



NILAI KETAKTERATURAN SISI TOTAL PADA GRAF RANTAI HENDECAGON DENGAN SATU SISI PENDANT

Gilar Ajie Widiatoro , Isnaini Rosyida

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 Lt. 1, Kampus Sekaran Gunungpati, Semarang 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:

Diterima September 2019

Disetujui Desember 2020

Dipublikasikan Desember 2020

Keywords:

Irregular total labeling, Graph labeling, irregularity strength, total edge

irregularity strength, chain graphs.

Abstrak


Diketahui sebuah graf G dengan himpunan titik $V(G)$ tak kosong dan himpunan sisi $E(G)$. Suatu pelabelan $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ dikatakan pelabelan- k total tak teratur sisi, jika setiap dua sisi berbeda x_1x_2 dan y_1y_2 di E memenuhi $wt(x_1x_2) \neq wt(y_1y_2)$. Bobot dari sisi e pada pelabelan total λ adalah $wt(xy) = \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y)$. Nilai ketakteraturan sisi total (*total edge irregularity strength*) graf G , yang dinotasikan dengan $tes(G)$ adalah label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur sisi. Pada artikel ini, penulis menyelidiki nilai ketakteraturan sisi total pada graf rantai *hendecagon* $C(Hd_r)$ dan graf rantai *hendecagon* dengan satu sisi *pendant* $C(Hd_r^1)$. Hasil dari penelitian ini adalah $tes(C(Hd_r)) = \left\lceil \frac{11r+2}{3} \right\rceil$ dan $tes(C(Hd_r^1)) = \left\lceil \frac{12r+2}{3} \right\rceil$.

Abstract

Given a graph G with a non-empty set of vertices $V(G)$ and a set of edges $E(G)$. A labelling $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ is called an edge irregular total labelling, if every two different edges x_1x_2 and y_1y_2 on $E(G)$ have $wt(x_1x_2) \neq wt(y_1y_2)$. Weight of e in total labelling λ is $wt(xy) = \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y)$. The total edge irregularity strength of graph G , denoted by $tes(G)$ is the minimum biggest label used to label of graph G with the edge irregular total labelling. In this paper, authors investigate the total edge irregularity strength of *hendecagon chain graph* $C(Hd_r)$, and *hendecagon chain graph with one pendant edges* $C(Hd_r^1)$. The results of this research are $tes(C(Hd_r)) = \left\lceil \frac{11r+2}{3} \right\rceil$ and $tes(C(Hd_r^1)) = \left\lceil \frac{12r+2}{3} \right\rceil$.

How to cite:

Hetty, O., Dwidayati, NK. & Agoestanto, A. 2018. Optimasi Sistem Antrian pada Pelayanan Servis Sepeda Motor Berdasarkan Model Tingkat Aspirasi Studi Kasus Bengkel Ahass Handayani Motor (1706) Semarang. *UNNES Journal of Mathematics*. 9(2):19-25.

 Alamat korespondensi:

E-mail: gilar_aji97@yahoo.com

PENDAHULUAN

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 ketika mencoba membuktikan kemungkinan untuk melewati empat daerah yang terhubung dengan tujuh jembatan di atas sungai Pregel di Königsberg, Rusia dalam sekali waktu. Pembuktian Euler tersebut ditulis dalam karya tulisnya yang berjudul *Solutio problematis ad geometriam situs pertinenti*. Masalah jembatan Königsberg tersebut dapat dinyatakan dengan istilah graf dalam menentukan keempat daerah itu sebagai titik (vertex) dan ketujuh jembatan sebagai sisi (edge) yang menghubungkan pasangan titik yang sesuai (Sutarno dkk, 2003).

Menurut Wallis (2001), pelabelan pada suatu graf adalah pemetaan yang memasangkan unsur-unsur graf (titik/sisi) dengan bilangan bulat positif atau bilangan bulat non negatif (Wallis, 2001).

