UJM 11(1) 2022
UNNES Journal of Mathematics
http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujm

Keberadaan Hasil Kali Langsung dari Ruang Bernorma

Denik Agustito ✉, **Krida Singgih Kuncoro**, **Muhammad Irfan**

Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa, Indonesia
Jl. Batikan UH-3/1043 Yogyakarta, 55167

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Maret 2022
Disetujui Mei 2022
Dipublikasikan Mei 2022

Keywords:
Banach, Norm, Operator, Product

Abstrak

Keberadaan hasil kali langsung tidak selalu ada dalam sebuah kategori. Pada kategori dari ruang vektor bersama dengan transfomarsi linear (operator linear) memiliki hasil kali langsung berhingga maupun tak-hingga; artinya kategori tersebut tertutup di bawah hasil kali langsung berhingga maupun tak-berhingga, tetapi dalam kategori ruang bernorma bersama dengan operator linear terbatasnya tidak memiliki hasil kali langsung tak-berhingga namun hanya memiliki hasil kali langsung berhingga saja; artinya kategori tersebut tertutup di bawah hasil kali langsung berhingga saja dan tidak untuk hasil kali langsung tak-hingga. Sebagai akibat keberadaan hasil kali langsung berhingga dari ruang bernorma adalah $\prod_{i=1}^{n} E_i$ adalah ruang banach jika dan hanya jika $E_1, \dots, E_n$ juga merupakan ruang banach.

Abstract

The existence of a direct product does not always exist in a category. In the category of vector spaces together with linear transformations (linear operators) have a finite or infinite direct product; meaning that the category is closed under either finite or infinite direct product, but in the normed space category together with finite linear operators it does not have infinite direct product but only has finite direct product; it means that the category is closed under finite direct product only and not for infinite direct product. As a result of the existence of a finite direct product of a normed space $\prod_{i=1}^{n} E_i$ *is a banach space if and only if* $E_1, \dots, E_n$ *is also a banach spaces.*

How to cite:

Agustito, D., Kuncoro, K.S. & Irfan, M. (2022). Keberadaan Hasil Kali Langsung dari Ruang Bernorma. *UNNES Journal of Mathematics*, 11(1), 8-15.

© 2022 Universitas Negeri Semarang

✉Alamat korespondensi:
E-mail: agustito@ustjogja.ac.id

p-ISSN 2252-6943
e-ISSN 2460-5859

PENDAHULUAN

Gagasan mengenai hasil kali langsung dari obyek-obyek dalam suatu kategori merupakan hal yang sangat fundamental terutama dalam mengkonstruksi obyek baru dalam kategori tersebut. Seperti contoh, hasil kali langsung dalam kategori grup abelian bersama dengan homomorfismanya merupakan grup abelian juga yang memiliki peranan penting dalam kajian grup berhingga. Kemudian hasil kali langsung dalam kategori modul atas suatu ring bersama dengan pemetaan linearnya juga memiliki peranan penting dalam mengeksplor keberadaan basis dari suatu modul bebas atas suatu ring, mengeksplor segala sifat-sifat terkait kelas dari modul seperti modul proyektif, modul injektif, modul flat dan lain-lain. Konsekuensi keberadaan hasil kali langsung dalam kategori modul atas satu ring mengakibatkan keberadaan hasil kali langsung dalam kategori ruang vektor atas suatu lapangan, khususnya lapangan bilangan real $\mathbb{R}$. Dalam tulisan ini, peneliti tertarik untuk melihat keberadaan hasil kali langsung dari suatu kelas ruang vektor atas lapangan bilangan real $\mathbb{R}$ yaitu ruang bernorma serta akan memberikan beberapa hasilnya jika keberadaan hasil kali langsung dalam kelas dari ruang bernorma itu ada.

Beberapa peneliti mengkonstruksi ruang bernorma baru yaitu dengan memodifikasi norma seperti apa yang dilakukan oleh Barnes, *et al.* (2018). Jika sebuah norma dalam ruang vektor *E* atas lapangan bilangan real $\mathbb{R}$ adalah sebuah pemetaan $\|\ \|_{E} : \boldsymbol{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat berikut:

(N1). $\|\boldsymbol{x}\|_{E} \geq \mathbf{0}$ untuk semua $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$.

