UJM 11 (2) 161-170
UNNES Journal of Mathematics
http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujm

KARAKTERISTIK MATRIKS-M DAN ANALISIS INPUT-OUTPUT LEONTIEF PADA SISTEM EKONOMI

Chalimatur Rofingah[✉], **Mashuri**

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 Lt.1, Kampus Sekaran Gunungpati, Semarang 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Juni 2022
Disetujui Oktober 2022
Dipublikasikan November 2022

Keywords:
Matriks-M, Leontief terbuka, Leontief tertutup, feasible

Abstrak

Model ekonomi Leontief merupakan model yang paling populer digunakan oleh para ekonom untuk menganalisis input-output pada sistem ekonomi. Pada dasarnya input-output Leontief menerapkan teori matriks khususnya jenis Matriks-M. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan karakteristik Matriks-M dan untuk menganalisa input-output Leontief pada sistem ekonomi yang menunjukkan situasi *feasible*. Oleh karenanya penelitian ini merupakan jenis penelitian teoritis dengan metode studi kepustakaan. Secara umum simpulan yang diperoleh dari penelitian ini adalah (1) Matriks-M merupakan subkelas dari Matriks $Z^{n\times n}$; (2) Matriks-M juga merupakan subkelas dari matriks monoton; (3) Matriks-M memiliki beberapa sifat antara lain Matriks-M nonsingular, Matriks-M singular, dan sifat khas yaitu matriks-M dengan "property c"; (4) Sedangkan untuk model Leontief, model ini dibagi menjadi dua yakni model Leontief terbuka dan Leontief tertutup. Model Leontief terbuka dengan matriks input T disebut *feasible* jika sistem $Ax = d$ memiliki solusi non negatif yaitu $x \geq 0$ untuk setiap vektor permintaan d, sedangkan model Leontief tertutup dengan matriks input T disebut *feasible* jika terdapat x sedemikian sehingga $Tx \leq x,\ x > 0$.

Abstract

Leontief's economic model is the most popular model used by economists to analyze input-output in the economic system. Basically, Leontief's input-output applies matrix theory, especially the M-Matrix type. So the purpose of this study is to determine the characteristics of the M-Matrix and to analyze the Leontief input-output on an economic system that shows a feasible situation. Therefore, this research is a type of theoretical research with a literature study method. In general, the conclusions obtained from this study are (1) the M-Matrix is a subclass of the $Z^{n\times n}$ Matrix; (2) The M-matrix is also a subclass of the monotonic matrix; (3) The M-Matrix has several properties, including a non-singular M-Matrix, a singular M-Matrix, and the characteristic feature of an M-matrix with "property c"; (4) As for the Leontief model, this model is divided into two, namely the open Leonief model and the closed Leontief model. An open Leontief model with an input matrix T is said to be feasible if the system Ax=d has a non-negative solution, namely x≥0 for each demand vector d. And a closed Leontief model with an input matrix T is called feasible if there is x such that Tx≤x, x>0.

How to cite:

Rofingah, C & Mashuri. 2022. Karakteristik Matriks-M dan Analisis Input-Output Leontief pada Sistem Ekonomi. *UNNES Journal of Mathematics*. 11(2): 161-170.

[✉]Alamat korespondensi:
E-mail: chalimaturrofingah@students.unnes.ac.id

p-ISSN 2252-6943
e-ISSN 2460-5859

PENDAHULUAN

Model ekonomi Leontief merupakan model yang digunakan untuk menganalisis input dan output dari sistem ekonomi (Chiang dan Wainright, 2005). Adapun yang dimaksud sistem ekonomi input output adalah seperangkat n industri yang saling bergantung di mana masing-masing diidentifikasikan oleh proses produktif yang mengkonsumsi komoditas yang diproduksi sebagai input dalam proporsi tertentu untuk menghasilkan satu barang homogen melalui hubungan teknologi (Aroche dan Mrquez, 2021). Kemudian pada tahun 1986 Leontief mengatakan bahwa sistem ekonomi yang dimaksud adalah dapat berupa sistem suatu bangsa atau dunia serta dapat juga terhadap hubungan antar sektor di dalam suatu wilayah. Oleh karenanya, model ini biasa dipakai oleh ekonom untuk mengkaji struktur perekonomian makro, nasional dan regional, yakni dengan cara menentukan agar setiap n sektor dalam sistem ekonomi dapat memproduksi sejumlah atau komoditas secara tepat untuk memenuhi permintaan (Dumatubun, 1999).

Pada dasarnya input output Leontief merupakan implementasi dari teori matriks. Ini dikarenakan menurut Rahayu dan Nurhadiyono (2012), langkah awal dalam analisis input output adalah menggunakan 3 jenis matriks utama yaitu matriks transaksi, matriks-matriks koefisien teknis, dan matriks koefisien total. Matriks transaksi atau matriks input output adalah suatu tabel yang berisi keterangan-keterangan tentang bagaimana output suatu sektor terdistribusi ke sektor-sektor lain sebagai input dan ke pemakai akhir sebagai barang konsumsi. Selanjutnya, apabila setiap unsur dalam matriks transaksi dibagi dengan jumlah entri baris atau jumlah entri kolom yang bersesuaian maka diperoleh suatu rasio yang disebut koefisien teknologi dan apabila semua koefisien teknologi yang ada dihitung kemudian hasil-hasilnya disajikan dalam suatu matriks maka matriks yang demikian disebut matriks teknologi (Rimawati, 2012). Dengan demikian menurut menurut Anton dan Rorres (2005) matriks dapat menggambarkan keterkaitan antara harga, output, dan permintaan dalam suatu sistem ekonomi. Sebab matriks dapat didefinisikan sebagai susunan dari bilangan-ilangan yang berbentuk persegi panjang. Bilangan-bilangan tersebut disebut sebagai entri dalam matriks (Anton dan Rorres, 2013: 26). Meskipun demikian masih banyak yang belum mengetahui bahwa jenis matriks yang digunakan dalam analisis input output Leontief adalah matriks tak negatif khususnya Matriks-M. Matriks tak negatif adalah suatu matriks $A = (a_{ij})$ berukuran $n \times n$ yang entri-entrinya merupakan bilangan riil dengan $a_{ij} \geq 0$ untuk setiap i dan j (Leon, 2014: 377). Sedangkan Matriks-M adalah suatu matriks $A \in R^{n\times n}$ dengan $A = (a_{ij})$ dengan $a_{ij} \leq 0$ untuk $i \neq j$; sehingga A dapat ditulis sebagai $A = sI - B$, dengan $B \geq 0, s > 0$, dan $s \geq \rho(B)$ (Berman & Plemmons, 1994: 133). Seperti pada umumnya matriks ini memiliki sifat non singular dan sifat singular, serta sifat khas yang membedakan dengan matriks lain yaitu Matriks-M dengan "property c". Di mana sifat-sifat tersebut diterapkan untuk analisa input output Leontief.