Bača, dkk (2007) memperkenalkan tipe pelabelan yang dinamakan pelabelan total tak teratur, yang mempunyai tiga jenis yaitu pelabelan total tak regular sisi (edge irregular total k-labeling), pelabelan total tak regular titik (vertex irregular total k-labeling) dan pelabelan tak teratur total (totally irregular total k-labeling). Pelabelan $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ dikatakan pelabelan- k total tak teratur sisi di G , jika setiap dua sisi berbeda x_1x_2 dan y_1y_2 di E memenuhi $wt(x_1x_2) \neq wt(y_1y_2)$ dengan $wt(xy) = \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y)$.

Nilai ketakaturan titik total dari graf G yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur sisi, yang dinotasikan dengan $tes(G)$ (Baca dkk, 2007).

Pelabelan total tak teratur sisi sudah banyak diteliti oleh para ilmuwan sebelumnya yang tulis di buku Gallian (2011). Diantaranya Ivančo dan Jendroš (2006) yang meneliti tentang nilai ketakaturan sisi total graf pohon. Nurdin, Baskoro, M, & Gaos (2010) yang meneliti tentang nilai ketakaturan titik total graf pohon. Marzuki, dkk (2013) yang meneliti tentang nilai ketakaturan total graf sikel dan graf path. Indriati, dkk (2015) yang meneliti tentang nilai ketakaturan sisi total graf web dan graf-graf terkait. Arockiamary (2016) yang meneliti tentang nilai kekuatan tak regular sisi total (tes) pada graf Diamond Snake dan Dove (graf rantai segi empat). Rosyida, Widodo, & Indriati (2018) yang meneliti tentang nilai ketakaturan graf caterpillar dengan dua titik pendaan. Fauziah (2017) yang meneliti tentang gabungan dari

beberapa blok graf siklus dan membentuk suatu barisan graf lingkaran disebut sebagai graf rantai siklus CC_n . Rosyida, dkk (2019) yang meneliti tentang nilai kekuatan ketakaturan sisi total pada graf rantai kaktus dengan sisi pendaan.

Teorema 1.1

Jika $G(V, E)$ adalah suatu graf dengan himpunan titik tak kosong $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$, maka

$$\left\lfloor \frac{|E(G)|+2}{3} \right\rfloor \leq tes(G) \leq |E(G)| \dots (1)$$

(Baca dkk, 2007)

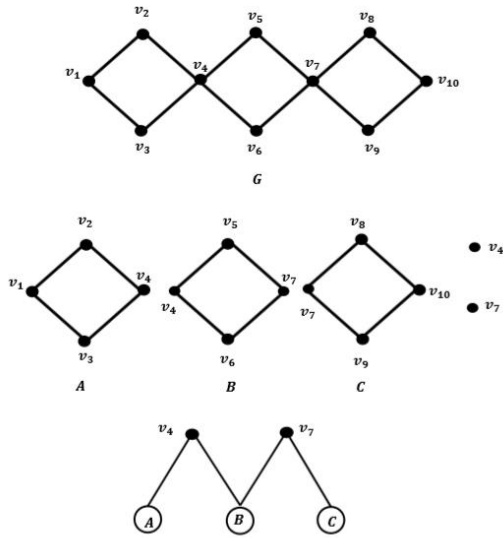
Titik $v \in V(G)$ adalah titik potong (cut-vertex) dari graf G jika graf $G - v$ graf yang tidak terhubung (Fauziah, 2017).

Blok pada graf $G = (V, E)$ adalah maksimal subgraf yang terhubung $H \subseteq G$, sedemikian sehingga H tidak memiliki titik potong (cut-vertex), sehingga dapat dikatakan bahwa sebuah blok merupakan subgraf yang memiliki anggota himpunan sisi sebanyak mungkin dan tidak memiliki titik potong (cutvertex).

Blok dapat berupa K_2 maupun graf yang mengandung graf siklus. Sebagai contoh semua blok pada graf pohon merupakan K_2 (Fauziah, 2017).

Jika $G = (V, E)$ adalah graf, maka graf block cut-vertex dari graf G adalah graf bipartit sederhana dengan bipartisi (A, B) dimana A adalah himpunan cutvertex di G dan B adalah himpunan blok di G . berdasarkan definisi tersebut maka *Block cut-vertex* dari suatu graf G adalah graf H yang titik-titiknya adalah blok dan titik potong dari G , dimana dua titik bertetangga di H jika dan hanya jika satu titik berupa titik potong (di G) dan titik lainnya adalah blok (di G) yang memuat titik potong tersebut (Barefoot, 2002).