(N2). $\|\boldsymbol{x}\|_{E} = \mathbf{0}$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$ dimana $\boldsymbol{\theta}$ elemen nol pada $\boldsymbol{E}$.

(N3). $\|\boldsymbol{\alpha x}\|_{E} = |\boldsymbol{\alpha}|\|\boldsymbol{x}\|$ untuk semua $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ dan $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$.

(N4). $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_{E} \leq \|\boldsymbol{x}\|_{E} + \|\boldsymbol{y}\|_{E}$ untuk semua $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{E}$.

maka mereka memodifikasi gagasan norma di atas menjadi seperti berikut: Jika $\boldsymbol{U}$ adalah ruang vektor atas $[\mathbf{0}, \mathbf{2}] \subset \mathbb{R}$, maka norma hasil kali (*product-norm*) adalah sebuah pemetaan $\|\ \|_{pn} : \boldsymbol{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat berikut:

(PN1). $\|\boldsymbol{x}\|_{pn} \geq \mathbf{0}$ untuk semua $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}$.

(PN2). $\|\boldsymbol{x}\|_{pn} = \mathbf{0}$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$ dimana $\boldsymbol{\theta}$ elemen nol pada *U*.

(PN3). $\|\boldsymbol{\alpha x}\|_{pn} = |\boldsymbol{\alpha}|\|\boldsymbol{x}\|_{pn}$ untuk semua $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}$ dan $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{0}, \mathbf{2}]$.

(PN4). $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_{pn} \leq \|\boldsymbol{x}\|_{pn} + \|\boldsymbol{y}\|_{pn}$ untuk semua $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{U}$.

Dalam *paper* tersebut tidak terlihat mengapa mereka menggunakan kata hasil kali (*product*) untuk mendefinisikan norma $\|\ \|_{pn} : \boldsymbol{E} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Kemudian yang dilakukan Endou et al. (2007) meskipun dalam penelitiannya mengkaji tentang ruang hasil kali dari ruang bernorma real, di sana tidak ada gagasan mengenai norma dari hasil kali dari ruang bernorma real yang diperoleh dari hasil kali (langsung) pada ruang bernorma real. Pada Prugovecki (1971), telah didefinisikan sebuah hasil tambah langsung dari banyaknya terbilang tak-hingga dari ruang hasil kali dalam (yang juga merupakan ruang bernorma) yaitu sebagai berikut: Jika diberikan $\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2}, \dots$ adalah banyaknya terbilang tak-hingga dari ruang hasil kali dalam maka hasil tambah langsung (*direct sum*)nya yang dinotasikan dengan $\bigoplus_k \boldsymbol{E_k} = \{(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots) :\ \boldsymbol{a_k} \in \boldsymbol{E_k}\ \textbf{untuk setiap}\ \boldsymbol{k}\}$ merupakan ruang hasil kali dalam dimana hasil kali dalamnya didefinisikan dengan $\langle(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots)|(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots)\rangle = \sum_k \langle \boldsymbol{a_k} | \boldsymbol{b_k} \rangle$. Kemudian hasil kali langsungpun juga meluas pada katgeori dari ruang bernorma fuzzi yang bisa ditemukan dalam Sabre (2015) dan juga pada ruang norma yang normanya dimodifikasi menjadi Hypo-*q*-Norms yang ditemukan oleh Dragomir (2017). Konstruksi tersebut secara kategorik sebenarnya adalah konstruksi hasil kali (langsung) dari banyaknya terbilang tak-hingga dari ruang hasil kali dalam, namun konstruksi tersebut belum diperiksa apakah memenuhi sifat universal atau tidak dari hasil kali langsung dalam kategori dari ruang hasil kali dalam. Berbeda dengan yang dilakukan oleh peneliti-peneliti tersebut, dalam tulisan ini akan dikonstruksi sebuah norma yang diperoleh dari hasil kali (langsung) dari beberapa ruang bernorma kemudian akan dieksplor segala sifat-sifatnya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dengan mengacu pada Kreyszing (1978) dan Megginson (1998), pengertian ruang bernorma dan operator linear terbatas akan diberikan yaitu sebagai berikut:

