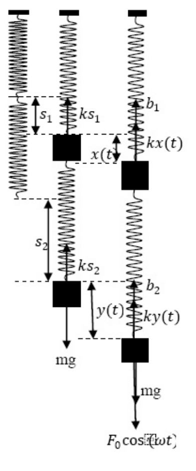
Menurut Kreyszig (1993) ada 3 tahapan penyelesaian masalah, yakni: (1) pembentukan Model yaitu proses mengubah data dan informasi yang ada ke dalam bentuk matematika, (2) Penyelesaian adalah langkah memperoleh solusi dari model matematika dengan pemilihan dan penerapan metode matematika yang sesuai dengan permasalahan yang ada, dan (3) Interpretasi yaitu memahami arti dan implikasi matematika dari masalah semula.

Biasanya sistem pegas massa hanya terdiri dari satu pegas dan satu massa yang dirangkai dalam posisi horisontal atau vertikal. Dalam penelitian ini akan dibahas pemodelan sistem gerak pegas dua derajat kebebasan dengan peredam dan gaya luar, serta solusi persamaan yang telah dimodelkan menggunakan transformasi laplace dan bantuan software Maple. Maple sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial, karena Maple mempunyai kemampuan menyederhanakan persamaan diferensial sehingga solusi-solusi persamaan diferensial dapat dipahami dengan baik (Tung, 2005).

Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan adalah metode studi pustaka, yaitu melakukan kajian pustaka dari berbagai sumber yang berkaitan dengan permasalahan sehingga didapat suatu ide mengenai bahan dasar pengembangan upaya pemecahan masalah. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka. Kajian pustaka merupakan penelaah sumber pustaka relevan yang digunakan untuk mengumpulkan data maupun informasi yang diperlukan dalam penulisan ini. Kajian pustaka diawali dengan pengumpulan sumber pustaka yaitu buku referensi dan jurnal-jurnal. Definisi–definisi dan teorema–teorema dalam referensi dikaji ulang, kemudian dirumuskan dalam perumusan masalah, selanjutnya dikaji dalam pembahasan. Pada pemecahan masalah dilakukan langkah-langkah sebagai berikut: (1) Memodelkan sistem sistem gerak pada rangkaian pegas gandeng dengan peredam dan gaya luar dengan mengidentifikasi besaran-besaran yang terlibat dalam sistem geraknya menggunakan hukum pengendali yang ada, (2) Menyelesaikan atau menentukan solusi dari persamaan sistem osilasi pada rangkaian pegas gandeng dengan peredam dan gaya luar yang sudah dimodelkan, (3) Bagaimana aplikasi program Maple pada penyelesaian sistem persamaan osilasi pada rangkaian pegas gandeng dengan peredam dan gaya luar.

Hasil Penelitian dan Pembahasan



Gambar 1. Sistem Pegas Gandeng dengan Peredam dan Gaya Luar

I. Pemodelan Rangkaian Pegas Gandeng dengan Peredam dan Gaya Luar

Dua buah pegas yang memiliki konstanta pegas dan panjang yang sama berturut-turut k dan l disusun seperti pada gambar. Di kedua ujung pegas diberi beban yang bermassa m sehingga pegas satu dan dua mengalami pertambahan panjang berturut-turut s_1 dan s_2. Jika benda yang berada di ujung pegas kedua ditarik ke bawah pada jarak tertentu kemudian melepasnya maka benda akan bergerak. Untuk memudahkan, dimisalkan gaya luar yang berosilasi sebagai F_0 sin(ωt) Diasumsikan benda bergerak vertikal. Ditentukan gerak sistem mekanis oleh m_1 dan m_2 berturut-turut x(t) dan y(t). Untuk itu ditinjau gaya-gaya yang bekerja pada masing-masing benda akibat pergerakannnya. Gaya ini akan mengarah pada suatu persamaan diferensial dengan fungsi terhadap waktu. Dipilih arah ke bawah sebagai arah positif. Sebelumnya, ditinjau besaran-besaran yang terlibat dalam sistem geraknya sebagai berikut:

Tulis k : konstanta pegas (kg/meter^2) .

s_1 : pertambahan panjang pegas oleh m_1 (meter).

s_2 : pertambahan panjang pegas oleh m_2 (meter).

x(t) : pertambahan panjang pegas 1 dari posisi setimbang (meter).

y(t) : pertambahan panjangpegas 2 dari posisi setimbang (meter).