Gambar 1 merupakan contoh graf dengan block cut-vertex berupa graf lintasan..



Gambar 1. Graf dengan *blok-cut vertex* berupa graf lintasan

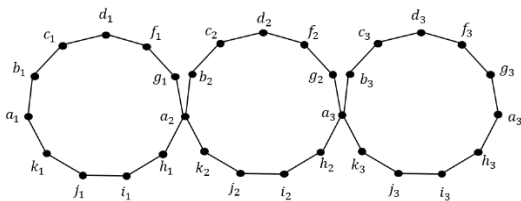
Definisi 1.1

Graf rantai didefinisikan sebagai graf yang terdiri dari blok-blok $B_1, B_2, B_3, \dots, B_k, k \geq 2$, sehingga untuk setiap $i, 1 \leq i < k - 1$, B_i dan B_{i+1} berisian pada tepat satu titik pemotong sehingga *block cut vertex* grafnya adalah graf lintasan (Barrientos, 2002).

Pada Gambar 1 menunjukkan Graf G adalah sebuah graf rantai yang terdiri dari tiga blok graf cycle yaitu A, B dan C yang dihubungkan oleh dua buah titik pemotong yaitu v_4 dan v_7 serta Graf H adalah *block-cut vertex* dari Graf G yang membentuk sebuah graf lintasan.

Definisi 1.2

Graf rantai *Hendecagon* (segi sebelas) dinotasikan dengan $C(Hd_r)$ merupakan graf rantai yang terdiri dari r blok graf cycle C_{11} . Gambar 2 merupakan graf rantai *Hendecagon* $C(Hd_3)$.

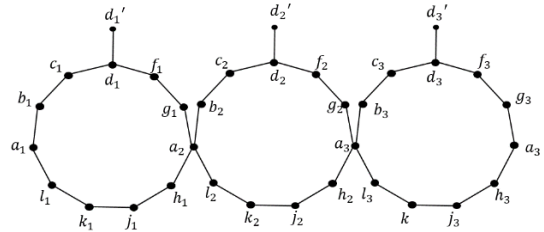


Gambar 2. Graf rantai *Hendecagon* $C(Hd_3)$

Definisi 1.3

Graf rantai *Hendecagon* (segi sebelas) dengan satu sisi *pendant* dinotasikan dengan $C(Hd_r^1)$ merupakan graf rantai yang terdiri dari r blok graf cycle C_{11} , dengan satu sisi *pendant*. Himpunan titik pada $C(Hd_r^1)$ sebagai berikut:

$V(C_{11}) = \{a_i, a_{i+1}, b_i, c_i, d_i, f_i, g_i, h_i, i_i, j_i, k_i\}$
 Himpunan titik *pendant* $V' = \{d_1', d_2', \dots, d_r'\}$
 dan setiap d_i' dihubungkan ke titik d_i untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, r$.



Gambar 3. Graf rantai *hendecagon* dengan dua sisi *pendant* $C(Hd_3^1)$

Pada penelitian ini akan dibahas pelabelan total tak teratur sisi pada graf rantai segi sebelas/*hendecagon* $C(Hd_r)$ dan graf rantai *hendecagon* dengan satu sisi *pendant* $C(Hd_r^1)$.

METODE

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah studi literatur, dengan cara mengumpulkan referensi yang dapat mendukung pembahasan.

Oleh karena itu, untuk mencapai tujuan penulisan, diambil langkah-langkah sebagai berikut:

- I. Graf rantai *hendecagon* $C(Hd_r)$ dan graf rantai *hendecagon* dengan satu sisi *pendant* $C(Hd_r^1)$
 1. Menyajikan konsep dasar graf rantai *hendecagon* $C(Hd_r)$ dan graf rantai *hendecagon* dengan satu sisi *pendant* $C(Hd_r^1)$
 2. Menentukan batas bawah berdasarkan teorema :

Untuk sebarang graf $G =$

$(V(G), E(G))$, yaitu sebagai berikut:

$$\text{tes}(C(Hd_r)) \geq \left\lceil \frac{11r + 2}{3} \right\rceil$$

$$\text{tes}(C(Hd_r^1)) \geq \left\lceil \frac{12r + 2}{3} \right\rceil$$

3. Memeriksa batas atas dengan mengonstruksi pelabelan total tak teratur sisi $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ dengan $k =$ batas bawah pada 1).
 - a. Simulasi pelabelan total dimulai dari graf yang sederhana sampai diperoleh pola pelabelan yang tetap.