Definisi 1.1.
Diberikan E adalah sebuah ruang vektor atas lapangan bilangan real $\mathbb{R}$. Sebuah norma pada E adalah sebuah pemetaan $\| \ \|_E : \boldsymbol{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat berikut:

(N1). $\|\boldsymbol{x}\|_E \geq \boldsymbol{0}$ untuk semua $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$.

(N2). $\|\boldsymbol{x}\|_E = \boldsymbol{0}$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$ dimana $\boldsymbol{\theta}$ elemen nol pada $\boldsymbol{E}$.

(N3). $\|\boldsymbol{\alpha x}\|_E = |\boldsymbol{\alpha}|\|\boldsymbol{x}\|$ untuk semua $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ dan $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$.

(N4). $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_E \leq \|\boldsymbol{x}\|_E + \|\boldsymbol{y}\|_E$ untuk semua $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{E}$.

Pasangan $(\boldsymbol{E}, \| \ \|_E)$ akan dinamakan dengan ruang bernorma.

Contoh 1.2.

(i) Ruang euclidean $\boldsymbol{E^n} = \{\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n}) : \boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n} \in \mathbb{R}\}$ yang merupakan ruang vektor atas lapangan bilangan real $\mathbb{R}$ bersama dengan norma $\| \ \|_{E^n}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\|(\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n})\|_{E^n} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

adalah ruang bernorma.

(ii) Ruang barisan bilangan real $\boldsymbol{\ell^p} = \{\boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{x_n} \rangle_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |\boldsymbol{x_n}|^p < \infty\}$ yang merupakan ruang vektor atas lapangan bilangan real $\mathbb{R}$ bersama dengan norma $\| \ \|_p$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\|\langle \boldsymbol{x_n} \rangle_{n\in\mathbb{N}}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

adalah ruang bernorma.

(iii) Ruang barisan bilangan real yang terbatas yaitu sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\ell^\infty} = \{\boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{x_n} \rangle_{n\in\mathbb{N}} : \exists \boldsymbol{M_x} > \boldsymbol{0}, |\boldsymbol{x_n}| \leq \boldsymbol{M_x} \textbf{ untuk semua } \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}\}$$

yang merupakan ruang vektor atas lapangan bilangan real $\mathbb{R}$ bersama dengan norma $\| \ \|_\infty$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\|\langle \boldsymbol{x_n} \rangle_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \mathbf{sup}_{n\in\mathbb{N}} |\boldsymbol{x_n}|$$

adalah ruang bernorma.

(iv) Ruang fungsi kontinu bernilai real $\boldsymbol{C[a, b]} = \{\boldsymbol{f}: [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \longrightarrow \mathbb{R} : \boldsymbol{f} \textbf{ kontinu}\}$ yang merupakan ruang vektor atas lapangan bilangan real $\mathbb{R}$ bersama dengan norma $\| \ \|_{\max}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\|\boldsymbol{f}\|_{\max} = \mathbf{max}_{x\in[a,b]} |\boldsymbol{f(x)}|$$

adalah ruang bernorma.

Selanjutnya akan diberikan sebuah gagasan kekonvergenan dan barisan cauchy pada ruang bernorma yang mengacu pada Debnath, Mikusinski (1990).

Definisi 1.3. Diberikan $(\boldsymbol{E}, \| \ \|_E)$ adalah ruang bernorma dan $\langle \boldsymbol{x_n} \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ adalah barisan dalam ruang norma tersebut.