F_0 : nilai maksimum gaya luar yang dikenakan pada benda (N).

ω : frekuensi sudut (rad).

b_1 : konstanta redaman pegas 1 terhadap udara (kg/s).

b_2 : konstanta redaman pegas 2 terhadap udara (kg/s).

Gaya yang Bekerja pada diuraikan menjadi dua yaitu pada saat sistem dalam keadaan setimbang dan dalam keadaan umum. Pada saat sistem dalam keadaan setimbang, gaya yang bekerja sama dengan nol. Berdasarkan Hukum Newton II diperoleh persamaan berikut:

$$\sum F = 0 \Leftrightarrow -k_1 s_1 + k_2 s_2 = 0 \Leftrightarrow k_1 s_1 = k_2 s_2. \quad (1)$$

Berdasarkan hukum Newton II diperoleh persamaan gerak yang bekerja pada m_1 dalam keadaan umum adalah

$$\sum F = m_1 a$$
$$\Leftrightarrow -k_1(s_1 + x(t)) + k_2(s_2 + y(t) - x(t)) - b_1 \frac{d(x(t))}{dt} = m_1 \frac{d^2(x(t))}{dt^2}$$
$$\Leftrightarrow -k_1 s_1 - k_1 x(t) + k_2 s_2 + k_2\, y(t) - k_2\, x(t) - b_1 \frac{d(x(t))}{dt} = m_1 \frac{d^2(x(t))}{dt^2}$$
$$\Leftrightarrow -k_1 s_1 + k_2 s_2 - k_1 x(t) - k_2\, x(t) + k_2\, y(t) - b_1 \frac{d(x(t))}{dt} = m_1 \frac{d^2(x(t))}{dt^2}$$
$$\Leftrightarrow -(k_1 + k_2) x(t) + k_2\, y(t) - b_1 \frac{d(x(t))}{dt} = m_1 \frac{d^2(x(t))}{dt^2}$$
$$\Leftrightarrow m_1 \frac{d^2(x(t))}{dt^2} + b_1 \frac{d(x(t))}{dt} + (k_1 + k_2) x(t) - k_2\, y(t) = 0$$
$$\Leftrightarrow m_1\, x''(t) + b_1 x'(t) + (k_1 + k_2) x(t) - k_2\, y(t) = 0$$
$$\Leftrightarrow m x''(t) + b_1 x'(t) + 2k x(t) - k\, y(t) = 0$$
$$\Leftrightarrow x''(t) + \frac{b_1}{m} x'(t) + \frac{2k}{m} x(t) - \frac{k}{m} y(t) = 0. \quad (2)$$

Gaya yang Bekerja pada m_2 juga diuraikan menjadi dua. Berdasarkan Hukum Newton II, pada saat sistem dalam keadaan setimbang, diperoleh persamaan berikut:

$$\sum F = 0 \Leftrightarrow -k_2 s_2 + m_2 g = 0 \Leftrightarrow k_2 s_2 = m_2 g. \quad (3)$$