- b. Menentukan batas tes untuk setiap simulasi pelabelan.
 - c. Mengkonstruksi formula untuk label titik, label sisi dan bobot sisi.
4. Menentukan nilai eksak tes diperoleh yang memenuhi jika $k \leq \text{tes}(C(Hd_r)) \leq k$.

HASIL DAN PEM Konsep graf rantai *Hendecagon* $C(Hd_r)$ disajikan pada Definisi 1.2, konsep graf rantai *Hendecagon* dengan satu sisi *pendant* $C(Hd_r^1)$ disajikan pada Definisi 1.3

1. Graf Rantai Heptagon $C(Hd_r)$

Hasil tes dari graf rantai *Hendecagon* $C(Hd_r)$ diberikan pada Teorema 1.2.

Teorema 1.2

Misalkan $C(Hd_r), r \geq 1$ graf rantai *Hendecagon*, maka

$$\text{tes}(C(Hd_r)) = \left\lfloor \frac{11r + 2}{3} \right\rfloor$$

Bukti. Berdasarkan batas bawah pada Teorema 1.1, diperoleh batas bawah

$$\text{tes } C(Hd_r) \geq \left\lfloor \frac{|E(C(Hd_r))|+2}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{11n+2}{3} \right\rfloor,$$

untuk $r \geq 1$,

Diketahui graf rantai *Hendecagon* $C(Hd_r)$ dengan

$$V(C(Hd_r)) = \{a_i, a_{i+1}, b_i, c_i, d_i, f_i, g_i, h_i, j_i, k_i, l_i\}$$

$$E(C(Hd_r)) = \{a_i b_i, b_i c_i, c_i d_i, d_i f_i, f_i g_i, g_i a_{i+1}, a_{i+1} h_i, h_i j_i, j_i k_i, k_i l_i, a_i l_i\}$$

untuk $i = 1, 2, 3, \dots, r$

Akan dibuktikan batas atas $\text{tes}(C(Hd_r)) \leq \left\lfloor \frac{|E(C(Hd_r))|+2}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{11r+2}{3} \right\rfloor$ dengan mengkonstruksi pelabelan- k total tak teratur sisi $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ dengan $k = \left\lfloor \frac{11r+2}{3} \right\rfloor$ sebagai berikut:

Kasus 1

$$r = 1 \text{ mod } 3, \forall r \geq 1$$

$$i = 1 \text{ mod } 3, \forall i \geq 1$$

Pelabelan titik:	Pelabelan sisi:
$\lambda(a_i) = \frac{1}{3}(11i - 8)$	$\lambda(a_i b_i) = \frac{1}{3}(11i - 8)$
$\lambda(b_i) = \frac{1}{3}(11i - 8)$	$\lambda(b_i c_i) = \frac{1}{3}(11i - 8)$
$\lambda(c_i) = \frac{1}{3}(11i - 5)$	$\lambda(c_i d_i) = \frac{1}{3}(11i - 5)$
$\lambda(d_i) = \frac{1}{3}(11i - 5)$	$\lambda(d_i f_i) = \frac{1}{3}(11i - 2)$
$\lambda(f_i) = \frac{1}{3}(11i - 2)$	$\lambda(f_i g_i) = \frac{1}{3}(11i - 2)$
$\lambda(g_i) = \frac{1}{3}(11i + 1)$	$\lambda(g_i a_{i+1}) = \frac{1}{3}(11i + 1)$
$\lambda(h_i) = \frac{1}{3}(11i + 1)$	$\lambda(a_{i+1} h_i) = \frac{1}{3}(11i + 4)$
$\lambda(j_i) = \frac{1}{3}(11i - 2)$	$\lambda(h_i j_i) = \frac{1}{3}(11i + 1)$
$\lambda(k_i) = \frac{1}{3}(11i - 2)$	

