UJM 10 (2) 2021
UNNES Journal of Mathematics
http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujm

BEBERAPA KARAKTERISTIK MATRIKS RIORDAN DAN GRUP RIORDAN

Ray Novita Yasa✉**, Ira Rosianal Hikmah**

Politeknik Siber dan Sandi Negara, Indonesia
Jalan Haji Usa, Ciseeng, Bogor, 16120

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Oktober 2021
Disetujui November 2021
Dipublikasikan November 2021

Keywords:
Ordinary generating functions, formal power series, Riordan array, Riordan matrices, Riordan group, Appell subgroup.

Abstrak

Deret pangkat formal dan fungsi pembangkit biasa menjadi alat utama dalam membentuk suatu susunan Riordan. Susunan Riordan akan menjadi dasar pembentukan matriks Riordan, dalam kajian ini hanya akan dibahas matriks Riordan dengan satu fungsi pengali. Makalah ini memberikan bukti-bukti terperinci terkait beberapa karakteristik matriks Riordan yang akan membawa pada bukti pembentukan suatu grup yang disebut grup Riordan. Makalah ini juga membuktikan bahwa subgrup Appell adalah subgrup normal dan memberikan bukti terperinci mengenai pembentukan grup faktor oleh subgrup Appell dari grup Riordan.

Abstract

Formal power series and ordinary generating functions are the main tools to forming a Riordan array. The Riordan array will be the base to forming a Riordan matrix, in this study the focus only in the Riordan matrices with one multiplier. This paper provides detailed proofs regarding some characteristic of the Riordan matrices which will lead to proof of the formation of a group called a Riordan group. This paper also proves that the Appell subgroup is a normal subgroup and provides detailed proof regarding the formation of a quotient group by the Appell subgroup from the Riordan group.

How to cite:

Yasa, R.N. 2021. Beberapa Karakteristik Matriks Riordan dan Grup Riordan. *UNNES Journal of Mathematics*. 7(2):43-49.

✉Alamat korespondensi:
E-mail: ray.novita@poltekssn.ac.id

p-ISSN 2252-6943
e-ISSN 2460-5859

PENDAHULUAN

Pengetahuan tentang *Riordan array* (susunan Riordan) dapat diangkat dari sebuah deret pangkat formal. Sebuah ekspresi aljabar dalam bentuk $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, dimana bilangan kompleks $a_n \in \mathbb{C}$ untuk setiap $n \geq 0$, disebut suatu deret pangkat formal dengan peubah tak tentu x atas $\mathbb{C}$ (Niven, 1969). Bentuk fungsi $f(x)$ yang dapat dinyatakan dengan deret pangkat disebut sebagai fungsi pembangkit dari barisan bilangan-bilangan $a_n \in \mathbb{C}$. Terdapat dua jenis fungsi pembangkit yang umum diketahui yaitu fungsi pembangkit biasa dan fungsi pembangkit eksponensial. Dalam kajian makalah ini difokuskan untuk menggunakan fungsi pembangkit biasa sehingga apabila hanya disebutkan sebuah fungsi pembangkit, maka akan merujuk kepada fungsi pembangkit biasa. Sebagai contoh koefisien binomial sentral dinyatakan dalam barisan 1, 2, 6, 20, 70, 252,… secara kombinatorik dapat dituliskan sebagai $\binom{2n}{n}$. Apabila dituliskan dalam bentuk formal, maka koefisien binomial sentral tersebut akan menjadi $f(x) = \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} x^n$. Dengan menggunakan sedikit aljabar, bentuk fungsi pembangkit dari koefisien binomial sentral adalah $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