Berdasarkan hukum Newton II diperoleh persamaan gerak yang bekerja pada m_2 dalam keadaan umum adalah

$$\sum F = m_2 a$$
$$\Leftrightarrow -k_2(s_2 + y(t) - x(t)) + m_2 g - b_2 \frac{d(y(t))}{dt} + F_0 \cos \omega t = m_2 \frac{d^2(y(t))}{dt^2}$$
$$\Leftrightarrow -k_2 s_2 - k_2\, y(t) + k_2\, x(t) + m_2 g - b_2 \frac{d(y(t))}{dt} + F_0 \cos \omega t = m_2 \frac{d^2(y(t))}{dt^2}$$
$$\Leftrightarrow -k_2 s_2 + m_2 g - k_2\, y(t) + k_2\, x(t) - b_2 \frac{d(y(t))}{dt} + F_0 \cos \omega t = m_2 \frac{d^2(y(t))}{dt^2}$$
$$\Leftrightarrow -k_2\, y(t) + k_2\, x(t) - b_2 \frac{d(y(t))}{dt} + F_0 \cos \omega t = m_2 \frac{d^2(y(t))}{dt^2}$$
$$\Leftrightarrow m_2 \frac{d^2(y(t))}{dt^2} + b_2 \frac{d(y(t))}{dt} + k_2\, y(t) - k_2\, x(t) = F_0 \cos \omega t$$
$$\Leftrightarrow y''(t) + \frac{b_2}{m} y'(t) + \frac{k}{m} y(t) - \frac{k}{m}\, x(t) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (4)$$

II. Penentuan Solusi Rangkaian Pegas Gandeng dengan Peredam dan Gaya Luar

Solusi rangkaian pegas gandeng dengan peredam dan gaya luar dapat ditentukan dari persamaaan (2) dan (4) menggunakan transformasi Laplace. Ditentukan L{x(t)}=X(s), L{y(t)}=Y(s) dan nilai awal X(0)=0, X' (0)=0, Y(0)=0, dan Y' (0)=0. Transformasi laplace

$$\mathcal{L}\left\{x''(t) + \frac{b_1}{m} x'(t) + \frac{2k}{m} x(t) - \frac{k}{m} y(t)\right\} = \mathcal{L}\{0\}$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\{x''(t)\} + \mathcal{L}\left\{\frac{b_1}{m} x'(t)\right\} + \mathcal{L}\left\{\frac{2k}{m} x(t)\right\} - \mathcal{L}\left\{\frac{k}{m}\, y(t)\right\} = 0$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\{x''(t)\} + \frac{b_1}{m} \mathcal{L}\{x'(t)\} + \frac{2k}{m} \mathcal{L}\{x(t)\} - \frac{k}{m} \mathcal{L}\{y(t)\} = 0$$
$$\Leftrightarrow \{s^2 X(s) - sX(0) - X'(0)\} + \frac{b_1}{m}\{sX(s) - X(0)\} + \frac{2k}{m} X(s) - \frac{k}{m} Y(s) = 0$$
$$\Leftrightarrow \{s^2 X(s) - s.0 - 0\} + \frac{b_1}{m}\{sX(s) - 0\} + \frac{2k}{m} X(s) - \frac{k}{m} Y(s) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(s^2 + \frac{b_1}{m} s + \frac{2k}{m}\right) X(s) - \frac{k}{m} Y(s) = 0. \quad (5)$$

Sedangkan transformasi laplace untuk persamaan (4) sebagai berikut:

$$\mathcal{L}\left\{y''(t)+\frac{b_2}{m}y'(t)+\frac{k}{m}y(t)-\frac{k}{m}x(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{\frac{F_0}{m}\cos\omega t\right\}$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\{y''(t)\}+\mathcal{L}\left\{\frac{b_2}{m}y'(t)\right\}+\mathcal{L}\left\{\frac{k}{m}y(t)\right\}-\mathcal{L}\left\{\frac{k}{m}\,x(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{\frac{F_0}{m}\cos\omega t\right\}$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\{y''(t)\}+\frac{b_2}{m}\mathcal{L}\{y'(t)\}+\frac{k}{m}\mathcal{L}\{y(t)\}-\frac{k}{m}\mathcal{L}\{x(t)\}=\frac{F_0}{m}\mathcal{L}\{\cos\omega t\}$$
$$\Leftrightarrow \{s^2Y(s)-sY(0)-Y'(0)\}+\frac{b_2}{m}\{sY(s)-Y(0)\}+\frac{k}{m}Y(s)-\frac{k}{m}X(s)=\frac{F_0 s}{m(s^2+\omega^2)}$$
$$\Leftrightarrow \{s^2Y(s)-s.0-0\}+\frac{b_2}{m}\{sY(s)-0\}+\frac{k}{m}Y(s)-\frac{k}{m}X(s)=\frac{F_0 s}{m(s^2+\omega^2)}$$
$$\Leftrightarrow \left(s^2+\frac{b_2}{m}s+\frac{k}{m}\right)Y(s)-\frac{k}{m}X(s)=\frac{F_0 s}{m(s^2+\omega^2)}. \tag{6}$$