$\lambda(l_i) = \frac{1}{3}(11i - 5)$	$\lambda(j_i k_i) = \frac{1}{3}(11i - 2)$
$\lambda(a_{i+1}) = \frac{1}{3}(11i + 1)$	$\lambda(k_i l_i) = \frac{1}{3}(11i - 5)$
	$\lambda(a_i l_i) = \frac{1}{3}(11i - 5)$

Kasus 2

$$r = 2 \text{ mod } 3, \forall r \geq 2$$

$$i = 2 \text{ mod } 3, \forall i \geq 2$$

Pelabelan titik:	Pelabelan sisi:
$\lambda(a_i) = \frac{1}{3}(11i - 10)$	$\lambda(a_i b_i) = \frac{1}{3}(11i - 7)$
$\lambda(b_i) = \frac{1}{3}(11i - 7)$	$\lambda(b_i c_i) = \frac{1}{3}(11i - 7)$
$\lambda(c_i) = \frac{1}{3}(11i - 7)$	$\lambda(c_i d_i) = \frac{1}{3}(11i - 4)$
$\lambda(d_i) = \frac{1}{3}(11i - 4)$	$\lambda(d_i f_i) = \frac{1}{3}(11i - 4)$
$\lambda(f_i) = \frac{1}{3}(11i - 1)$	$\lambda(f_i g_i) = \frac{1}{3}(11i - 1)$
$\lambda(g_i) = \frac{1}{3}(11i - 1)$	$\lambda(g_i a_{i+1}) = \frac{1}{3}(11i + 2)$
$\lambda(h_i) = \frac{1}{3}(11i + 2)$	$\lambda(a_{i+1} h_i) = \frac{1}{3}(11i + 2)$
$\lambda(j_i) = \frac{1}{3}(11i - 1)$	$\lambda(h_i j_i) = \frac{1}{3}(11i - 1)$
$\lambda(k_i) = \frac{1}{3}(11i - 4)$	$\lambda(j_i k_i) = \frac{1}{3}(11i - 1)$
$\lambda(l_i) = \frac{1}{3}(11i - 4)$	$\lambda(k_i l_i) = \frac{1}{3}(11i - 4)$
$\lambda(a_{i+1}) = \frac{1}{3}(11i + 2)$	$\lambda(a_i l_i) = \frac{1}{3}(11i - 4)$

Kasus 3

$$r = 0 \text{ mod } 3, \forall r \geq 3$$

$$i = 0 \text{ mod } 3, \forall i \geq 3$$

Pelabelan titik:	Pelabelan sisi:
$\lambda(a_i) = \frac{1}{3}(11i - 9)$	$\lambda(a_i b_i) = \frac{1}{3}(11i - 9)$
$\lambda(b_i) = \frac{1}{3}(11i - 6)$	$\lambda(b_i c_i) = \frac{1}{3}(11i - 9)$
$\lambda(c_i) = \frac{1}{3}(11i - 6)$	$\lambda(c_i d_i) = \frac{1}{3}(11i - 6)$
$\lambda(d_i) = \frac{1}{3}(11i - 3)$	$\lambda f(d_i f_i) = \frac{1}{3}(11i - 3)$
$\lambda(f_i) = \frac{1}{3}(11i - 3)$	$\lambda f(f_i g_i) = \frac{1}{3}(11i)$
$\lambda(g_i) = \frac{1}{3}(11i)$	$\lambda(g_i a_{i+1}) = \frac{1}{3}(11i)$
$\lambda(h_i) = \frac{1}{3}(11i)$	$\lambda(a_{i+1} h_i) = \frac{1}{3}(11i + 3)$
$\lambda(j_i) = \frac{1}{3}(11i)$	$\lambda(h_i j_i) = \frac{1}{3}(11i)$
$\lambda(k_i) = \frac{1}{3}(11i - 3)$	$\lambda(j_i k_i) = \frac{1}{3}(11i - 3)$
$\lambda(l_i) = \frac{1}{3}(11i - 3)$	$\lambda(k_i l_i) = \frac{1}{3}(11i - 6)$
$\lambda(a_{i+1}) = \frac{1}{3}(11i + 3)$	$\lambda(a_i l_i) = \frac{1}{3}(11i - 6)$

