UJM 3 (2) (2014)
UNNES Journal of Mathematics
http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujm

# TEOREMA POHON MATRIKS UNTUK MENENTUKAN BANYAKNYA POHON RENTANGAN GRAF WHEELS $W_n$ DAN KIPAS $F_n$

**Firdha Aziza✉, Amin Suyitno, Mulyono.**

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 lantai 1 Kampus Sekaran, Gunungpati, Semarang, 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Januari 2014
Disetujui Mei 2014
Dipublikasikan Nopember 2014

Keywords :
Graf *Wheels*
Graf Kipas
Matriks
Pohon Matriks

## Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana cara menentukan banyaknya pohon rentangan pada sebuah graf $G$ dengan menggunakan teorema pohon matriks, serta menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf *wheels* $W_n$ untuk n = 2, 3, 4, dan 5 dan graf kipas $F_n$ untuk n = 3, 4, 5, dan 6 menggunakan teorema pohon matriks. Metode penelitian yang digunakan adalah studi pustaka. Pada penelitian ini dapat disimpulkan: 1) teorema pohon matriks menjelaskan bahwa dalam menentukan banyaknya pohon rentangan pada suatu graf $G$ dapat dilakukan dengan mencari nilai kofaktor dari matriks Laplacian $L=D-A$. Dalam hal ini $D$ adalah matriks derajat dan $A$ adalah matriks ketetanggaan dari graf $G$, dan nilai dari setiap kofaktor $C_{ij}$ pada matriks Laplacian adalah sama, 2) banyaknya pohon rentangan pada graf *wheels* $W_n$ untuk n = 2, 3, 4,dan 5 dengan $n \in N$ adalah $\tau(W_2) = 5$, $\tau(W_3) = 16$, $\tau(W_4) = 45$, dan $\tau(W_5) = 121$, 3) banyaknya pohon rentangan pada graf kipas $F_n$ untuk n = 3, 4, 5, dan 6 dengan $n \in N$ adalah $\tau(F_3) = 8$, $\tau(F_4) = 21$, $\tau(F_5) = 55$, dan $\tau(F_6) = 108$.

## Abstract

The purposes of this research are to know how to the determine the number of spanning tree in a graph $G$ by using the matrix tree theorem and determine the number of spanning tree in the wheels graph $W_n$ for n = 2, 3, 4, dan 5 and fans graph $F_n$ for n = 3, 4, 5, dan 6 using the matrix tree theorem. The method of this research is library method. The conclusions of this research are: 1) matrix tree theorem explains that in determining the number of spanning tree in a graph $G$ can be found out by searching the cofactor value of the Laplacian matrix $L=D-A$, in which $D$ is a degree matrix and $A$ is the adjacency matrix of graph $G$, and the value of every cofactor $C_{ij}$ in the Laplacian matrix is same, 2) the number of spanning tree on the wheels graph $W_n$ for n = 2, 3, 4, dan 5 in which $n \in N$ is $\tau(W_2) = 5$, $\tau(W_3) = 16$, $\tau(W_4) = 45$, and $\tau(W_5) = 121$, 3) the number of spanning tree in the fans graph $F_n$ for n = 3, 4, 5, dan 6 in which $n \in N$ is $\tau(F_3) = 8$, $\tau(F_4) = 21$, $\tau(F_5) = 55$, and $\tau(F_6) = 108$.



✉ Alamat korespondensi:
E-mail: firdhaaziza@ymail.com

ISSN 2252-6943

## Pendahuluan

Sebuah Graf $G$=($V$($G$),$E$($G$)) berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong $V$($G$) dari obyek-obyek yang disebut titik, dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E$($G$) yang elemen-elemennya disebut sisi, sedemikian hingga setiap elemen $e$ dalam $E$($G$) merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik di $V$($G$). Himpunan $V$($G$) disebut himpunan titik-titik di $G$, dan himpunan $E$($G$) disebut himpunan sisi-sis*i* $G$. Dalam definisi di atas menyatakan bahwa $V$($G$) tidak boleh kosong, sedangkan $E$($G$) boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi titiknya harus ada, minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu buah titik tanpa sebuah sisi dinamakan graf trivial (Munir, 2010: 356).