Menurut Hidayatullah (2018), model Leontief terbagi menjadi dua yaitu model Leontief terbuka dan model Leontief tertutup. Model Leontief terbuka adalah model yang digunakan untuk menganalisis input dan output dalam suatu sistem ekonomi dengan tujuan akhir memenuhi permintaan pasar di luar industri. Jika permintaan di luar industri dimasukkan ke dalam sistem sebagaimana industri lainnya, maka model tersebut akan menjadi model Leontief tertutup. Pada Leontief terbuka dimodelkan sebagai $Ax = d$ dan model Leontief tertutup $Ax = 0$, dengan $A = I - T$ di mana $x = (x_i)$, $d = (d_i)$, dan $T = (t_{ij})$ masing-masing menunjukkan vektor output, vektor permintaan akhir, dan matriks input, serta I merupakan matriks identitas. Dapat dilihat juga bahwa persamaan $A = I - T$ berada di $Z^{n\times n}$ yaitu $a_{ij} \leq 0$ untuk semua $i \neq j$. Oleh karenanya, para ekonom sering menyebutnya jika suatu matriks di $Z^{n\times n}$ disebut sebagai matriks Leontief atau matriks non positif. Dalam analisis input-output terdapat suatu istilah *feasible*. *Feasible* didefinisikan sebagai batasan-batasan t_{ij}, d_i dan x_i yang memenuhi nilai tak negatif.

Oleh karenanya, berdasarkan uraian di atas penulis tertarik untuk mengkaji lebih dalam mengenai Matriks-M dan input-output Leontief pada sistem ekonomi.

METODE

Penelitian ini merupakan jenis penelitian teoritis dengan metode studi kepustakaan. Studi kepustakaan adalah teknik mengumpulkan data dengan mengadakan studi penelaahan terhadap buku-buku, literatur-

literatur, catatan-catatan, dan laporan-laporan yang ada hubungannya dengan masalah yang dipecahkan (Nazir, 2003).

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Karakteristik Matriks-M

1.1 Definisi Matriks-M

Definisi 1.1 (Berman & Plemmons, 1994). Suatu matriks $A \in R^{n\times n}$ disebut Matriks-M jika:

a) $A = (a_{ij})$, di mana $a_{ij} \leq 0$ untuk $i \neq j$; dan
b) A dapat ditulis sebagai $A = sI - B$, di mana $B \geq 0, s > 0$, dan $s \geq \rho(B)$.

Contoh:

Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, maka dapat ditulis sebagai $A = 2I - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = sI - B$. Jelas B merupakan matriks non negatif dengan nilai eigen 2, -1, dan -1. Jadi, $s \geq \rho(B)$, oleh karenanya A adalah matriks-M.

Berdasarkan definisi di atas terlihat bahwa entri nondiagonal dari setiap Matriks-M $A = (a_{ij})$ adalah non positif yaitu $a_{ij} \leq 0$ untuk semua $i \neq j$. Oleh karena itu, Matriks-M merupakan subkelas dari matriks $Z^{n\times n}$. Adapun matriks Z adalah sebarang matriks A berukuran $n \times n$ sedemikiam sehingga $a_{ij} \leq 0$ di mana $i \neq j$ (Filoche, 2021). Selain itu, menurut Šanca dan Kostić (2013) mendefinisikan Matriks-M yaitu jika matriks riil A berbentuk matriks Z, A adalah non singular dan $A^{-1} \geq 0$.