Karena label titik dan sisi yang diperoleh kurang dari sama dengan $k = \left\lfloor \frac{11r+2}{3} \right\rfloor$, maka pelabelan λ adalah pelabelan- k total. Kemudian ditunjukkan setiap sisi graf rantai *Hendecagon* $C(Hd_r)$ mempunyai bobot yang berbeda sebagai berikut:

Bobot sisi, $\forall i = 1, 2, \dots, r$	$\forall i =$
$w(a_i b_i) = 11i - 8$	$w(a_{i+1} h_i) = 11i + 2$
$w(b_i c_i) = 11i - 7$	$w(h_i j_i) = (11i)$
$w(c_i d_i) = 11i - 5$	$w(j_i k_i) = 11i - 2$
$w(d_i f_i) = 11i - 3$	$w(k_i l_i) = 11i - 4$
$w(f_i g_i) = 11i - 1$	$w(a_i l_i) = 11i - 6$
$w(g_i a_{i+1}) = 11i + 1$	

Oleh karena λ merupakan pelabelan- k total dan untuk setiap dua sisi berbeda, bobot sisinya juga berbeda, artinya λ merupakan pelabelan- k total tak teratur sisi dengan label terbesarnya adalah $k = \lceil \frac{11r+2}{3} \rceil$. Jadi, terbukti bahwa $tes(C(Hd_r)) = \lceil \frac{11r+2}{3} \rceil$, untuk $r \geq 1$.

Bukti. Berdasarkan batas bawah pada Teorema 1.1, diperoleh batas bawah

$$tes(C(Hd_r^1)) \geq \lceil \frac{|E(C(Hd_r^1))| + 2}{3} \rceil = \lceil \frac{12r + 2}{3} \rceil$$

untuk $r \geq 1$

Diketahui graf rantai *Hendecagon* dengan satu sisi *pendant* $C(Hd_r^1)$ dengan

$$V(C(Hd_r^1)) = \{a_i, a_{i+1}, b_i, c_i, d_i, d'_i, f_i, g_i, h_i, j_i, k_i, l_i\}$$

$$E(C(Hd_r^1)) = \{a_i b_i, b_i c_i, c_i d_i, d_i f_i, d_i d'_i,$$

$$f_i g_i, g_i a_{i+1}, a_{i+1} h_i, h_i j_i, j_i k_i, k_i l_i, a_i l_i\}$$

untuk $i = 1, 2, 3, \dots, r$.

Akan dibuktikan batas atas $tes(C(Hd_r^1)) \leq \lceil \frac{|E(C(Hd_r^1))| + 2}{3} \rceil = \lceil \frac{12r+2}{3} \rceil$ dengan mengkonstruksi pelabelan- k total tak teratur sisi $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ dengan $k = \lceil \frac{12r+2}{3} \rceil$ sebagai berikut:

Pelabelan titik, $\forall i = 1, 2, 3, \dots, r$	Pelabelan sisi, $\forall i = 1, 2, 3, \dots, r$
$\lambda(a_i) = 4i - 3$	$\lambda(a_i b_i) = 4i - 3$
$\lambda(b_i) = 4i - 3$	$\lambda(b_i c_i) = 4i - 3$
$\lambda(c_i) = 4i - 2$	$\lambda(c_i d_i) = 4i - 2$
$\lambda(d_i) = 4i - 2$	$\lambda(d_i d'_i) = 4i - 1$
$\lambda(d'_i) = 4i - 1$	$\lambda(d_i f_i) = 4i$
$\lambda(f_i) = 4i$	$\lambda(f_i g_i) = 4i$
$\lambda(a_{i+1}) = 4i + 1$	$\lambda(g_i a_{i+1}) = 4i + 1$
$\lambda(g_i) = 4i$	$\lambda(a_{i+1} h_i) = 4i$
$\lambda(h_i) = 4i$	$\lambda(h_i j_i) = 4i$
$\lambda(j_i) = 4i - 1$	$\lambda(j_i k_i) = 4i - 1$
$\lambda(k_i) = 4i - 1$	$\lambda(k_i l_i) = 4i - 2$
$\lambda(l_i) = 4i - 2$	$\lambda(a_i l_i) = 4i - 2$

Karena label titik dan sisi yang diperoleh kurang dari sama dengan $k = \lceil \frac{12r+2}{3} \rceil$, maka pelabelan λ adalah pelabelan- k total. Kemudian ditunjukkan setiap sisi graf rantai *Hendecagon*

dengan satu sisi *pendant* $C(Hd_r^1)$ mempunyai bobot yang berbeda sebagai berikut:

Contoh pelabelan-23 total tak teratur sisi dari graf rantai *hendecagon* $C(Hd_6)$ disajikan dalam Gambar 4.