Pohon (*tree*) didefinisikan sebagai graf terhubung dan tidak mempunyai sikel. Sebuah pohon selalu terdiri dari $n$ titik dan $n$-1 sisi. Dalam konsep pohon sendiri, terdapat banyak jenis pohon yang dapat digunakan untuk mencari solusi dari masalah-masalah di kehidupan sehari-hari. Salah satunya menggunakan pohon rentangan atau *spanning tree*. Sebuah pohon katakanlah $T$ disebut pohon rentangan (*spanning tree*) dari sebuah graf $G$, jika $T$ adalah subgraf dari $G$ yang mencakup semua titik graf $G$ (Wibisono, 2008: 161).

Sebuah graf terhubung dimungkinkan memuat lebih dari satu pohon rentangan. Selanjutnya, banyaknya pohon rentangan pada graf $G$ dilambangkan dengan $\tau$ ($G$). Jika $G$ graf tak terhubung maka banyaknya pohon rentangan atau $\tau$ ($G$) adalah 0. Jika G pohon, maka banyaknya pohon rentangan atau $\tau$ ($G$) adalah 1 (Budayasa, 2007: 33). Dalam menentukan banyaknya pohon rentangan dari suatu graf dapat juga dilakukan dengan cara direpresentasikan dalam bentuk matriks. Bentuk graf yang dinyatakan dalam suatu matriks kemudian dapat diselesaikan dengan metode-metode yang berlaku pada matriks.

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut. (1) Bagaimana cara menentukan banyaknya pohon rentangan (*spanning tree*) pada sebuah graf $G$ dengan menggunakan teorema pohon matriks?, (2) Bagaimana menentukan banyaknya pohon rentangan (*spanning tree*) pada graf *wheels* $W_n$ untuk n = 2, 3, 4, dan 5 dengan menggunakan teorema pohon matriks?, (3) Bagaimana menentukan banyaknya pohon rentangan (*spanning tree*) pada graf kipas $F_n$ untuk n = 3, 4, 5, dan 6 dengan menggunakan teorema pohon matriks?

Penelitian ini bertujuan untuk menjelaskan bagaimana cara menentukan banyaknya pohon rentangan pada sebuah graf $G$ dengan menggunakan teorema pohon matriks, menjelaskan cara menentukan banyaknya pohon rentangan (*spanning tree*) pada graf *wheels* $W_n$ untuk n = 2, 3, 4, dan 5 menggunakan teorema pohon matriks dan menjelaskan cara menentukan banyaknya pohon rentangan (*spanning tree*) pada graf kipas $F_n$ untuk n = 3, 4, 5, dan 6 dengan menggunakan teorema pohon matriks.

## Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan adalah studi pustaka, yaitu melakukan kajian dengan mengumpulkan sumber pustaka berupa buku-buku teori graf, jurnal, dan makalah yang memuat topik tentang banyaknya pohon rentangan pada suatu graf. Adapun langkah-langkah dalam menentukan banyaknya pohon rentangan dari graf *wheels* $W_n$ untuk n = 2, 3, 4, dan 5 dengan $n \in N$ dan graf kipas $F_n$ untuk n = 3, 4, 5, dan 6 dengan $n \in N$ yaitu menggambar graf *wheels* $W_n$ untuk n = 2, 3, 4, dan 5 dengan dan graf kipas $F_n$ untuk n = 3, 4, 5, dan 6 dengan $n \in N$ ,menentukan matriks ketetanggaan $A$($G$) pada graf *wheels* $W_n$ untuk n = 2, 3, 4, dan 5 dan graf kipas $F_n$ untuk n = 3, 4, 5, dan 6, menentukan matriks derajat $D$($G$) pada graf *wheels* $W_n$ untuk n = 2, 3, 4, dan 5 dan graf kipas $F_n$ untuk n = 3, 4, 5, dan 6, menentukan matriks Laplacian $D$($G$)-$A$($G$) dari graf *wheels* $W_n$ untuk n = 2, 3, 4, dan 5 dan graf kipas $F_n$ untuk n = 3, 4, 5, dan 6 dan menghitung nilai kofaktor dari matriks Laplacian $D$($G$)-$A$($G$), dimana nilai kofaktor tersebut adalah banyaknya pohon rentangan dari graf *wheels* $W_n$ untuk n = 2, 3, 4, dan 5 dan graf kipas $F_n$ untuk n = 3, 4, 5, dan 6.