Lemma 1.1 (Tran, 2000: 46-47):
Misalkan $T \in R^{n\times n}$, $T \geq 0$. T konvergen yaitu $\rho(T) < 1$ jika dan hanya jika terdapat $(I - T)^{-1}$ dan $(I - T)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} T^m$, di mana T^0 menunjukkan I.
Bukti:
Asumsikan T konvergen. Argumen berikut berdasarkan Ekspansi Neumann maka misal $S_k = \sum_{m=0}^{k} T^m$ sehingga $(I - T)S_k = I - T^{k+1}, k \geq 0$. Karena $T^m \to 0$ dapat dilihat bahwa $(I - T)S_k \to I$ sebagai $k \to \infty$. Fungsi determinan dan perkalian matriks adalah kontinu, sehingga hal ini mengakibatkan $\det(I - T)\det(S_k) \to 1$. Oleh karena itu, $det(I - T) \neq 0$ yaitu terdapat $(I - T)^{-1}$. Kemudian, dengan menggunakan kekontinuan perkalian matriks maka $(I - T)S_k \to 1$ akibatnya $(I - T)^{-1}(I - T)S_k \to (I - T)^{-1}I$ yaitu $S_k \to (I - T)^{-1}$. Ini berarti, $(I - T)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} T^m$jadi $(I - T)^{-1} \geq 0$ adalah benar. Sebaliknya, asumsikan $(I - T)^{-1}$ ada dan $(I - T)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} T^m \geq 0$. Karena T non negatif, sehingga berdasarkan Teorema Perron-Frobenius $\rho(T)$ adalah nilai eigen dari T dan terdapat vektor eigen non negatif x yang terkait dengan $\rho(T)$. Sehingga, $(I - T)x = (1 - \rho(T))x$, maka $1 - \rho(T) \neq 0$ karena $x \neq 0$ dan $(I - T)$ adalah non singular. Jadi, kita memiliki $(I - T)^{-1}x = \frac{1}{1-\rho(T)}x$ sebab $(I - T)^{-1} \geq 0, x \geq 0,$ dan $x \neq 0$, sehingga $\frac{1}{1-\rho(T)}x = (I - T)^{-1}x \geq 0$ di mana vektor ini tidak nol. Dengan demikian, $\frac{1}{1-\rho(T)} > 0$ atau $\rho(T) < 1$. Oleh karena itu, $T^m \to 0$ sebagai $m \to 0$ maka T konvergen.■

1.2 Matriks-M Non singular

Menurut Ostrowski (1937) matriks riil A berukuran n × n disebut Matriks-M jika dapat ditulis ke dalam bentuk $A = sI - B, s > 0, B \geq 0, s \geq \rho(B)$ di mana ρ menunjukkan spectral radius dan I menunjukkan matriks identitas. Kemudian, jika $s > \rho(B)$ maka A disebut Matriks-M non singular, sebaliknya jika tidak maka Matriks-M singular (Alefeld dan Schneider, 1982).

Definisi 1.2.1 (Ortega & Rheinboldt, 1970)
Matriks $A \in R^{n\times n}$ disebut Matriks-M non singular jika $\det A \neq 0$, $A^{-1} \geq 0$ dan $a_{ij} \leq 0$ untuk semua $i \neq j$.
Contoh:
Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ di mana $a_{ij} \leq 0$ untuk semua $i \neq j$ sehingga jelas $\det A \neq 0$ dan $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ adalah non negatif. Jadi A merupakan Matriks-M non singular.
Selain itu, matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ juga dapat ditulis sebagai $A = I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ di mana $s > 0$ karena $\rho(B) = 0$ maka $s > \rho(B)$ sehingga jelas A adalah Matriks-M non singular.

Teorema 1.2.1 (Tran, 2000: 47-48)
Misalkan $A \in R^{n\times n}$ adalah Matriks-M non singular berbentuk $A = sI - B$ di mana $B \geq 0$, $s > 0$, dan $s \geq \rho(B)$. Serta misal $\rho = \rho(B)$. Maka

(1) $s > \rho$
(2) $A^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{s^{m+1}}$, maka $A^{-1} \geq 0$

Bukti:

(1) Karena B non negatif maka menurut Teorema 2.5.1 ρ adalah nilai eigen dari B, jadi $(s-\rho)$ adalah nilai eigen dari A. Sehingga $s \neq \rho$ karena A non singular dan karena $s \geq \rho$ jadi $s > \rho$.

(2) Karena $s > 0$, $A = sI - B = s(I - s^{-1}B)$. Misal $T = s^{-1}B$ jadi berdasarkan (a) maka $\rho(T) < 1$. Kemudian menurut Teorema 2.2.4.2 $T^m \to 0$ dan Lemma 4.1.1 $(I-T)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} T^m \geq 0$.
Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{s}\left(I - \frac{1}{s}B\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{s}(I-T)^{-1} \\ &= \frac{1}{s}\sum_{m=0}^{\infty} T^m \\ &= \frac{1}{s}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{B}{s}\right)^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{B^m}{s^{m+1}}\right). \end{aligned}$$

Jadi $A^{-1} \geq 0$ karena $B \geq 0$.■

Menurut Young (1971) kelas Matriks-M adalah subkelas dari matriks monoton.

Definisi 1.2.2
Matriks A berorde $n \times n$ disebut matriks monoton jika A non singular dan $A^{-1} \geq 0$.
Contoh:
Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ maka $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \geq 0$. Jelas matriks A non singular karena $\det A \neq 0$. Jadi A disebut matriks monoton.

Teorema 1.2.2
Matriks A berorde $n \times n$ disebut monoton jika dan hanya jika $Ax \geq 0$ mengimplikasikan $x \geq 0$.

Teorema 1.2.3
Untuk $s > \rho(B)$ untuk sebarang Matriks-M $A = sI - B$ adalah matriks monoton.
Bukti:
Dengan membagi $A = sI - B$ dengan s maka diperoleh

$$s^{-1}A = I - s^{-1}B.$$

Perhatikan bahwa $\rho(s^{-1}B) < 1$, invers dari ruas kanan di atas adalah deret Neuman

$$(I - s^{-1}B)^{-1} = \sum_{k \geq 0}(s^{-1}B)^k.$$

Secara khusus, deret Neuman ini hanya terdiri dari pangkat matriks non negatif dan oleh karena itu konvergen ke matriks non negatif. Dengan kata lain, sA^{-1} adalah non negatif akibatnya A^{-1} juga non negatif.■