dari persamaan (5) dan (6) diperoleh:

$$X(s)=\frac{kF_0\,\omega^2}{m^2(s^2+\omega^2)\left\{\left(s^2+\frac{b_1}{m}s+\frac{2k}{m}\right)\left(s^2+\frac{b_2}{m}s+\frac{k}{m}\right)-\left(\frac{k}{m}\right)^2\right\}}\ \text{dan} \tag{7}$$

$$Y(s)=\frac{F_0\,\omega^2\left(s^2+\frac{b_1}{m}s+\frac{2k}{m}\right)}{m(s^2+\omega^2)\left\{\left(s^2+\frac{b_1}{m}s+\frac{2k}{m}\right)\left(s^2+\frac{b_2}{m}s+\frac{k}{m}\right)-\left(\frac{k}{m}\right)^2\right\}}. \tag{8}$$

III. Solusi Rangkaian Pegas Gandeng dengan Peredam dan Gaya Luar

Untuk memperoleh solusi rangkaian pegas gandeng dengan peredam dan gaya luar, dapat dilakukan dengan cara mencari invers transformasi laplace dari nilai X(s) dan Y(s) dalam persamaan (7) dan (8). Dengan bantuan software Maple, diperoleh invers transformasi laplacenya berturut-turut sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
x(t)=&\Big\{F_0k\omega\{(k^2-b_1b_2\omega^2+\omega^4m^2-3mk\omega^2)\sin\omega t\}\\
&+\Big\{\sum_{_\alpha=RootOf\left(_z^4m^2+(mb_2+mb_1)_z^3+(b_1b_2+3km)_z^2+(b_1k+2kb_2)_z+k^2\right)}\\
&\frac{1}{4m^2_\alpha^3+3_\alpha^2mb_2+6_\alpha mk+3b_1_\alpha^2m+2b_1_\alpha b_2+b_1k+2kb_2}\\
&\{e^{-\alpha t}\{\omega^6m^4+\omega^2(-b_1b_2m^2_\alpha^2+10k^2m^2-2k_\alpha b_2m^2-2kmb_1{}^2-4kmb_2{}^2\\
&-k_\alpha b_1m^2+b_1{}^2b_2{}^2+3km^3_\alpha^2-b_1m^3_\alpha^3-m^2_\alpha^2b_1{}^2-m^2_\alpha^2b_2{}^2\\
&-b_2m^3_\alpha^3)+m^2((-_\alpha^2m^2-6mk+b_1{}^2+b_2{}^2)\omega^4+k_\alpha^2(b_1+2b_2))+\\
&+k^2(2_\alpha b_1m+5_\alpha b_2m+3b_1b_2)+(b_1{}^2(_\alpha b_2+k)+(-3k^2+(-mk\\
&+2b_2{}^2+3b_1b_2+b_1{}^2)_\alpha^2)m+2b_2{}^2(b_1_\alpha+2k))k\}\}+(mb_2\omega^2+b_1m\omega^2\\
&-b_1k-2b_2k)\cos\omega t\}\,\omega\Big\}\Big\}\Big/(\omega^8m^4-2kb_1{}^2m\omega^4+k^2b_1{}^2\omega^2+\omega^6m^2b_1{}^2-\\
&-6k\omega^6m^3-6k^3\omega^2m+4k^2b_2{}^2\omega^2+11k^2\omega^4m^2+2k^2b_1b_2\omega^2-4kmb_2{}^2\omega^4\\