Dari deret pangkat, Sprugnoli (1991) memperkenalkan sebuah istilah susunan Riordan yang digunakan untuk memperumum segitiga Pascal, bilangan Catalan, dan segitiga Motzkin. Hasil tersebut digunakan untuk mempelajari tipe dari segitiga kombinatorik. Misalkan $\mathbb{C}[x]$ adalah sebuah gelanggang deret pangkat formal dengan peubah tak tentu x atas bilangan kompleks $\mathbb{C}$. Jika $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, maka $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Sebuah susunan Riordan adalah pasangan $D\,(x) = \big(g(x), f(x)\big) =$, $g(x), f(x) \in \mathbb{C}[x]$, dengan suku konstan dari $f(x) = 0$. Susunan ke-i yaitu $D_i(x) = g(x)[f(x)]^i$, $i \geq 0$ (Sporugnoli, 1994). Apabila koefisien dari masing-masing susunan Riordan mulai dari $i = 0$ dituliskan dalam sebuah matriks segitiga bawah maka susunan Riordan akan membentuk suatu matriks yang disebut sebagai matriks Riordan. Definisi formal akan diberikan pada bagian lain makalah ini. Contoh konkrit dari susunan Riordan adalah segitiga Pascal, dengan menggunakan pengetahuan fungsi pembangkit dan deret pangkat formal dapat kita tulis $P = (\frac{1}{1-z}, \frac{z}{1-z})$ sebagai susunan Riordan segitiga Pascal.

Saat ini susunan Riordan lebih banyak dikaji dalam bentuk matriks Riordan, hal ini dikarenakan aplikasinya yang lebih mudah. Sudah banyak penelitian yang membahas mengenai matriks Riordan. Deutsch *et. al.* (2009) mengkaji susunan Riordan dan matriks produksi Riordan dengan menggunakan teknik enumerasi, hasilnya adalah sebuah matriks produksi yang bertipe rasional hal ini mendasari munculnya fungsi pembangkit rasional. Deutsch *et. al.* (2009) juga memberikan lebih dari empat puluh pasangan fungsi pembangkit untuk susunan Riordan dari barisan-barisan yang disajikan sehingga memberikan contoh yang kaya dalam produksi matriks Riordan. Cheon *et.al.* (2021) dalam papernya membahas mengenai beberapa aljabar linear yang ada pada matriks Riordan mulai dari memberikan analisis lengkap terkait eksistensi dan tidaknya nilai eigen dari matriks Riordan, serta membagi himpunan matriks-matriks Riordan kedalam tiga tipe nilai eigen. Cheon et.al. (2011) membahas matriks Riordan dengan menghasilkan sebuah karakteristik yang mengatakan bahwa matriks Riordan dapat diproduksi melalui barisan Z-karakteristik dan A-karakteristik.

Seiring banyaknya kajian mengenai matriks Riordan, makalah ini akan membahas beberapa karaktistik dari matriks Riordan yang bukti-buktinya dikonstruksi dengan memberikan penjelasan yang lebih rinci dan mengaitkannya dengan suatu grup, yang disebut grup Riordan. Pembahasan grup Riordan yang akan dilakukan dengan dibatasi pada struktur matriks Riordan yang hanya memiliki satu fungsi pengali, apabila ingin mengetahui lebih jauh mengenai matriks Riordan dengan dua pengali dapat merujuk pada artikel milik Devenport *et.al.* (2013). Kebaharuan lain yang akan coba dikaji pada makalah adalah pembuktian bahwa suatu subgrup Appell adalah suatu subgrup normal dari grup Riordan dan pembuktikan dapat dibangunnya suatu grup faktor dari subgrup tersebut.

METODE

Metode penelitian yang digunakan dalam menyusun makalah ini adalah studi literatur, mengaitkan antara penelitian yang telah dilakukan dan melihat peluang penelitian lanjutan yang dapat dilakukan terkait susunan Riordan, Matriks Riordan, dan grup Riordan kemudian memberikan hasil berupa beberapa karakteristik dari topik tersebut. Sumber literatur yang digunakan berupa jurnal ilmiah yang berkaitan dengan topik. Langkah-langkah yang dilakukan adalah memberikan definisi formal terkait matriks Riordan dan sifat-sifat yang berlaku padanya, memberikan definisi formal grup Riordan, memberikan kebaharuan berupa pembuktikan bahwa subgrup Appell adalah subgrup normal dan dapat dibangun suatu grup faktor atasnya

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini terlebih dahulu akan diberikan definisi formal matriks Riordan untuk membuka jalan mengenai sifat-sifat matriksnya.