1.3 Matriks-M Singular

Definisi 1.3 (Meyer & Stadelmaier, 1978)
Matriks $A \in R^{n\times n}$ disebut Matriks-M singular jika A memiliki dekomposisi dalam bentuk $A = \rho(B)I - B$ untuk suatu $B \geq 0$.
Contoh:
Tunjukkanlah bahwa matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ merupakan Matriks-M singular.
Penyelesaian:
Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ maka $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks non negatif dengan nilai eigen 0 dan 1 sehingga $\rho(B) = 1$. Jadi A merupakan Matriks-M singular karena A dapat diekspresikan ke dalam bentuk:
$A = \rho(B)I - B$ yaitu $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = (1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Teorema 1.3.1 (Windisch, 1989: 17)
Matriks-M singular dengan $A = sI - B, B \geq 0, s > 0$ memiliki nilai $s = \rho(B)$.
Bukti:
Jika $B \in R^{n\times n}$, $B \geq 0$ maka untuk $\rho(A)$ terdapat vektor eigen $x \geq 0$ sedemikian sehingga $Bx = \rho(B)x$. Jadi $Ax = (\rho(B)I - B)x = 0$ ini menunjukkan bahwa nol elemen spectrum A, oleh karenanya $\det A = 0$. Akibatnya A merupakan Matriks-M singular.

Lemma 1.3 (Schneider, 1956)
Misalkan A adalah Matriks-M singular tak tereduksi dan misalkan $Ax(\geq 0 \text{ atau } 0) \geq Ax$ maka $Ax = 0$.
Bukti:
Misalkan $Ax(\geq 0 \text{ atau } Ax \leq)0$ dan misalkan $u' > 0$ yaitu vektor baris karakteristik A yang terkait dengan 0. Jika $z(> 0 \text{ atau } z <)0$ maka $u'z > 0$ atau $u'z < 0$. Jadi $Ax = 0$.■

Teorema 1.3.2 (Berman & Plemmons, 1994)
Misalkan A adalah Matriks-M singular tak tereduksi berorde n, maka terdapat vektor $x > 0$ sehingga $Ax = 0$.
Bukti:
Misalkan $A = sI - B, s > 0, B \geq 0$. Maka B juga tak tereduksi dan dengan demikian terdapat vektor positif x sedemikian sehingga $Bx = \rho(B)x$ maka $Ax = 0$.■

1.4 Matriks-M dengan "Property c"

Definisi 1.4 (Plemmons, 1976: 245)
Suatu Matriks-M A dikatakan memiliki "property c" apabila A dapat dipecah menjadi $A = sI - B, s > 0, B \geq 0$, sedemikian sehingga matriks $T = (1/s)B$ adalah semi konvergen.
Contoh:
Misalkan $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, sehingga matriks A dapat ditulis sebagai $A = sI - B$, dengan $s > 0$ yaitu $s = 1$ dan $B \geq 0$ yaitu $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Jadi, diperoleh matriks $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks semi konvergen karena terdapat $\lim_{k \to \infty} T^k$.

Menurut Stewart (1994: 175) suatu Matriks-M dengan sifat "property c" elemen diagonal ke-j dari T sama dengan $(s - a_{jj})/s$ di mana $s > 0$ untuk $j = 1,2, \dots, n$. Misalnya diberikan sebuah Matriks-M yaitu $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ maka melalui iterasi diperoleh Matriks $T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan matriks $T_2 = \begin{bmatrix} 1 - 1/s & 1/s \\ 1/s & 1 - 1/s \end{bmatrix}$.Dengan demikian matriks iterasi pertama T_1 untuk $s = 1$ tidak semi konvergen sedangkan pada matriks iterasi ke dua T_2 untuk sebarang $s > 1$ adalah semi konvergen.

Kemudian, perlu diketahui juga bahwa setiap Matriks-M non singular memiliki "property c" karena s berdasarkan definisi Matriks-M s selalu bernilai positif dan pangkat $(1/s)B$ konvergen ke matriks nol. Sehingga, himpunan semua Matriks-M dengan "property c" adalah himpunan bagian dari semua Matriks-M yang indeksnya 0 atau 1 (Neumann & Plemmons, 1980). Namun tidak semua matriks-M memiliki karakteristik ini, misalnya matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ yang memiliki nilai eigen 0, jelas A merupakan Matriks-M, tetapi representasi apapun untuk $A = sI - B, B \geq 0, s > 0, T = (1/s)B$ memiliki bentuk $T = \begin{bmatrix} 1 & 1/s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Dengan demikian matriks T tidak semi konvergen.

2. Analisis Input Output Leontief

Secara umum model Leontief ditulis dalam bentuk $x = (I - T)^{-1}d$ di mana x menunjukkan output total setiap produk, matriks T menunjukkan input yang diperlukan untuk memproduksi satu unit setiap produk dan d menunjukkan permintaan produk dari industri (Laurent, 2018). Adapun model Leontief dibagi menjadi 2 model yaitu model Leontief terbuka dan model Leontief tertutup. Berikut adalah penjelasan dari masing-masing model tersebut.

2.1 Leontief Terbuka

Misalkan suatu perekonomian dibagi ke dalam n sektor sehingga masing-masing dari sektor tersebut menghasilkan satu komoditas untuk dikonsumsi sendiri, industri lain dan sektor luar. Dan misalkan:

x_i : Output bruto sektor i;
x_{ij} : Penjualan sektor i ke sektor j;
d_i : Permintaan akhir pada sektor i;
t_{ij} : Koefisien input, jumlah unit komoditi i yang dibutuhkan untuk memproduksi satu unit komoditi j.

Dengan demikian matriks koefisien input dengan entri t_{ij} dapat diperoleh dengan $t_{ij} = x_{ij}/x_j$, di mana $1 \leq i, j \leq n$; sehingga model Leontief terbuka dapat didefinisikan sebagai $Ax = d$ di mana $A = I - T$ berada di $Z^{n \times n}$. Kemudian dalam analisis Leontief yakni untuk makroekonomi dan pertumbuhan ekonomi umumnya membahas fungsi produksi nilai tambah daripada fungsi produksi output total (Jiang, 2018). Sehingga misalkan:

p_j : Harga komoditi ke-j;
v_j : Nilai tambah per unit output dari komoditi ke-j.