2. Graf Rantai *Hendecagon* dengan Satu Sisi *Pendant* $C(Hd_r^1)$

Hasil *tes* dari graf rantai *Hendecagon* dengan satu sisi *pendant* $C(Hd_r^1)$ diberikan pada Teorema 1.3

Teorema 1.3

Misalkan $C(Hd_r^1), r \geq 1$ graf rantai *Hendecagon* dengan satu sisi *pendant*, maka

$$tes(C(Hd_r^1)) = \lceil \frac{(11+1)r + 2}{3} \rceil = \lceil \frac{12r + 2}{3} \rceil$$

Bobot sisi, $\forall i = 1, 2, 3, \dots, r$	$\forall i =$
$w(a_i b_i) = 12i - 9$	$w(g_i a_{i+1}) = 12i + 2$
$w(b_i c_i) = 12i - 8$	$w(a_{i+1} h_i) = 12i + 1$
$w(c_i d_i) = 12i - 6$	$w(h_i j_i) = 12i - 1$
$w(d_i d'_i) = 12i - 4$	$w(j_i k_i) = 12i - 3$
$w(d_i f_i) = 12i - 2$	$w(k_i l_i) = 12i - 5$
$w(f_i g_i) = 12i$	$w(a_i l_i) = 12i - 7$

Oleh karena λ merupakan pelabelan- k total dan untuk setiap dua sisi berbeda, bobot sisinya juga berbeda, artinya λ merupakan pelabelan- k total tak teratur sisi dengan label terbesarnya adalah $k = \lceil \frac{12r+2}{3} \rceil$. Jadi, terbukti bahwa untuk $r \geq 1$, $tes(C(Hd_r^1)) = \lceil \frac{12r+2}{3} \rceil$.

Contoh pelabelan-25 total tak teratur sisi dari graf rantai *Hendecagon* dengan dua sisi *pendant* $C(Hd_6^2)$ disajikan dalam Gambar 5.

PENUTUP

Dalam penelitian ini diperoleh dua kesimpulan, yaitu:

Nilai ketakteraturan sisi total dari graf rantai *Hendecagon* $C(Hd_r)$, nilai ketakteraturan sisi total dari graf rantai *Hendecagon* dengan satu sisi *pendant* $C(Hd_r^1)$ untuk suatu bilangan bulat positif $r \geq 1$, dapat ditentukan sebagai berikut :

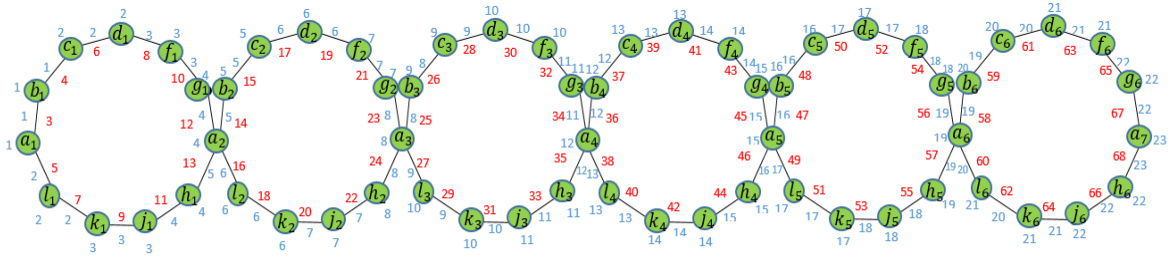
- Nilai ketakteraturan sisi total dari graf rantai *Hendecagon* $C(Hd_r)$ adalah