(i) Barisan $\langle \boldsymbol{x_n} \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ dikatakan konvergen ke suatu elemen x dalam E jika

$\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \boldsymbol{0} \exists \boldsymbol{N} \in \mathbb{N}$ yang memenuhi sifat $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{N} \Longrightarrow \|\boldsymbol{x_n} - \boldsymbol{x}\|_E < \boldsymbol{\varepsilon}$

(ii) Barisan $\langle \boldsymbol{x_n} \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ dikatakan barisan cauchy jika

$\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \boldsymbol{0} \exists \boldsymbol{N} \in \mathbb{N}$ yang memenuhi sifat $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{N} \Longrightarrow \|\boldsymbol{x_m} - \boldsymbol{x_n}\|_E < \boldsymbol{\varepsilon}$

Definisi 1.4. Ruang bernorma $(\boldsymbol{E}, \| \ \|_E)$ dikatakan ruang banach atau ruang bernorma lengkap jika setiap barisan cauchy di dalam E konvergen ke sebuah di titik dalam E.

Contoh 1.5. Ruang bernorma dalam Contoh 1.2 semuanya adalah ruang banach.

Contoh 1.6. Ruang fungsi kontinu bernilai real $\boldsymbol{C[a, b]} = \{\boldsymbol{f}: [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \longrightarrow \mathbb{R} : \boldsymbol{f} \textbf{ kontinu}\}$ yang merupakan ruang vektor atas lapangan bilangan real $\mathbb{R}$ bersama dengan norma $\| \ \|_{\max}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\|\boldsymbol{f}\| = \left(\int_{a}^{b} \left(\boldsymbol{f(t)}\right)^2 \boldsymbol{dt}\right)^{\frac{1}{2}}$$

adalah ruang bernorma tetapi bukan ruang banach.

Definisi 1.7. Diberikan $(\boldsymbol{E}, \|\ \|_{\boldsymbol{E}})$ dan $(\boldsymbol{F}, \|\ \|_{\boldsymbol{F}})$ adalah dua buah ruang bernorma dan $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{F}$ adalah transformasi linear atau dengan istilah lain yaitu operator linear).

(i) Operator linear $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{F}$ dikatakan terbatas jika

$\exists \boldsymbol{M} > \boldsymbol{0}$ yang sifatnya $\|\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\|_{\boldsymbol{F}} \leq \boldsymbol{M}\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{E}}$ untuk semua $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$

(ii) Operator linear $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{F}$ dikatakan kontinu di $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{E}$ jika

$\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \boldsymbol{0} \exists \boldsymbol{\delta} > \boldsymbol{0}$ yang sifatnya $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}\|_{\boldsymbol{E}} < \boldsymbol{\delta} \Longrightarrow \|\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x_0})\|_{\boldsymbol{F}} < \boldsymbol{\varepsilon}$

Operator linear $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{F}$ dikatakan kontinu jika operator tersebut kontinu di setiap titik pada $\boldsymbol{E}$.

Teorema 1.8. Operator linear $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{F}$ adalah terbatas jika dan hanya jika operator linear tersebut adalah kontinu.

Contoh 1.9. Jika E adalah ruang vektor atas lapangan bilangan real $\mathbb{R}$ dari semua polinomial yang terdefinisi pada interval $[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$ bersama dengan norma yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\|\boldsymbol{p}\|_{\boldsymbol{E}} = \mathbf{max}_{\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]} |\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})|$$

maka pemetaan $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{E}$ yangdidefinisikan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}'(\boldsymbol{x})$$

untuk semua $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ bukan operator linear terbatas.

Selanjutnya akan diberikan pengertian gagasan sebuah kategori bersama dengan gagasan mengenai hasil kali langsung dalam suatu kategori yang merupakan dasar utama dalam tulisan ini untuk mengkonstruksi hasil kali langsung dari ruang bernorma. Gagasan mengenai teori kategori dari hasil kali langsung dalam sebuah kategori akan merujuk pada Hungerford (1974).