Maka hubungan vektor $p = (p_j)$ dengan vektor $v = (v_j)$ dapat dinyatakan oleh sistem persamaan linier berikut:
$$p^T - p^T T = v^T$$
atau
$$p^T A = v^T .$$

Definisi 2.1.1
Model Leontief terbuka dengan matriks input T dikatakan feasible jika sistem persamaan $Ax = d$ memiliki solusi non negatif yaitu $x \geq 0$ untuk setiap vektor permintaan d. Selanjutnya, dikatakan profitable jika sistem persamaan $p^t A = v^t$ memiliki solusi non negatif yaitu $p \geq 0$ untuk setiap vektor nilai tambah v.
Contoh:
Misalkan pada suatu negara Y terdapat tiga sektor industri yang saling berhubungan seperti yang disajikan pada tabel transaksi berikut.

Tabel 1. Input-Output Tiga Sektor Industri (Dolar)

Sektor	(1) Pertanian	(2) Industri	(3) Jasa	Permintaan Akhir Konsumsi	Permintaan Akhir Lainnya	Total Output
(1) Pertanian	40	90	0	40	40	210
(2) Industri	20	40	10	100	100	270
(3) Jasa	10	40	20	70	40	180

Upah/Gaji	40	20	50
Lainnya	100	80	100
Total Input	210	270	180

Berdasarkan data di atas maka prediksilah output total yang harus disediakan atau diproduksi oleh masing-masing sektor jika ditargetkan permintaan akhir untuk sektor pertanian 100, sektor industri 300, dan sektor jasa 200. Serta tentukan besar harga untuk masing-masing input primer dari tabel di atas.
Penyelesaian:
Berdasarkan tabel di atas maka dengan menggunakan $t_{ij} = x_{ij}/x_j$ diperoleh matriks input T sebagai berikut:

$$T = \begin{bmatrix} 40/210 & 90/270 & 0/180 \\ 20/210 & 40/270 & 10/180 \\ 10/210 & 40/270 & 20/180 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0{,}19 & 0{,}33 & 0 \\ 0{,}01 & 0{,}15 & 0{,}06 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}11 \end{bmatrix}$$

Sehingga menggunakan $Ax = d$ diperoleh nilai output total sebagai berikut:

$$Ax = d$$
$$\Leftrightarrow (I - T)x = d$$
$$\Leftrightarrow x = (I - T)^{-1}d$$
$$\Leftrightarrow x = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}19 & 0{,}33 & 0 \\ 0{,}01 & 0{,}15 & 0{,}06 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}11 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} 0{,}81 & -0{,}33 & 0 \\ -0{,}01 & 0{,}85 & -0{,}06 \\ -0{,}05 & -0{,}15 & 0{,}89 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} 1{,}24 & 0{,}49 & 0{,}03 \\ 0{,}02 & 1{,}20 & 0{,}08 \\ 0{,}07 & 0{,}23 & 1{,}14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} 277 \\ 378 \\ 304 \end{bmatrix}$$

Jadi dapat diprediksikan output total yang harus disediakan untuk memenuhi sejumlah permintaan di atas yaitu untuk sektor pertanian, industri, dan jasa masing-masing sebesar 277 dolar, 378 dolar, dan 304 dolar.
Karena sistem $Ax = d$ untuk setiap vektor permintaan terbuka d memiliki solusi non negatif yaitu $x \geq 0$ maka sistem perekonomian tersebut *feasible*.
Kemudian untuk menunjukkan apakah sistem profitable maka dengan menggunakan persamaan $p^tA = v^t$ diperoleh sebagai berikut:

$$p^tA = v^t$$
$$\Leftrightarrow p^t(I - T) = v^t$$
$$\Leftrightarrow p^t = (I - T)^{-1}v^t$$
$$\Leftrightarrow p^t = \begin{bmatrix} 1{,}24 & 0{,}49 & 0{,}03 \\ 0{,}02 & 1{,}20 & 0{,}08 \\ 0{,}07 & 0{,}23 & 1{,}14 \end{bmatrix} [140 \quad 100 \quad 150]^t$$
$$\Leftrightarrow p^t = \begin{bmatrix} 1{,}24 & 0{,}49 & 0{,}03 \\ 0{,}02 & 1{,}20 & 0{,}08 \\ 0{,}07 & 0{,}23 & 1{,}14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 140 \\ 100 \\ 150 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow p^t = \begin{bmatrix} 227{,}1 \\ 134{,}8 \\ 203{,}8 \end{bmatrix}$$

Jadi dapat disimpulkan besarnya harga untuk masing-masing nilai tambah berdasarkan tabel di atas yaitu untuk pertanian sebesar 227,1 dolar, industri 134,8 dolar, dan jasa 203,8 dolar.
Karena sistem $p^tA = v^t$ untuk setiap nilai tambah vektor v memiliki solusi non negatif yaitu $p \geq 0$ maka sistem perekonomian tersebut *profitable*.
Dengan demikian sistem perekonomian suatu negara Y yang disajikan pada Tabel 1 di atas, menurut Definisi 2.1.1 memiliki kondisi *feasible* dan *profitable*.