&+b_1{}^2b_2{}^2\omega^4+k^4+\omega^6m^2b_2{}^2)\ \text{dan}
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
y(t)=&\Big\{F_0\omega\Big\{(2k^3-7mk^2\omega^2+b_1{}^2k\omega^2+5m^2\omega^4k-\omega^6m^3-b_1{}^2m\omega^4)\sin\omega t\\
&+\omega^2\Big\{\sum_{_\alpha=RootOf\left(_z^4m^2+(mb_2+mb_1)_z^3+(b_1b_2+3km)_z^2+(b_1k+2kb_2)_z+k^2\right)}\\
&\frac{1}{4m^2_\alpha^3+3_\alpha^2mb_2+6_\alpha mk+3b_1_\alpha^2m+2b_1_\alpha b_2+b_1k+2kb_2}\\
&\{e^{-\alpha t}(-5mk^4+\omega^4(-8k^2b_2{}^2m+m_\alpha^2b_1{}^2b_2{}^2-4km^2_\alpha^2b_2{}^2-4km_\alpha b_1\\
&b_2{}^2+7k^2m^3_\alpha^2+_\alpha b_1{}^3b_2{}^2-4kb_1b_2m^2_\alpha^2-km_\alpha b_2b_1{}^2-4kb_2m^3_\alpha^3\\
&+b_2m^2_\alpha^3b_1{}^2+2kb_1{}^2b_2{}^2-3b_1{}^2k^2m+mb_2_\alpha^2b_1{}^3+6_\alpha b_1k^2m^2-9_\alpha b_2\\
&k^2m^2-km^2_\alpha^2b_1{}^2+17k^3m^2)+\omega^6m^4(2k+_\alpha^2m+b_1_\alpha)+m^2((_\alpha^2\\
&b_1b_2+_\alpha b_1b_2{}^2-5km_\alpha b_1+_\alpha^2mb_2{}^2+_\alpha^2mb_1{}^2-5km^2_\alpha^2+_\alpha b_1{}^3\\
&+m^2_\alpha^3b_2+2km_\alpha b_2+2kb_2{}^2+2kb_1{}^2-11k^2m)\omega^4+k^2_\alpha^3(b_1+4b_2))\\
&+((-2mk+5b_1b_2+b_1{}^2+4b_2{}^2)_\alpha^2m+4b_2{}^2(b_1_\alpha+2k)+b_1{}^2(_\alpha b_2+\\
&k))k^2+k^3(_\alpha b_1m+4b_1+10_\alpha b_2m))\}+(-b_1k^2-4b_2k^2+4kmb_2\omega^2-\\
&\omega^4m^2b_2-b_2b_1{}^2\omega^2)\cos\omega t\Big\}\Big\}\Big\}\Big/(\omega^8m^4-2kb_1{}^2m\omega^4+k^2b_1{}^2\omega^2+\omega^6\\
&m^2b_1{}^2-6k\omega^6m^3-6k^3\omega^2m+4k^2b_2{}^2\omega^2+11k^2\omega^4m^2+2k^2b_1b_2\omega^2-4k\\
&mb_2{}^2\omega^4+b_1{}^2b_2{}^2\omega^4+k^4+\omega^6m^2b_2{}^2).
\end{aligned} \tag{10}$$

Simpulan

Dari uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa persamaan gerak yang bekerja pada m_1 dan m_2 berturut-turut adalah:

$$x''(t)+\frac{b_1}{m}x'(t)+\frac{2k}{m}x(t)-\frac{k}{m}y(t)=0\ \text{dan} \tag{11}$$

$$y''(t)+\frac{b_2}{m}y'(t)+\frac{k}{m}y(t)-\frac{k}{m}x(t)=F_0\cos\omega t. \tag{12}$$