Definisi 1. (Shapiro *et.al.*, 1991) *Misalkan M suatu matriks yang kolomnya dan barisnya dimulai dari indeks nol, yaitu matriks* $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{m_{ij}})_{i,j\geq 0}$ *dengan* $\boldsymbol{m_{ij}} \in \mathbb{C}$. *Misalkan* $\boldsymbol{C_i(x)} = \sum_{n\geq 0} \boldsymbol{m_{ni}}\, \boldsymbol{x^n}$ *adalah fungsi pembangkit dari barisan entri pada kolom ke-*$\boldsymbol{i}$ *dari matriks M yang dapat ditulis dalam bentuk susunan Riordan* $\boldsymbol{C_i(x)} = \boldsymbol{g(x)[f(x)]^i}$, $\boldsymbol{g(x), f(x)} \in \mathbb{C}[x]$ *masing masing adalah suatu bentuk deret pangkat formal dengan bentuk*

$$g(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + \cdots$$

$$f(x) = x + f_2x^2 + f_3x^3 + \cdots$$

Matriks M yang demikian disebut matriks Riordan yang ditulis dengan $M = (g(x), f(x))$.

Sesuai dengan definisi tersebut, secara sederhana akan terlihat bahwa matriks Riordan akan berupa sebuah matriks segitiga bawah tak hingga dengan indeks baris dan kolom yang dimulai dari nol. Perhatikan contoh berikut,

Contoh 1:

Matriks $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$, matriks dari segitiga Pascal. Dari matriks di samping akan terlihat bahwa kolom ke-i dari matriks P memiliki bentuk deret pangkat formal $P_i(x) = \sum_{j\geq i} \binom{j}{i} x^j, i \geq 0$. Dengan menggunakan teorema umum binomial akan terlihat $P_i(x) = \frac{1}{1-x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^i$. Gunakan $g(x) = \frac{1}{1-x}$ dan $f(x) = \frac{x}{1-x}$, akan diperoleh $P = (g(x), f(x))$ yang merupakan sebuah matriks Riordan.

Lemma 1. *Misalkan M adalah suatu matriks Riordan dengan* $M = \big(g(x), f(x)\big)$ *dan* $a(x)$ *adalah suatu deret pangkat formal dari suatu vektor kolom* a *dengan entri-entri* $a_0, a_1, a_2, \ldots$. *Maka perkalian matriks M dengan a dari arah kanan akan menghasilkan* $g(x)a(f(x))$, *denga* $a\big(f(x)\big) = a(x) \circ f(x)$ *suatu komposisi fungsi.*

Bukti: Kolom-kolom dalam matriks M dapat dinyatakan sebagai $C_i(x) = g(x)[f(x)]^i, i \geq 0$ sehingga dapat ditulis $M = [C_0(x) \quad C_1(x) \quad C_2(x) \quad C_3(x) \quad \ldots]$.

Perhatikan bahwa

$$Ma(x) = [C_0(x) \quad C_1(x) \quad C_2(x) \quad \cdots \quad \cdots] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= a_0C_0(x) + a_1C_1(x) + a_2C_2(x) + \cdots$$

$$= a_0g(x) + a_1g(x)f(x) + a_2g(x)[f(x)]^2 + \cdots$$

$$= g(x)(a_0 + a_1f(x) + a_2[f(x)]^2 + \cdots\ )$$

$$= g(x)a\big(f(x)\big) \qquad \blacksquare$$

Lemma 2. *Misalkan* $A = (g(x), f(x))$ *dan* $B = (h(x), l(x))$ *adalah dua matriks Riordan. Hasil kali matriks A dengan B dari kanan akan menghasilkan matriks Riordan* $AB = \Big(g(x)h\big(f(x)\big), l\big(f(x)\big)\Big)$.