Teorema 2.1.1
Perhatikan bahwa model Leontief terbuka dengan matriks input T dan misalkan $A = I - T$. Maka pernyataan berikut adalah ekuivalen:
(1) Model *feasible*.
(2) Model *profitable*.
(3) A merupakan Matriks-M non singular.
Bukti:
Pertama akan ditunjukan bahwa (1) dan (3) setara. Jika (1) berlaku maka berdasarkan definisi model yang bersifat feasible karena misalkan memilih vektor permintaan $d \geq 0$ maka terdapat $x \geq 0$ sedemikian sehingga $Ax = d$ adalah non negatif sehingga berdasarkan Teorema 1.2.2 matriks A adalah matriks monoton. Sehingga karena $A \in Z^{n \times n}$ adalah matriks monoton maka jelas A adalah Matriks-M non singular, jadi (3) berlaku Sebaliknya, jika (3) berlaku maka terdapat $A^{-1} \geq 0$ untuk sistem Ax = d. Sehingga Ax = d memiliki solusi non negatif $x = A^{-1}d$ untuk setiap $d \geq 0$, dengan demikian (1) berlaku. Kemudian kesetaraan (2) dan (3) diselesaikan dengan cara yang sama yaitu dengan menggunakan fakta bahwa A adalah Matriks-M non singular jika dan hanya jika untuk A^t benar. Oleh karena itu, dengan memilih vektor p dan v dengan $p \geq 0$ dan $v \geq 0$. Maka berdasarkan Definisi 2.1.1 A memenuhi persamaan $p^tA = v^t$. Sehingga diperoleh:

$$p^tA = v^t$$
$$\Leftrightarrow (p^tA)^t = (v^t)^t$$
$$\Leftrightarrow pA^t = v$$
$$\Leftrightarrow A^t = p^{-1}v$$

Jadi, A^t memiliki solusi non negatif karena terdapat $p^{-1} \geq 0$. Dan karena A di $Z^{n \times n}$ maka berdasarkan teorema 1.2.1 A merupakan

Matriks-M non singular. Sebaliknya, karena A adalah Matriks-M non singular. Maka jelas A^t juga merupakan Matriks-M non singular. Karena model terbuka maka memenuhi persamaan $A^t p = v$ dengan $p \geq 0$ dan $v \geq 0$. Sehingga diperoleh:

$$A^t p = v$$
$$\Leftrightarrow (A^t p)^t = v^t$$
$$\Leftrightarrow A p^t = v^t$$

Jadi, karena $Ap^t = v^t$ maka menurut Definisi 2.1.1 model memiliki solusi non negatif, sehingga jelas model *profitable*. ■

Lemma 2.1.1
Misalkan A adalah Matriks-M non singular orde n yang semua jumlah entri barisnya non negatif yaitu $Ae \geq 0$ di mana $e = (1, \dots, 1)^t$, maka entri dari A^{-1} memenuhi

$$(A^{-1})_{ii} \geq (A^{-1})_{ki}, \qquad 1 \leq i, k \leq n$$

Teorema 2.1.2
Misal T adalah matriks input untuk model Leontief terbuka yang *feasible* dengan asumsi $Te \leq e, e = (1, \dots, 1)^T$.Sehingga,jika permintaan untuk komoditas i saja yang meningkat, tidak ada output yang menurun maka output dari komoditas i meningkat dan meningkat dengan jumlah terbesar, meskipun output lain mungkin dapat meningkat dengan jumlah yang sama.
Bukti:
Misalkan $A = I - T$ dan misal x dan d masing-masing menyatakan output dan vektor permintaan. Karena diketahui model Leontief terbuka *feasible* maka menurut Teorema 2.1.1 A adalah Matriks-M non singular. Kemudian dengan asumsi $Ae = (I - T)e = e - Te \geq 0$, maka Lemma 2.1.1 berlaku. Selanjutnya misalkan suku ke-i dari vektor permintaan d bertambah sebesar δ. Oleh karenanya, vektor permintaan yang dihasilkan menjadi $\hat{d} = d + \delta e_i$, di mana e_i menunjukkan vektor satuan ke-i. Dari persamaan $Ax = d$ diperoleh $x = A^{-1}d$ sehingga vektor output baru $\hat{x}$ yaitu

$$\begin{aligned} \hat{x} &= A^{-1}\hat{d} \\ &= A^{-1}(d + \delta e_i) \\ &= A^{-1}d + \delta A^{-1} e_i \\ &= x + \delta (A^{-1})_i, \end{aligned}$$

di mana $(A^{-1})_i$ menyatakan kolom ke-i dari A^{-1}. Selanjutnya, karena terdapat $A^{-1} \geq 0$ dan $A \in Z^{n \times n}$ maka A adalah Matriks-M non singular oleh karenanya

$$\hat{x}_k = x_k + \delta (A^{-1})_{ki}, \qquad 1 \leq k \leq n,$$

sehingga $\hat{x}_i > x_i$ dan juga tidak ada output yang berkurang. Maka menurut Lemma 2.1.1

$$\delta (A^{-1})_{ki} \leq \delta (A^{-1})_{ii}, \qquad 1 \leq k \leq n,$$

jadi x_i meningkat dengan jumlah terbesar meskipun output lain mungkin dapat meningkat dengan jumlah yang sama. ■
Perhatikan jumlah kolom dari matriks input T, karena model Leontief terbuka maka jika model bersituasi profitable akibatnya tidak ada sektor ekonomi yang beroperasi pada situasi rugi dan setidaknya terdapat satu sektor yang beroperasi pada situasi *profitable*. Dalam hal matriks input T, ini berarti bahwa

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ij} \leq 1, \qquad 1 \leq j \leq n.$$

Teorema 2.1.3
Jika nilai tambah komoditas i saja dari model Leontief terbuka yang layak dinaikan, maka tidak ada harga yang turun dan harga komoditas i meningkat dengan jumlah terbesar, meskipun harga-harga lain mungkin naik dengan jumlah yang sama.