Definisi 1.10. Sebuah kategori adalah kelas $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ dari obyek (dan notasikan dengan $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \ldots$) bersama dengan

(i) Sebuah kelas dari himpunan yang saling disjoint yang dinotasikan dengan $\boldsymbol{hom_{\mathcal{C}}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ untuk setiap pasangan obyek $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ dalam $\boldsymbol{\mathcal{C}}$. Sebuah elemen $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{hom_{\mathcal{C}}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ dikatakan dengan morfisma dari A ke B dan biasanya dinotasikan dengan $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{B}$.

(ii) Untuk setiap tripel $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ dalam $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ sebuah fungsi

$$\boldsymbol{hom_{\mathcal{C}}}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) \times \boldsymbol{hom_{\mathcal{C}}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \longrightarrow \boldsymbol{hom_{\mathcal{C}}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C})$$

fungsi yang memetakan $(\boldsymbol{g}: \boldsymbol{B} \longrightarrow \boldsymbol{C}, \boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{B}) \longmapsto \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{C})$ dan memenuhi dua aksioma berikut:

(I). Asosiativitas: Jika $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{B}, \boldsymbol{g}: \boldsymbol{B} \longrightarrow \boldsymbol{C}, \boldsymbol{h}: \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}$ adalah morfisma dari $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ maka berlaku $\boldsymbol{h} \circ (\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}) = (\boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{g}) \circ \boldsymbol{f}$.

(II). Identitas. Untuk setiap obyek $\boldsymbol{B}$ dalam $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ terdapat sebuah morfisma $\boldsymbol{1_B}: \boldsymbol{B} \longrightarrow \boldsymbol{B}$ yang memenuhi sifat untuk setiap morfisma $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{B}, \boldsymbol{g}: \boldsymbol{B} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ berlaku $\boldsymbol{1_B} \circ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}$ dan $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{1_B} = \boldsymbol{g}$.

Contoh 1.11. Kelas dari semua ruang vektor atas lapangan bilangan real $\mathbb{R}$ bersama dengan transformasi linear (operator linear) membentuk sebuah kategori dan akan dinamakan dengan kategori ruang vektor serta dinotasikan dengan $\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$.

Contoh 1.12. Kelas dari semua ruang bernorma bersama dengan operator linear terbatas membentuk sebuah kategori dan akan dinamakan dengan kategori ruang bernorma serta dinotasikan dengan $\mathbf{Norm}_{\mathbb{R}}$. Operator linear terbatas di antara ruang bernorma bisa dilihat Blackadar 2006 dan Kolmogorov (1997).

Contoh 1.13. Kelas dari semua ruang banach bersama dengan operator linear terbatas membentuk sebuah kategori dan akan dinamakan dengan kategori ruang banach serta dinotasikan dengan $\mathbf{Ban}_{\mathbb{R}}$ (Lyubinin, 2017; Barr, 1976).

Selanjutnya akan diberikan sebuah gagasan mengenai keberadaan hasil kali langsung dalam sebuah kategori $\boldsymbol{C}$ melalui sebuah sifat dan katakan itu sebagai sifat universal dari hasil kali langsung.

Definisi 1.14. Diberikan sebuah kategori $\boldsymbol{C}$ dan $\{\boldsymbol{A_i} : \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}\}$ adalah keluarga dari obyek dalam kategori $\boldsymbol{C}$. Sebuah hasil kali langsung dari keluarga $\{\boldsymbol{A_i} : \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}\}$ adalah sebuah obyek P dalam kategori $\boldsymbol{C}$ bersama dengan keluarga morfisma $\{\boldsymbol{\pi_i}: \boldsymbol{P} \longrightarrow \boldsymbol{A_i} : \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}\}$ yang memenuhi sifat jika diberikan sembarang obyke B dalam kategori $\boldsymbol{C}$ dan sembarang keluarga dari morfisma $\{\boldsymbol{\varphi_i}: \boldsymbol{B} \longrightarrow \boldsymbol{A_i} : \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}\}$ maka terdapat secara tunggal morfisma $\boldsymbol{\varphi}: \boldsymbol{B} \longrightarrow \boldsymbol{P}$ yang memenuhi sifat $\boldsymbol{\pi_i} \circ \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi_i}$ untuk semua $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}$.