Bukti: Misalkan kolom-kolom dari mariks A ditulis dengan $A_i(x) = g(x)[f(x)]^i, i \geq 0$, dan kolom-kolom dari matriks B ditulis dengan $B_i(x) = \sum_{n\geq 0} b_{ni}\, x^n$. Dengan demikian dengan mudah kita peroleh bentuk $B_0(x) = b_{00} + b_{10}\, x + b_{20}\, x^2 + \cdots$, $B_1(x) = b_{01} + b_{11}\, x + b_{21}\, x^2 + \cdots$, dan seterusnya sampai tak hingga.

Misalkan $[AB]_i, i \geq 0$, adalah kolom-kolom dari hasil kali matriks AB, dengan menggunakan Lemma 1. akan diperoleh penjabaran berikut:

Untuk $i = 0$

$$[AB]_0 = b_{00}A_0(x) + b_{10}\, A_1(x) + b_{20}\, A_2(x) + \cdots$$
$$= g(x)B_0\big(f(x)\big)$$
$$= g(x)h\big(f(x)\big)\big[l\big(f(x)\big)\big]^0$$

Untuk $i = 1$

$$[AB]_1 = b_{01}A_0(x) + b_{11}A_1(x) + b_{21}A_2(x) + \cdots$$
$$= g(x)B_1(f(x))$$
$$= g(x)h(f(x))[l(f(x))]^1$$

Perhatikan bahwa dalam hal ini $b_{01} = 0$, karena B matriks Riordan, namun tidak mengubah makna apabila tetap dituliskan sebagai b_{01}.

Untuk $i = 2$

$$[AB]_2 = b_{02}A_0(x) + b_{12}A_1(x) + b_{22}A_2(x) + \cdots$$
$$= g(x)B_2(f(x))$$
$$= g(x)h(f(x))[l(f(x))]^2$$

Perhatikan bahwa dalam hal ini $b_{02} = b_{12} = 0$, karena B matriks Riordan, namun tidak mengubah makna apabila tetap dituliskan sebagai b_{02} dan b_{12}. Dengan melakukan pengulangan seterusnya untuk $i > 2$, akan diperoleh bentuk perumumam sebagai $[AB]_i = g(x)h(f(x))[l(f(x))]^i$ yang sesuai dengan Definisi 1. Sehingga AB merupakan matriks Riordan yang ditulis sebagai $AB = \left(g(x)h(f(x)), l(f(x))\right)$. ■

Lemma 3. *Jika A, B, dan C adalah tiga matriks Riordan, maka perkalian matriksnya akan berlaku sifat asosiatif.*

Bukti: Misalkan matriks Riordan $A = \left(g(x), f(x)\right), B = (h(x), l(x))$ dan $C = (k(x), m(x))$. Dengan menggunakan Lemma 2. diperoleh

$$(AB)C = \left(g(x)h(f(x)), l(f(x))\right)\left(k(x), m(x)\right)$$
$$= \left(g(x)\, h(f(x))k\left(l(f(x))\right), m(l(f(x)))\right)$$

dan

$$A(BC) = \left(g(x), f(x)\right)\left(h(x)k(l(x)), m(l(x))\right)$$
$$= \left(g(x)\, h(f(x))k\left(l(f(x))\right), m(l(f(x)))\right)$$

Dengan demikian $(AB)C = A(BC)$, asosiatif ■

Lemma 4. *Terdapat matriks Riordan $I = (1, x)$ sedemikian hingga untuk sebarang matriks Riordan A berlaku $AI = IA = A$.*

Bukti: Ambil sebarang matriks Riordan $A = (g(x), f(x))$, misalkan pula I ditulis sebagai $I = (h(x), l(x))$, artinya $h(x) = 1$, $l(x) = x$ Dengan menggunakan Lemma 2. akan diperoleh

$$AI = \left(g(x)h(f(x)), l(f(x))\right) = \left(g(x), f(x)\right)$$
$$= A$$
$$IA = \left(h(x)g(l(x)), f(l(x))\right) = \left(g(x), f(x)\right)$$
$$= A \quad ■$$

Lemma 5. *Jika $A = (g(x), f(x))$ adalah sebarang matriks Riordan dan $I = (1, x)$, maka akan terdapat dengan tunggal matriks Riordan $B = (\frac{1}{g(f^{-1}(x))}, f^{-1}(x))$ yang memenuhi $AB = BA = I$, dengan $f^{-1}(x)$ adalah invers komposisi dari fungsi $f(x)$.*