2.2 Leontief Tertutup

Leontief tertutup berbeda dengan Leontief terbuka karena pada model ini sektor luar dimasukkan ke dalam sistem input-output sebagai industri lain, sehingga di dalam sistem tersebut tidak muncul permintaan akhir dan input primer. Adapun konsep model Leontief tertutup pada dasarnya hampir mirip dengan model terbuka $Ax = d$ di mana x_i adalah output sektor ke-i dan d_i adalah permintaan luar di sektor ke-i, dan $A = I - T$ di mana T adalah matriks input untuk model. Karena pada model tertutup permintaan akhir dianggap sebagai input dari sektor konsumen maka setiap komponen d_i dari d terkait dengan tingkat pekerjaan w. Sehingga diperoleh koefisien teknis dari model tertutup yaitu $c_i = d_i/w$. Kemudian misalkan $c_i = t_{ij}$, $x_n = w$, dan $A = I - T$ di mana $I - T$ berada di $Z^{n \times n}$ maka model Leontief tertutup didefinisikan sebagai $Ax = 0$ di mana *0* menyatakan vektor nol dari dimensi n. Karena $Ax = 0$ homogen, akibatnya $Ax = 0$ memiliki solusi trivial yaitu $x = 0$ atau memiliki banyak solusi tak hingga. Pada model Leontief tertutup dengan matriks input T yang tidak dapat direduksi memiliki

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ij} = 1, \qquad 1 \leq j \leq n.$$

Definisi 2.2.1
Model Leontief tertutup dengan matriks input T dikatakan feasible jika terdapat x sedemikian sehingga

$$Tx \leq x, \; x > 0.$$

Definisi 2.2.2
Vektor x disebut vektor ekuilibrium output untuk model Leontief tertutup dengan matriks input T jika

$$Tx = x,\ x > 0.$$

Contoh:
Misalkan pada suatu desa terdapat seorang petani, tukang kayu, dan penjahit yang menyediakan tiga barang yaitu makanan, tempat tinggal, dan pakaian. Misalkan petani itu sendiri mengkonsumsi 40% dari panen yang dihasilkan dan memberikan 40% kepada tukang kayu dan 20% kepada penjahit. 30% dari produksi tukang kayu dikonsumsi sendiri, 40% oleh petani, dan 30% oleh tukang kayu. 50% dari produksi penjahit digunakan sendiri, 30% oleh petani, dan 20% oleh penjahit. Maka berapakah besar biaya yang harus dibayarkan oleh setiap orang yang bekerja sebagai petani, tukang kayu, dan penjahit?
Penyelesaian:
Berdasarkan narasi di atas maka tabel input output yang terbentuk adalah sebagai berikut:

Tabel 2. Input Output Proporsi Penghasilan (Dolar)

	Petani	Tukang kayu	Penjahit
Petani	0,4	0,4	0,3
Tukang kayu	0,4	0,3	0,2
Penjahit	0,2	0,3	0,5

Sumber: https://math.libretexts.org

Sehingga apabila dituliskan ke dalam bentuk matriks menjadi

$$T = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Misalkan x_1, x_2 dan x_3 merupakan entri dari vektor output x di mana masing-masing menyatakan penghasilan petani, tukang kayu, dan penjahit. Sehingga apabila data di atas dituliskan ke dalam bentuk sistem persamaan linier maka diperoleh

$$x_1 = 0,4x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3$$
$$x_2 = 0,4x_1 + 0,3x_2 + 0,2x_3$$
$$x_3 = 0,2x_1 + 0,3x_2 + 0,5x_3$$

Karena di dalam model ini input sama dengan output yang artinya jumlah yang dibayarkan sama dengan jumlah yang diterima oleh masing-masing sektor. Sehingga untuk menemukan solusi dari sistem tersebut maka dapat menggunakan $x = Tx$. Karena $x = Tx$ dapat ditulis sebagai $Ax = 0$ sehingga diperoleh:

$$Ax = 0$$
$$\Leftrightarrow (I - T)x = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0,6 & -0,4 & -0,3 \\ -0,4 & 0,7 & -0,2 \\ -0,2 & -0,3 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Menggunakan metode Gauss-Jordan dan bantuan dari aplikasi solver matriks diperoleh solusi $x = q \begin{bmatrix} 29 \\ 24 \\ 26 \end{bmatrix}$ yang berarti $x_1 = \frac{29}{26}$; $x_2 = \frac{24}{26}$, dan $x_3 = q$.
Jadi karena pada permasalahan ini hanya akan menentukan besarnya proporsi penghasilan sehingga misalkan $q = 2600$ dolar maka diperoleh penghasilan petani, tukang kayu, dan penjahit secara berturut-turut adalah 2900 dolar, 2400 dolar, dan 2600 dolar. Dengan demikian menurut Definisi 2.2.1 dan Definisi 2.2.2 dari contoh di atas memiliki kondisi feasible di mana untuk $x > 0$ disebut vektor ekuilibrium.

Teorema 2.2.1
Model Leontief tertutup dengan matriks input T dikatakan *feasible* jika $A = I - T$ adalah Matriks-M dengan "property c".
Bukti:
Dengan menggunakan Definisi 2.2.1 model dikatakan *feasible* jika terdapat x sedemikian sehingga $Tx \leq x$ untuk $x > 0$ terpenuhi sehingga $Ax \geq 0$ untuk suatu $x > 0$. Tetapi karena $A \in Z^{n \times n}$ maka berdasarkan Teorema 4.1.4 A adalah Matriks-M dengan "property c".■

Lemma 2.2.1
Misalkan matriks input T dari model Leontief tertutup tidak dapat direduksi dan misalkan $A = I - T$. Maka pernyataan berikut ini adalah setara.
1) Model *feasible*
2) Model memiliki vektor ekuilibrium output x yang unik hingga kelipatan skalar positif.
3) A adalah M-Matriks dengan "property c".