Jika diberikan sebuah keluarga berindeks dari himpunan tak-kosong yaitu $\{\boldsymbol{A_i} : \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}\}$ maka hasil kali langsung dari keluarga berindeks himpunan tersebut adalah sebagai berikut:

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ f: I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i : f(i) \in A_i \text{ untuk setiap } i \in I \right\}$$

Jika $\boldsymbol{I} = \{\boldsymbol{1}, \dots, \boldsymbol{n}\}$ maka hasil kali langsung (eksternal) dari $\{\boldsymbol{A_i} : \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}\}$ bisa dipandang sebagai himpunan $\boldsymbol{A_1} \times \dots \times \boldsymbol{A_n} = \{(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_n}) : \boldsymbol{a_i} \in \boldsymbol{A_i}, \boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \dots, \boldsymbol{n}\}$. Jika $\boldsymbol{I} = \mathbb{N}$ maka hasil kali langsung dari $\{\boldsymbol{A_i} : \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}\}$ bisa dipandang sebagai himpunan $\prod_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{A_i} = \{(\boldsymbol{a})_{i=1}^{\infty} = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots) : \boldsymbol{a_i} \in \boldsymbol{A_i}, \boldsymbol{i} \in \mathbb{N}\}$.

Teorema 1.15. Jika diberikan $\{(\boldsymbol{E_i}, \| \ \|_{\boldsymbol{E_i}})\}_{\boldsymbol{i}\in\boldsymbol{I}}$ adalah keluarga berindeks dari ruang bernorma atas lapangan bilangan real $\mathbb{R}$, maka himpunan yang didefinisikan berikut:

$$\prod_{i\in I} \boldsymbol{E_i} = \left\{ \boldsymbol{f}: \boldsymbol{I} \longrightarrow \bigcup_{i\in I} \boldsymbol{E_i} : \boldsymbol{f(i)} \in \boldsymbol{E_i} \textbf{ untuk setiap } \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}, \mathbf{sup}_{\boldsymbol{i}\in\boldsymbol{I}} \|\boldsymbol{f(i)}\|_{\boldsymbol{E_i}} < \infty \right\}$$

juga merupakan ruang bernorma dengan normanya didefinisikan sebagai berikut:

$$\|\boldsymbol{f}\|_\infty = \mathbf{sup}_{\boldsymbol{i}\in\boldsymbol{I}} \|\boldsymbol{f(i)}\|_{\boldsymbol{E_i}}$$

untuk semua $f \in \prod_{i\in I} E_i$.

Bukti:

Karena $\{(E_i, \| \ \|_{E_i})\}_{i\in I}$ merupakan ruang vektor atas lapangan bilangan real $\mathbb{R}$, jelas himpunan $\prod_{i\in I} E_i$ juga merupakan ruang vektor atas lapangan bilangan real $\mathbb{R}$ juga.

(N1). Ambil sembarang $f \in \prod_{i\in I} E_i$.
Jelas $\|f\|_\infty = \sup_{i\in I} \|f(i)\|_{E_i} \geq 0$.
Jadi $\|f\|_\infty \geq 0$ untuk semua $f \in \prod_{i\in I} E_i$.

(N2). Jelas $\|f\|_\infty = \sup_{i\in I} \|f(i)\|_{E_i} = 0$ jika dan hanya jika $\|f(i)\|_{E_i} = 0$ untuk semua $i \in I$.
Jelas $\|f(i)\|_{E_i} = 0$ untuk semua $i \in I$ jika dan hanya jika $f(i) = 0$ untuk semua $i \in I$.
Jelas $f(i) = 0$ untuk semua $i \in I$ jika dan hanya jika $f = \theta$ dimana $\theta(i) = 0$ untuk semua $i \in I$.
Jadi $\|f\|_\infty = 0$ jika dan hanya jika $f = \theta$ dimana $\theta(i) = 0$ untuk semua $i \in I$.