Sedangkan solusi dari sistem gerak pegas disini, dicari dengan menggunakan transformasi laplace dari persamaan (11) dan (12), sehingga diperoleh:

$$X(s)=\frac{kF_0\,\omega^2}{m(s^2+\omega^2)\left\{\left(s^2+\frac{b_1}{m}s+\frac{2k}{m}\right)\left(s^2+\frac{b_2}{m}s+\frac{k}{m}\right)-\left(\frac{k}{m}\right)^2\right\}}\ \text{dan} \tag{13}$$

$$Y(s)=\frac{F_0\,\omega^2\left(s^2+\frac{b_1}{m}s+\frac{2k}{m}\right)}{m(s^2+\omega^2)\left\{\left(s^2+\frac{b_1}{m}s+\frac{2k}{m}\right)\left(s^2+\frac{b_2}{m}s+\frac{k}{m}\right)-\left(\frac{k}{m}\right)^2\right\}}. \tag{14}$$

Langkah terakhir untuk menemukan solusi persamaan yaitu x(t) dan y(t) yang berturut-turut merupakan invers transformasi laplace dari X(s) dan Y(s) dengan bantuan software Maple sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
x(t) = \{ & F_0 k\omega\{(k^2 - b_1b_2\omega^2 + \omega^4m^2 - 3mk\omega^2)\sin\omega t\} \\
& + \{ \sum_{\_\alpha=\mathrm{RootOf}(\_z^4m^2+(mb_2+mb_1)\_z^3+(b_1b_2+3km)\_z^2+(b_1k+2kb_2)\_z+k^2)} \\
& \frac{1}{4m^2\_\alpha^3 + 3\_\alpha^2mb_2 + 6\_\alpha mk + 3b_1\_\alpha^2m + 2b_1\_\alpha b_2 + b_1k + 2kb_2} \\
& \{e^{-\alpha t}\{\omega^6m^4 + \omega^2(-b_1b_2m^2\_\alpha^2 + 10k^2m^2 - 2k\_\alpha b_2m^2 - 2kmb_1{}^2 - 4kmb_2{}^2 \\
& -k\_\alpha b_1m^2 + b_1{}^2b_2{}^2 + 3km^3\_\alpha^2 - b_1m^3\_\alpha^3 - m^2\_\alpha^2b_1{}^2 - m^2\_\alpha^2b_2{}^2 \\
& -b_2m^3\_\alpha^3) + m^2((-\_\alpha^2m^2 - 6mk + b_1{}^2 + b_2{}^2)\omega^4 + k\_\alpha^2(b_1 + 2b_2)) + \\
& +k^2(2\_\alpha b_1m + 5\_\alpha b_2m + 3b_1b_2) + (b_1{}^2(\_\alpha b_2 + k) + (-3k^2 + (-mk \\
& +2b_2{}^2 + 3b_1b_2 + b_1{}^2)\_\alpha^2)m + 2b_2{}^2(b_1\_\alpha + 2k))k\}\} + (mb_2\omega^2 + b_1m\omega^2 \\
& -b_1k - 2b_2k)\cos\omega t\}\omega\}\}\Big/ \ (\omega^8m^4 - 2kb_1{}^2m\omega^4 + k^2b_1{}^2\omega^2 + \omega^6m^2b_1{}^2 - \\
& -6k\omega^6m^3 - 6k^3\omega^2m + 4k^2b_2{}^2\omega^2 + 11k^2\omega^4m^2 + 2k^2b_1b_2\omega^2 - 4kmb_2{}^2\omega^4 \\
& +b_1{}^2b_2{}^2\omega^4 + k^4 + \omega^6m^2b_2{}^2) \text{ dan}
\end{aligned} \tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
y(t) = \{ & F_0\omega\{(2k^3 - 7mk^2\omega^2 + b_1{}^2k\omega^2 + 5m^2\omega^4k - \omega^6m^3 - b_1{}^2m\omega^4)\sin\omega t \\