Bukti:
Untuk (1) ke (3) jelas berdasarkan Teorema 2.2.1. Selanjutnya menggunakan asumsi (3) maka menurut Teorema 1.3.2 terdapat $x > 0$ sehingga $Ax = 0$, karena T tidak dapat direduksi dan $Tx = x$ maka berdasarkan Teorema 2.5.4 diperoleh x unik hingga kelipatan skalar positif akibatnya (2) berlaku. Kemudian, implikasi (2) ke (1) jelas karena berdasarkan Definisi 2.2.1 dan Definisi 2.2.2.■

PENUTUP

Berdasarkan hasil pembahasan di atas maka dapat disimpulkan bahwa Matriks-M memiliki beberapa sifat antara lain Matriks-M nonsingular, Matriks-M singular, dan sifat khas yaitu matriks-M dengan "property c". Adapun untuk mempermudah dalam membedakan antara Matriks-M non singular dengan Matriks-M singular yaitu dengan melihat besarnya nilai s, jika $s > \rho(B)$ maka disebut Matriks-M non singular dan jika $s = \rho(B)$ maka disebut Matriks-M singular. Sedangkan untuk model Leontief dibedakan menjadi dua yaitu model Leontief terbuka dan model Leontief tertutup. Model Leontief terbuka dengan matriks input T dikatakan *feasible* jika sistem persamaan $Ax = d$ memiliki solusi non negatif yaitu $x \geq 0$ untuk setiap vektor permintaan d. Sedangkan pada model Leontief tertutup yaitu $Ax = 0$ di mana $A = I - T$ dan T adalah matriks input dikatakan bersituasi *feasible* jika terdapat x sedemikian sehingga $Tx \leq x, x > 0$ berlaku. Selain itu model Leontief tertutup juga dapat dikatakan memiliki situasi *feasible* jika model tersebut adalah Matriks-M dengan "property c".

Oleh karenanya, berdasarkan simpulan di atas maka untuk kajian selanjutnya peneliti dapat mengkaji subkelas lain dari Matriks-Z, misalnya Matriks-L serta peneliti dapat menerapkan teori input output Leontief untuk sistem perekonomian mikro misalnya untuk wilayah kecamatan.

DAFTAR PUSTAKA

Alefeld, G., and Schneider, N. 1982. *On Square Roots of M-matrices. Linear Algebra and Its Applications*. 42, 119-132.

Anton, H., and Rorres, C. 2013. *Elementary Linear Algebra: Applications version / Howard Anton, Chris Rorres.-11th* edition. Canada: Wiley.

Anton, H., & Rorres, C. 2005. *Elementary Linear Algebra (9 th ed)*.

Aroche Reyes, F., & Marquez Mendoza, M. A. 2021. *Demand-Driven and Supply-Sided Input–Output Models. Journal of Quantitative Economics*. doi:10.1007/s40953-020-00229-5.

Berman, A dan Plemmons, R.J. 1994. *Nonnegative Matrices in The Mathematical Sciences*. Philadelphia : SIAM.

Chiang AC, Wainwright K. 2005. *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. Connecticut (US) : McGraw-Hill.

Dumatubun, P.I. 1999. *Matematika : Aplikasi Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta.

Filoche, M., Mayboroda, S., & Tao, T. 2021. *The effective potential of an M-matrix*. Journal of Mathematical Physics, 62(4), 041902. doi:10.1063/5.0042629.

Hidayatullah, I. 2018. *Model Produksi Input-Output Leontief dan Aplikasinya dalam Kontrol Inventori.* Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam : Institut Pertanian Bogor.

Jiang, W., Fan, J., & Tian, K. 2020. *Input-Output Production Structure and Non-Linear Production Possibility Frontier*. Journal of Systems Science and Complexity. doi:10.1007/s11424-020-9079-y.

Laurent, S. 2018. *The mathematical justification of the Leontief and Sraffa input-output systems*. Department of Mathematics: Uppsala University.

Leon, J Steven. 2014. *Linear Algebra with Applicatioans Ninth Edition*. Perarson.

Meyer, C. D.. Jr., and Stadelmaier. M.W. 1978. *Singular M-matrices and inverse-positivity*, Linear Algebra and Appl. 22, 139-156.

Nazir, M. 2003. *Metode Penelitian*. Jakarta : Ghalia Indonesia.

Neumann, M., & Plemmons, R. J. 1980. *M-matrix characterization II: General M matrices*. Linear and Multilinear Algebra, 9(3), 211–225.

Ortega, J. M., Rheinboldt, W.C. 1970. *Iterative solution of nonnlinear equations in several variables*. London, New York: Academic Press.

Pleommons, R. J. 1976. *M-matrices Leading to Semiconvergent Splittings*. Linear Algebra and Its Applications. 15, 243-252.

Rahayu, Y., dan Nurhadiyono, B. 2012. *Implementasi Matriks pada Matematika Bisnis dan Ekonomi*. Techno.COM, 11 (2), 74-81.

Rimawati, E. 2012. *Penerapan Aljabar Matriks dalam Analisa Masukan-Keluaran*. Jurnal Ilmiah SINUS.

Šanca, E., & Kostić, V. 2013. *Diagonal scaling of a special type and its benefits*. PAMM, 13(1), 409–410. doi:10.1002/pamm.201310200.

Schneider, H. 1956. *The Elementary Divisors, Associated with 0, of a Singular M-matrix. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 10(3), 108-122. doi:10.1017/S0013091500021507.

Stewart, W.J. 1994. *Introduction to the Numerical Solution of Marcov Chains*. New Jersey: Princeton University Press.

Tran, A. H. 2000. *Perron-Frobenius Theory and Perron Complementation*. San Jose State University.

Windisch, G. 1989. *M-matrices in Numerical Analysis*. Springer Fachmedien Wiesbaden.

Young, D. M. 1971. *Iterative Solution of Large Linear Systems*. New York: Academic Press.