Bukti: Sebelum masuk ke dalam bukti utama, akan terlebih dahulu dijabarkan fungsi komposisi dari deret pangkat formal yang akan membantu dalam menurunkan bukti. Untuk lebih jauh melihat mengenai komposisi deret pangkat formal dapat merujuk pada Krunchinin *et.al.* (2018). Diberikan deret pangkat formal $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$ dan $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, dengan $a_n, b_n \in \mathbb{C}$. Fungsi komposisi $g(x) \circ f(x) = g(f(x))$ dinyatakan dengan

$$g(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (f(x))^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

dimana $c_n = \sum_{k \in \mathbb{N}, |j|=n} b_k\, a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} \ldots a_{j_k}$, dengan $j \in \mathbb{N}_+^k$ dan $|j| = j_1 + j_2 + \cdots + j_k = n$. Koefisien ini secara eksplisit diberikan oleh formula Faa di Bruno. Komposisi ini valid dengan syarat seperti deret pangkat yang diberikan, yaitu $f(x)$ tidak memiliki suku konstan (Krunchinin *et.al.*, 2018). Dengan pendefinisian deret pangkat formal $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ dan $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ yang demikian mudah untuk menerapkan teorema inversi Lagrange yang menjamin adanya invers komposisi yang tunggal. Bukti mengenai teorema inversi Langrange dapat dirujuk pada Merlini *et.al.* (2006. Sekarang, karena A adalah matriks Riordan maka fungsi $g(x), f(x) \in \mathbb{C}[x]$ yang sesuai definisi memiliki bentuk deret pangkat formal seperti,

$$g(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots$$
$$f(x) = x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \cdots$$

Bentuk deret pangkat formal tersebut serupa dengan aturan komposisi yang diberikan oleh formul Faa di Bruno, sehingga dengan menggunakan teorema inversi Lagrange, apabila diketahui fungsi pengali $f(x)$ dari sebuah matriks Riodan, maka dapat ditemukan dengan tunggal invers komposisinya, sebut saja dengan $f^{-1}(x)$. Karena invers komposisinya ada dan tunggal, maka dapat dibentuk suatu matriks Riordan dengan bentuk $B = (\frac{1}{g(f^{-1}(x))}, f^{-1}(x))$ yang tunggal. Perhatikan bahwa,

$$AB = (g(x), f(x))\left(\frac{1}{g(f^{-1}(x))}, f^{-1}(x)\right)$$

$$= \left(g(x)\frac{1}{g\left(f^{-1}(f(x))\right)}, f^{-1}(f(x))\right)$$

$$= (1, x) = I$$

dan untuk BA berlaku,

$$BA = \left(\frac{1}{g(f^{-1}(x))}, f^{-1}(x)\right)(g(x), f(x))$$

$$= \left(\frac{1}{g(f^{-1}(x))} g(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(x))\right)$$

$$= (1, x) = I \qquad \blacksquare$$

Dalam hal ini B disebut sebagai invers perkalian dari matriks Riordan A.

Definisi 2. (Jean-Louis *et.al.*, 2013) *Dua matriks Riordan A dan B dikatakan serupa apabila terdapat matriks Riordan P sedemikian hingga* $A = P^{-1}BP$

Contoh 2: Untuk dapat melihat contoh matriks Riordan A dan B yang memiliki keserupaan matriks dapat lebih jauh melihat pada Jean-Louis *et.al.* (2013)

Definisi 3. *Misalkan A matriks Riordan, perpangkatan dengan* $k > 0$ *dinyatakan dengan* $A^k = AAA \dots . A$ *sebanyak k kali di bawah operasi perkalian matriks, untuk* $A^0 = I$.

Lemma 6. *Jika matriks Riordan A dan matriks Riordan B serupa, maka matriks Riordan* A^k *dan* B^k *juga serupa untuk sebarang* $k \geq 0$.