## Hasil dan Pembahasan

**Teorema (*The Matrix Tree Theorem*)**

Misalkan $G$($V$($G$)),$E$($G$)) adalah graf berlabel terhubung dengan matriks ketetanggaan $A$ dan matriks derajat $D$, banyaknya pohon rentangan dari $G$ (dinotasikan $\tau$($G$)) adalah sama dengan nilai dari setiap kofaktor dari matriks Laplacian $L = D - A$ dari $G$ (Ocansey, 2011: 7).

**Bukti**

Misalkan terdapat graf berlabel terhubung $G$($V$($G$),$E$($G$)) dengan $A$ adalah matriks ketetanggaan, $D$ matriks derajat dan $L$ adalah matriks yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan. $E(G) \geq V(G)-1$ karena $G$ terhubung.

Misalkan $M$ adalah matriks insiden dari $G$. Maka untuk setiap kolom di $M$ pasti terdapat dua angka satu dan $n$-2 nol, karena $G$ terhubung dan setiap sisi di $G$ pasti bersisian dengan dua titik di $G$. Akan dibuat matriks baru $N$ berukuran $n$ x $m$ dengan entri yang sama pada matriks $M$, akan tetapi untuk setiap kolom pada matriks $N$ ubah angka 1 paling atas dengan -1

Klaim,

$$NN^T=L$$

Dalam hal ini $N^T$ adalah transpose dari $N$. Matriks $NN^T$ adalah matriks persegi berukuran $n$ x $n$ dan elemen dari baris ke – $i$ dan kolom ke – $j$ dari $NN^T$ didefinisikan oleh aturan perkalian matriks dot produk dari baris $i$ pada $N = (N_{i1}, N_{i2}, \ldots, N_{im})$ dan kolom $j$ pada $N^T = (N_{ij}^T, N_{2j}^T, \ldots, N_{mj}^T)$.

$$\begin{aligned}(NN^T)_{ij} &= (N_{i1}, N_{i2}, \ldots, N_{im}) \cdot (N_{1j}^T, N_{2j}^T, \ldots, N_{mj}^T) \\ &= (N_{i1}, N_{i2}, \ldots, N_{im}) \cdot (N_{j1}, N_{j2}, \ldots, N_{jm}) \\ &= \sum_{k=1}^{m} N_{ik} N_{jk}\end{aligned}$$

yang jumlahnya sama dengan derajat $v_i$ jika $v_i = v_j$, -1 jika $v_i$ ketetanggaan dengan $v_j$, dan 0 untuk hal yang lain, Sehingga $NN^T = L$.

Selidiki kofaktor dari $NN^T = L$. Dalam aljabar matriks untuk setiap matriks persegi, katakan $A$ dapat dituliskan,

$$A\,adj(A) = \det(A)I$$

Dalam hal ini $adj(A)$ adalah adjoint dari $A$ yang didefinisikan sebagai transpose dari matriks kofaktor $A$ dan $I$ adalah matriks identitas. Khusus pada matriks Laplacian adalah matriks singular dimana determinannya sama dengan nol ($\det(L)=0$) dan rank ($L$) adalah $n$-1. Karena nilai determinan pada matriks Laplacian adalah 0 maka semua kofaktor dari $L$ adalah sama. Karena untuk setiap baris – $i$ dan kolom - $j$ pada semua kofaktor sama, pilih i = 1 dan $j$ = 1. Maka,

$$\begin{aligned}C_{11} &= \det\left[NN^T(1,1)\right] \\ &= \det(N_1 N_1^T)\end{aligned}$$

Dalam hal ini $N_1$ adalah matriks yang diperoleh dengan menghapus baris pertama pada $N$, dan $N_1^T$ adalah matriks yang diperoleh dengan menghapus kolom pertama dari $N^T$.