& \omega^2 + \{ \sum_{\_\alpha=\mathrm{RootOf}(\_z^4m^2+(mb_2+mb_1)\_z^3+(b_1b_2+3km)\_z^2+(b_1k+2kb_2)\_z+k^2)} \\
& \frac{1}{4m^2\_\alpha^3 + 3\_\alpha^2mb_2 + 6\_\alpha mk + 3b_1\_\alpha^2m + 2b_1\_\alpha b_2 + b_1k + 2kb_2} \\
& \{e^{-\alpha t}(-5mk^4 + \omega^4(-8k^2b_2{}^2m + m\_\alpha^2b_1{}^2b_2{}^2 - 4km^2\_\alpha^2b_2{}^2 - 4km\_\alpha b_1 \\
& b_2{}^2 + 7k^2m^3\_\alpha^2 + \_\alpha b_1{}^3b_2{}^2 - 4kb_1b_2m^2\_\alpha^2 - km\_\alpha b_2b_1{}^2 - 4kb_2m^3\_\alpha^3 \\
& +b_2m^2\_\alpha^3b_1{}^2 + 2kb_1{}^2b_2{}^2 - 3b_1{}^2k^2m + mb_2\_\alpha^2b_1{}^3 + 6\_\alpha b_1k^2m^2 - 9\_\alpha b_2 \\
& k^2m^2 - km^2\_\alpha^2b_1{}^2 + 17k^3m^2) + \omega^6m^4(2k + \_\alpha^2m + b_1\_\alpha) + m^2((\_\alpha^2 \\
& b_1b_2 + \_\alpha b_1b_2{}^2 - 5km\_\alpha b_1 + \_\alpha^2mb_2{}^2 + \_\alpha^2mb_1{}^2 - 5km^2\_\alpha^2 + \_\alpha b_1{}^3 \\
& +m^2\_\alpha^3b_2 + 2km\_\alpha b_2 + 2kb_2{}^2 + 2kb_1{}^2 - 11k^2m)\omega^4 + k^2\_\alpha^3(b_1 + 4b_2)) \\
& +((-2mk + 5b_1b_2 + b_1{}^2 + 4b_2{}^2)\_\alpha^2m + 4b_2{}^2(b_1\_\alpha + 2k) + b_1{}^2(\_\alpha b_2 + \\
& k))k^2 + k^3(\_\alpha b_1m + 4b_1 + 10\_\alpha b_2m))\} + (-b_1k^2 - 4b_2k^2 + 4kmb_2\omega^2 - \\
& \omega^4m^2b_2 - b_2b_1{}^2\omega^2)\cos\omega t\}\}\}\Big/ (\omega^8m^4 - 2kb_1{}^2m\omega^4 + k^2b_1{}^2\omega^2 + \omega^6 \\
& m^2b_1{}^2 - 6k\omega^6m^3 - 6k^3\omega^2m + 4k^2b_2{}^2\omega^2 + 11k^2\omega^4m^2 + 2k^2b_1b_2\omega^2 - 4k \\
& mb_2{}^2\omega^4 + b_1{}^2b_2{}^2\omega^4 + k^4 + \omega^6m^2b_2{}^2).
\end{aligned} \tag{16}
$$

Daftar Pustaka

Kreyszig, E. 1993. Matematika Teknik Lanjutan. Jakarta: Erlangga.

Tung, Y. K. 2005. Fisika Mekanika Berbasis Maple. Yogyakarta: Andi Offset.

Finizio, N. & Ladas, G. 1998. Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerepan Modern. Jakarta: Erlangga.

Susilo, A., Yunianto, M., & Variani, V.I. 2012. Simulasi gerak Harmonik Sederhana dan Osilasi Teredam pada Cassy-E 524000. Indonesian Journal of Applied Physics. 2(2): 124.

Rahayu, Sugiatno, & Prihandono, B. 2012. Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa tak Linear dengan Metode Transformasi Diferensial. Buletin Ilmiah Mat. Stat dan Terapannya (Bimaster). 01(1): 9-14.