Bukti: Matriks Riordan A dan B serupa, maka sesuai definisi akan ada matriks Riordan P sedemikian hingga berlaku $A = P^{-1}BP$. Ambil $k = 0$, dengan demikian diperoleh $A^0 = I$ sehingga jelas A^0 serupa dengan B^0.

Ambil sebarang $k > 0$, perhatikan bahwa $A^k = P^{-1}BPP^{-1}BPP^{-1}BP \dots \dots P^{-1}BP$ sebanyak k, karena berlaku sifat asosiatif maka akan berlaku $A^k = P^{-1}B^kP$. $\blacksquare$

Sekarang lemma yang telah disusun cukup untuk menunjukkan adanya suatu grup yang dibangun oleh himpunan seluruh matriks Riordan. Dengan menggunakan Lemma 2. sampai dengan Lemma 5. dapat diturunkan teorema berikut yang berkaitan dengan grup Riordan.

Teorema 1. *Misalkan R adalah himpunan semua matriks Riordan atas gelanggang bilangan kompleks* $\mathbb{C}$. *R dengan operasi perkalian matriks membentuk suatu grup yang tidak komutatif.*

Bukti: Contoh 1. matriks yang dibangun dari segitiga Pascal merupakan sebuah matriks Riordan, sehingga $R \neq \emptyset$. Lemma 2. menunjukkan bahwa himpunan semua matriks Riordan tertutup dalam operasi perkalian matriks. Lemma 3. menunjukkan bahwa berlakunya sifat asosiatif dalam himpunan R. Lemma 4. menunjukkan bahwa adanya elemen identitas untuk sebarang anggota himpunan matriks Riordan. Lemma 5. menunjukkan bahwa untuk setiap matriks Riordan selalu terdapat matriks Riordan lain yang merupakan inversnya di bawah operasi perkalian matriks. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa perkalian matriks Riordan tidak komutatif. Misalkan $A = (g(x), f(x))$ dan $B = (h(x), l(x))$ adalah dua matriks Riordan, dengan menggunakan Lemma 2. dengan mudah akan diperoleh $AB = \left(g(x)h(f(x)), l(f(x))\right)$ sedangkan $BA = \left(h(x)g(l(x)), f(l(x))\right)$. Jelas bahwa $AB \neq BA$ untuk sebarang fungsi pembangkit karena mengikuti sifat komposisi fungsi yang tidak komutatif. $\blacksquare$

Lemma 7. *Suatu himpunan semua matriks Riordan yang memiliki bentuk pasangan* $(g(x), x)$ *untuk sebarang fungsi pembangkit* $g(x)$ *adalah suatu subgrup dari grup Riordan R.*

Bukti: Misalkan S adalah himpunan semua matriks Riordan dengan bentuk $(g(x), x)$ untuk sebarang fungsi pembangkit $g(x)$ dengan ini $S \subset R$. Jelas bahwa $s \neq \emptyset$, karena $I \in S$. Ambil sebarang matriks Riordan $A, B \in S$ dengan $A = (g_1(x), x)$ dan $B = (g_2(x), x)$ perhatikan bahwa hasil kali $AB = (g_1(x)g_2(x), x)$, karena hasil kali deret pangkat formal juga merupakan deret pangkat formal dengan $g_1(x)g_2(x)$ sebagai fungsi pembangkitnya maka $AB \in S$. Sifat asosiatif mengikuti karena $S \subset R$. Untuk membuktikan seluruh anggota S punya invers, ambil sebarang $(g(x), x) \in S$, maka $g(x)$ adalah suatu fungsi pembangkit dari suatu deret formal matriks Riordan, dan sudah ditunjukkan bahwa setiap matriks Riordan memiliki invers yang berupa matris Riordan pula, dengan demikian $\frac{1}{g(x)}$ adalah suatu fungsi pembangkit. Ambil matriks Riordan $\left(\frac{1}{g(x)}, x\right) \in S$, perhatikan bahwa $(g(x), x)\left(\frac{1}{g(x)}, x\right) = (1, x) = I$ dan $\left(\frac{1}{g(x)}, x\right)(g(x), x) = (1, x) = I$, sehingga setiap sebarang matriks Riordan anggota S selalu punya invers di S. Sehingga S subgrup dari R. ■