Menurut teorema Binet-Cauchy

$$\det(AB) = \sum \det(A) \cdot \det(B^T)$$

(Boomen, 2007: 9)

Dengan $A$ dan $B$ adalah submatriks persegi berukuran ($n$-1) x ($n$-1). Maka,

$$\begin{aligned}C_{11} &= \det(N_1 N_1^T) \\ &= \sum \det(N_1) \cdot \det(N_1^T) \\ &= \sum \det(N_1)^2 \\ &= \sum_{N_1\ nonsingular} \det(N_1)^2 + \sum_{N_1\ singular} \det(N_1)^2 \\ &= \sum_{N_1\ nonsingular} \det(N_1)^2\end{aligned}$$

Akan dibuktikan untuk setiap submatriks ($n$-1) x ($n$-1) yang sesuai untuk pohon rentang $G$ dengan memberikan $\pm 1$ untuk semua submatriks nonsingular sedangkan untuk submatriks singular adalah 0. Yang berarti,

$$\begin{aligned}C_{11} &= \sum_{N_1\ non\ singular} (\pm 1)^2 \\ &= \sum_{N_1\ non\ singular} 1\end{aligned}$$

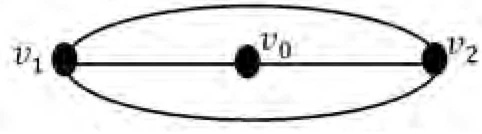
Oleh sebab itu, $C_{11} = \det(N_1 N_1^T)$ adalah banyaknya submatriks non-singular dari $N^T$, yang mana banyaknya pohon rentangan dari $G$ adalah $\tau(G)$. Karena semua kofaktor dari $L$ bernilai sama maka,

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det\left[NN^T(i,j)\right] = \tau(G)$$

Dengan kata lain, jadi banyaknya pohon rentangan $\tau(G)$ adalah sama dari setiap kofaktor dari matriks Laplacian (Ocansey, 2011: 7).

**Menentukan Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf** Wheels $\mathbf{W_n}$

1. Pohon rentangan dari graf *wheel* dengan n = 2 $(W_2)$




Gambar 1 graf *wheel* $W_2$

Diperoleh matriks ketetanggaan $A(W_2)$ dan matriks derajat $D(W_2)$ sebagai berikut

$$A(W_2) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} v_0 & v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad D(W_2) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} v_0 & v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Hasil dari matriks Laplacian $T(W_2)$,

$$T(W_2) = D(W_2) - A(W_2)$$

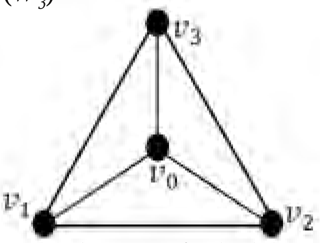
$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Kofaktor $C_{11}$ dari matriks Laplacian $T(W_2)$ adalah 5

Jadi, $\tau(W_2) = 5$.

2. Pohon rentangan dari graf *wheel* dengan $n = 3$ ($W_3$)




Gambar 2 graf *wheel* $W_3$

Diperoleh matriks ketetanggaan $A(W_3)$ dan matriks derajat $D(W_3)$ sebagai berikut

$$A(W_3) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$D(W_3) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Hasil dari matriks Laplacian $T(W_3)$,

$$T(W_3) = D(W_3) - A(W_3)$$

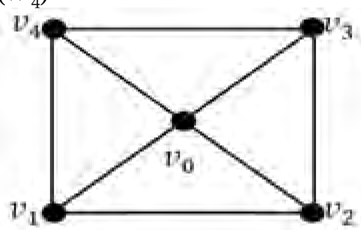
$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Kofaktor $C_{11}$ dari matriks Laplacian $T(W_3)$ adalah 16

Jadi, $\tau(W_3) = 16$.