$$tes(C(Hd_r)) = \lceil \frac{11r + 2}{3} \rceil$$

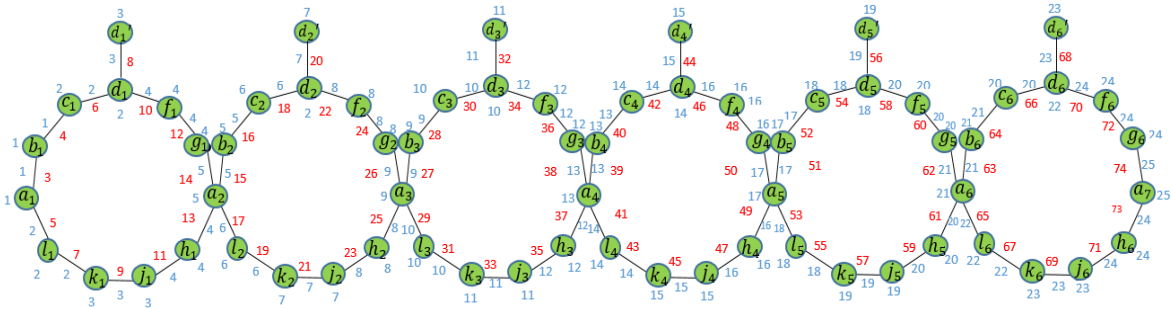
- Nilai ketakteraturan sisi total dari graf rantai *Hendecagon* dengan satu sisi *pendant* $C(Hd_r^1)$ adalah

$$tes(C(Hd_r^1)) = \lceil \frac{(11+1)r + 2}{3} \rceil$$

$$= \left\lceil \frac{12r + 2}{3} \right\rceil.$$



Gambar 4. contoh pelabelan-23 total tak teratur sisi dari graf rantai *hendecagon* $C(Hd_6)$



Gambar 5. contoh pelabelan-25 total tak teratur sisi dari graf rantai *hendecagon* dengan satu sisi *pendant* $C(Hd_6^1)$

Keterangan:

- = bobot sisi
- = label titik dan label sisi

DAFTAR PUSTAKA

Arockiamary, S. 2016. Total Edge Irregularity Strength of Diamond Snake and Dove. *IJPAM*, Vol 109, 125-132.

Baca, M., Jendrol, S., Miller, M., & Ryan, J. 2007. On Irregular Total Labelings. *Discrete Mathematics*, 307 : 1378-1388.

Barefoot, C. 2002. Block-cutvertex trees and block-cutvertex partitions. *Departments of Mathematics and Computer Science*, 35-54.

Barrientos, C. 2002. Graceful Labeling of Chain and Corona Graphs. *Bulletin ICA*, 3434 : 17-26.

auziah, G. N. 2017. *Algoritma Pelabelan Total Tidak Teratur Sisi*. Makassar: Universitas Hasanuddin.

Gallian, J. A. 2011. *A Dynamic Survey of Graph Labelling*. *Electronic Journal of Combinatorics*.

Indriarti, D., & dkk. 2015. On total edge irregularity strength of generalized web graphs and related graphs. *Mathematics in Computer Science*, 161-167.

Ivančo, J., & Jendrol', S. 2006. Total Edge Irregularity Strength of Trees. *Discussiones Mathematicae Graf Theory*, 26: 449 - 456 .

Marzuki, C., & dkk. 2013. On Total Irregularity Strength of Cycles and Path. *Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, Vol 82(1), Hal 1-21.

Nurdin, Baskoro, M., & Gaos. 2010. *On The Total Vertex Irregularity Strength Of Trees*. *Utilitas Mathematica*.

Rosyida, I., & Indriari, D. 2019. On Total Irregularity Strength of Some Cactus Chain Graphs with Pendant Vertices. *Journal of Phisycs: Conference Series*, 1211 (1), 012016.

Rosyida, Widodo, & Indriati. 2018. The Construction of Labeling and Total Irregularity Strength of Specified Caterpillar Graph. *Journal of Physics Conference Series*.

Sutarno, H., Priatna, N., & Nurjanah. 2003. *Common TextBook Matematika*. Jakarta: JICA.

Wallis, W. D. 2001. *Magic Graph*. Boston: Birkhauser.