Subgrup yang berbentuk seperti pada Lemma 7. secara umum disebut sebagai subgrup Appell. Akan diturunkan sebuah teorema dari subgrup Appell ini dalam teorema berikut:

Teorema 2. *Subgrup Appell merupakan sebuah subgrup normal dari grup Riordan.*

Bukti: Untuk menunjukkan bahwa subgrup Appell adalah normal, untuk sebarang matriks Riordan $r \in R$ dan untuk sebarang $s \in S$ haruslah berlaku $r^{-1}sr \in S$

Ambil sebarang $r = (g(x), f(x)) \in R$, maka akan ada $r^{-1} = (\frac{1}{g(f^{-1}(x))}, f^{-1}(x)) \in R$, karena R grup. Ambil sebarang $s = (h(x), x) \in S$. Perhatikan bahwa,

$$
\begin{aligned}
&r^{-1}sr \\
&= \left(\frac{1}{g\left(f^{-1}(x)\right)}, f^{-1}(x)\right)(h(x), x)\big(g(x), f(x)\big) \\
&= \left(\frac{1}{g(f^{-1}(x))}\, h\big(f^{-1}(x)\big), f^{-1}(x)\right)(g(x), f(x)) \\
&= \left(\frac{1}{g(f^{-1}(x))}\, h\big(f^{-1}(x)\big)g(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(x))\right) \\
&= (h(f^{-1}(x)), x)
\end{aligned}
$$

Karena $(h(f^{-1}(x)), x) \in S$, maka S adalah subgrup normal dari grup Riordan R. ■

Lemma 8. *Jika subgrup S adalah subgrup Appell, maka untuk setiap* $r \in R$ *akan berlaku* $Sr = rS$.

Bukti: Ambil sebarang $r = (g(x), f(x)) \in R$, dan ambil sebarang $s = (h(x), x) \in S$. Perhatikan bahwa,

$$
\begin{aligned}
sr &= (h(x), x)(g(x), f(x)) \\
&= (h(x)g(x), f(x))
\end{aligned}
$$

dan untuk rs berlaku

$$
\begin{aligned}
rs &= (g(x), f(x))(h(x), x) \\
&= (g(x)h(x), f(x)) \\
&= (h(x)g(x), f(x))
\end{aligned}
$$

Karena berlaku untuk sebarang $r \in R$ dan $s \in S$ maka terbukti bahwa berlaku $Sr = rS$. ■

Lemma 9. *Subgrup Appell komutatif dengan setiap himpunan bagian tak kosong dari grup Riordan R.*

Bukti: Dari Lemma 8. telah diketahui bahwa jika S subgrup Appell maka untuk setiap $r \in R$ akan berlaku $Sr = rS$. Misalkan M adalah sebarang himpunan bagian tak kosong dari R, $M \subseteq R$, dengan demikian akan berlaku pula $SM = MS$. ■

Lemma 8 dan Lemma 9 akan digunakan untuk membangun suatu grup baru yang secara umum dalam struktur aljabar disebut sebagai grup faktor, yang disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 3. *Jika S adalah subgrup Appell dari grup Riordan R, maka* $R/_S = \{Sr | r \in R\}$ *adalah suatu grup dengan operasi yang sama dengan R, grup ini dinamakan grup faktor.*