3. Pohon rentangan dari graf *wheel* dengan $n = 4$ ($W_4$)




Gambar 3 graf *wheel* $W_4$

Diperoleh matriks ketetanggaan $A(W_4)$ dan matriks derajat $D(W_4)$ sebagai berikut

$$A(W_4) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$D(W_4) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Hasil dari matriks Laplacian $T(W_4)$,

$$T(W_4) = D(W_4) - A(W_4)$$

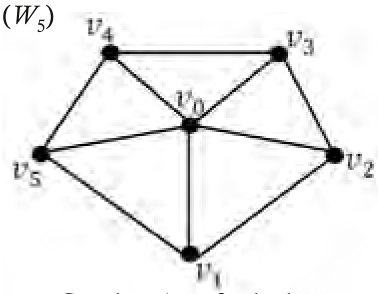
$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Kofaktor $C_{11}$ dari matriks Laplacian $T(W_4)$ adalah 45

Jadi, $\tau(W_4) = 45$.

4. Pohon rentangan dari graf *wheel* dengan $n = 5$ ($W_5$)




Gambar 4 graf *wheel* $W_5$

Diperoleh matriks ketetanggaan $A(W_5)$ dan matriks derajat $D(W_5)$ sebagai berikut

$$A(W_5) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$D(W_5) = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Hasil dari matriks Laplacian $T(W_5)$,

$$T(W_5) = D(W_5) - A(W_5)$$

$$T(W_5) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

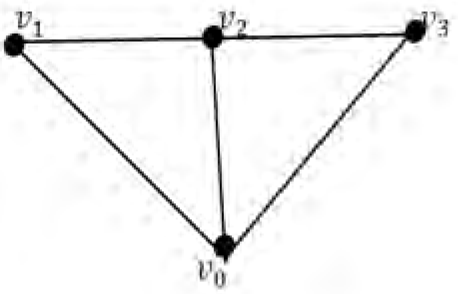
$$= \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Kofaktor $C_{11}$ dari matriks Laplacian $T(W_5)$ adalah 121.

Jadi, $\tau(W_5) = 121$.

**Menentukan Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Kipas** $F_n$

1. Pohon rentangan dari graf kipas dengan $n = 3$ ($F_3$)




Gambar 5 graf kipas $F_3$

Diperoleh matriks ketetanggaan $A(F_3)$ dan matriks derajat $D(F_3)$ sebagai berikut

$$A(F_3) = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$D(F_3) = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Hasil dari matriks Laplacian $T(F_3)$,

$$T(F_3) = D(F_3) - A(F_3)$$

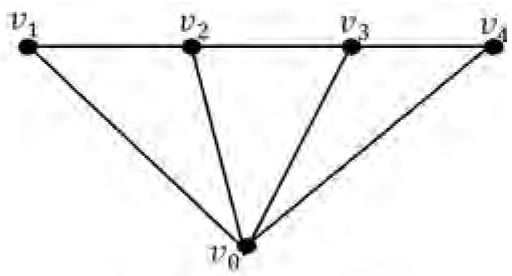
$$T(F_3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Kofaktor $C_{11}$ dari matriks Laplacian $T(F_3)$ adalah 8.

Jadi, $\tau(F_3) = 8$.

2. Pohon rentangan dari graf kipas dengan $n = 4$ ($F_4$)




Gambar 6 graf kipas $F_4$

Diperoleh matriks ketetanggaan $A(F_4)$ dan matriks derajat $D(F_4)$ sebagai berikut

$$A(F_4) = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$D(F_4) = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Hasil dari matriks Laplacian $T(F_4)$,

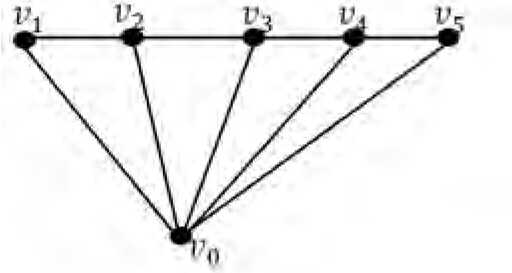
$$T(F_4) = D(F_4) - A(F_4)$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Kofaktor $C_{11}$ dari matriks Laplacian $T(F_4)$ adalah 21.
Jadi, $\tau(F_4) = 21$.

3. Pohon rentangan dari graf kipas dengan $n = 5$ ($F_5$)




Gambar 7 graf kipas $F_5$

Diperoleh matriks ketetanggaan $A(F_5)$ dan matriks derajat $D(F_5)$ sebagai berikut

$$A(F_5) = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$D(F_5) = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Hasil dari matriks Laplacian $T(F_5)$,

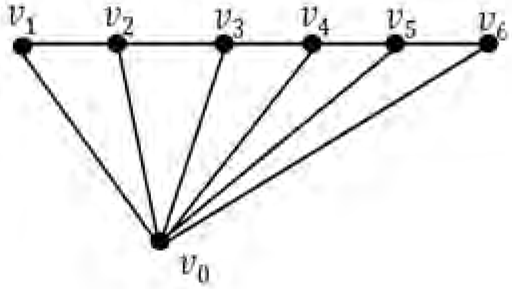
$$T(F_5) = D(F_5) - A(F_5)$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Kofaktor $C_{11}$ dari matriks Laplacian $T(F_5)$ adalah 55.
Jadi, $\tau(F_5) = 55$.

4. Pohon rentangan dari graf kipas dengan $n = 6$ ($F_6$)




Gambar 8 graf kipas $F_6$

Diperoleh matriks ketetanggaan $A(F_6)$ dan matriks derajat $D(F_6)$ sebagai berikut

$$A(F_6) = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$D(F_6) = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Hasil dari matriks Laplacian $T(F_6)$,

$$T(F_6) = D(F_6) - A(F_6)$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Kofaktor $C_{11}$ dari matriks Laplacian $T(F_6)$ adalah 108.

Jadi, $\tau(F_6) = 108$.

## Simpulan

Berdasarkan uraian di atas dapat diperoleh kesimpulan bahwa teorema pohon matriks menjelaskan dalam menentukan banyaknya pohon rentangan pada suatu graf $G$ dapat dilakukan dengan mencari nilai kofaktor dari matriks Laplacian $L=D-A$. Di mana $D$ adalah matriks derajat dan $A$ adalah matriks ketetanggaan dari graf $G$, dan nilai dari setiap kofaktor $C_{ij}$ pada matriks Laplacian adalah sama. Banyaknya pohon rentangan pada graf *wheels* $W_n$ untuk $n$ = 2, 3, 4, dan 5 dengan $n \in N$ adalah $\tau(W_2) = 5$, $\tau(W_3) = 16$, $\tau(W_4) = 45$, dan $\tau(W_5) = 121$. Banyaknya pohon rentangan pada graf kipas $F_n$ untuk n = 3, 4, 5, dan 6 dengan $n \in N$ adalah $\tau(F_3) = 8$, $\tau(F_4) = 21$, $\tau(F_5) = 55$, dan $\tau(F_6) = 108$.

## Daftar Pustaka

Boomen, J.V.D. 2007. The Matrix Tree Theorem. Tersedia di: http://www.math.kun.nl/~bosma/Students/jannekebc3.pdf [diakses 11 Juni 2013].

Budayasa, I.K. 2007. Teori Graph dan Aplikasinya. Surabaya: Unesa University Press.

Munir, R. 2010. Matematika Diskrit. Bandung: Penerbit Informatika.

Ocansey, E.D. 2011. The Matrix-Tree Theorem. Tersedia di: https://www.google.co.id/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&ved=0CCcQFjAA&url=http%3A%2F%2Fusers.aims.ac.za%2F~evans%2Fscientific_papers%2Fevans.pdf&ei=dJJuUvDSBsnArAfCxIDQCg&usg=AFQjCNGIZjdxCxnABxnc8__JtJZT_JbQ&bvm=bv.55123115,d.bmk [diakses 11 Juni 2013].

Wibisono, S. 2008. Matematika Diskrit. Yogyakarta: Graha Ilmu.