Bukti: Jelas bahwa $I = (1, x) \in S$ dan $I = (1, x) \in R$ sehingga $II = I \in R/_S$, dengan demikian $R/_S \neq \emptyset$. Sifat asosiatif dari $R/_S$ akan dengan sendirinya menurun dari R dan juga S. Akan ditunjukkan bahwa R/S memiliki identitas, dari pendefinisian himpunan $R/_S$ jelas bahwa $S \in R/_S$, ambil sebarang $a \in R/_S$, maka $a = Sr$ untuk suatu $r \in R$, perhatikan bahwa $aS = SrS = SSr = Sr = a$, $Sa = SSr = Sr = a$, dengan semikian S adalah elemen identitas dari $R/_S$. Terakhir akan ditunjukkan bahwa setiap elemen di $R/_S$ memiliki invers, ambil sebarang $a \in R/_S$, maka $a = Sr$ untuk suatu $r \in R$, karena R suatu grup maka akan ada $r^{-1} \in R$, bentuk himpunan $b = Sr^{-1} \in {}^{R}/_{S}$, perhatikan bahwa $ab = SrSr^{-1} = SSrr^{-1} = S$ dan $ba = Sr^{-1}Sr = SSr^{-1}r = S$, karena a adalah sebarang anggota di ${}^{R}/_{S}$ maka setiap anggota ${}^{R}/_{S}$ memiliki invers terhadap operasi perkalian matriks. ■

Grup ${}^{R}/_{S}$ disebut sebagai grup faktor yang dibangun oleh subgrup Appell dari grup Riordan.

PENUTUP

Deret pangkat formal menjadi dasar pembentukan suatu susunan Riordan yang dalam pengembangannya menjadi suatu bentuk matriks segitiga bawah tak hingga yang dikenal sebagai matriks Riordan. Himpunan seluruh matriks Riordan telah dibuktikan pada makalah ini membentuk suatu grup dengan operasi perkalian matriks. Sebuah subgrup yang dikenal sebagai subgrup Appell telah dibuktikan juga merupakan sebuah subgrub normal melalui bantuan lemma-lemma yang dibuat dan dibuktikan. Pada bagian akhir ditunjukkan pula bahwa dapat dibentuk suatu grup faktor yang dibagun oleh subgrup Appell dari grup Riordan. Untuk penelitian lebih lanjut, dapat memperkaya dengan berbagai macam bentuk subgrup lain untuk dikaji karakteristiknya, dan juga dapat memperluas matriks Riordan melalui pendefinisian penambahan fungsi pembangkit pengalinya menjadi lebih dari dua.

DAFTAR PUSTAKA

Cheon, G.S., Cohen, M.M., Pantelidis, N., *The Linear Algebra of Riordan Matrices*, *arXiv:2017.14394*, Cornell University, July 2021.

Cheon, G.S., Jin, S.T., *Structural Properties of Riordan matrices and Extending the Matrices*,Linear Algebra and its Applications, vol. 435, Issue 8, pages 2019-2032, 2011.

Davenport, D.E, Shapiro, L.W., Woodson, L.C., *The Double Riordan Group*, The Electronic Journal of Combinatorics, Vol. 18, No. 2, 2012.

Deutsch, E., Ferrari, L., Rinaldi, S., *Production Matrices and Riordan Arrays*, Annals of Combinatorics, Vol. 13, pp. 65-85, 2009.

Jean-Louis, C., Nkwanta, A.,*Some Algebraic Structure of the Riordan Group*, Linear Algebra and its Applications, Vol. 438, Issue 5, Pages 2018-2035, ISSN 0024-3795, 2013.

Kruchinin, D.V., Shablya,Y.V.,Kruchinin, V.V., Shelupanov, A.A., *Properties of a Composition of Exponential and Ordinary Generating Functions*, Communications in Mathematics and Applications, Vol.9, No. 4, pp. 705-711, 2018.

Merlini, D., Sprugnoli, R., Verri, M.C., *Lagrange Inversion: When and How*, Acta Appl Math Vol. 94, pp. 233–249, 2006.

Niven, I., *Formal Power Series*, The American Mathematical Monthly, Vol. 76, No. 8, pp. 871-889, 1969.

Shapiro, L.W., Getu, S., Woan, W.J., Woodson, L.C., *The Riordan Group*, Discrete Applied Mathematics, Vol. 34, pp. 229-239, 1991.

Sprugnoli, R., *Riordan Arrays and Combinatorial Sums*, Discrete Mathematics, Vol. 122, pp. 267-290, 1994.

Sprugnoli, R., *Riordan Arrays and The Abel-Gould Identity*, Discrete Mathematics, Vol. 142, pp. 213-233, 1995.