(N3). Ambil sembarang $f \in \prod_{i\in I} E_i$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.
Jelas $\|\alpha f\|_\infty = \sup_{i\in I} \|\alpha f(i)\|_{E_i} = |\alpha| \sup_{i\in I} \|f(i)\|_{E_i} = |\alpha| \|f\|_\infty$.
Jadi $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f\|_\infty$ untuk semua $f \in \prod_{i\in I} E_i$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

(N4). Ambil sembarang $f, g \in \prod_{i\in I} E_i$.
Jelas $\|f + g\|_\infty = \sup_{i\in I} \|f(i) + g(i)\|_{E_i} \leq \sup_{i\in I} \|f(i)\|_{E_i} + \sup_{i\in I} \|g(i)\|_{E_i} = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
Jadi $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ untuk semua $f, g \in \prod_{i\in I} E_i$.

Dari (N1), (N2), (N3) dan (N4) diperoleh $\prod_{i\in I} E_i$ adalah ruang bernorma.

Contoh 1.16. Jika $I = \mathbb{N}$ dan $E_i = \mathbb{R}$ untuk semua $i \in I$ maka $\prod_{i\in I} E_i = \mathscr{s}^\infty$ dimana $\mathscr{s}^\infty$ bukan ruang bernorma, karena terdapat elemen dalam $\mathscr{s}^\infty$ yaitu $x = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ dimana $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |n| \nless \infty$.

Teorema 1.17. Jika diberikan keluarga berindeks dari ruang bernorma atas lapangan bilangan real $\mathbb{R}$ yaitu $\{(E_i, \| \ \|_{E_i})\}_{i\in I}$ maka pemetaan $\pi_k: \prod_{i\in I} E_i \longrightarrow E_k$ yang didefinisikan dengan $\pi_k(f) = f(k)$ untuk semua $k \in I$ adalah operator linear terbatas.

Bukti:

Secara aljabarik jelas pemetaan $\pi_k: \prod_{i\in I} E_i \longrightarrow E_k$ yang didefinisikan dengan $\pi_k(f) = f(k)$ adalah operator linear di antara ruang vektor yang bersifat surjektif untuk semua $k \in I$.
Selanjutnya dibuktikan bahwa operator linear π_k adalah terbatas.
Ambil sembarang $f \in \prod_{i\in I} E_i$.

Jelas $\pi_k(f) = f(k)$ untuk semua $k \in I$.
Pilih $M = 1 > 0$.
Jelas $\|\pi_k(f)\|_{E_k} = \|f(k)\|_{E_k} \leq 1.\sup_{i\in I}\|f(i)\|_{E_i} = M\sup_{i\in I}\|f(i)\|_{E_i} = M\|f\|_\infty$ untuk semua $k \in I$.
Jadi terdapat $M > 0$ yang sifatnya $\|\pi_k(f)\|_{E_k} \leq M\|f\|_\infty$ untuk semua $f \in \prod_{i\in I} E_i$ dan $k \in I$.
Jadi π_k adalah operator linear terbatas yang bersifat surjektif untuk semua $k \in I$.

Teorema 1.18. (Sifat Universal dari $\prod_{i=1}^n E_i$). Jika diberikan keluarga berhingga dari ruang bernorma atas lapangan bilangan real $\mathbb{R}$ yaitu $\{(E_1, \| \ \|_{E_1}), \dots, (E_n, \| \ \|_{E_n})\}$ dan diberikan sembarang keluarga berhingga dari operator linear terbatas yaitu $\{T_1 : F \longrightarrow E_1, \dots, T_n : F \longrightarrow E_n\}$ maka terdapat secara tunggal operator linear terbatas $T : F \longrightarrow \prod_{i=1}^n E_i$ yang sifatnya $\pi_i T = T_i$ untuk semua $i \in \{1, \dots, n\}$.

Bukti:
Dengan mengacu pada Hungerford (1974), ketika memandang ruang bernorma sebagai ruang vektor, maka jelas terdapat secara tunggal operator linear $T : F \longrightarrow \prod_{i=1}^n E_i$ yang sifatnya $\pi_i T = T_i$ untuk semua $i \in \{1, \dots, n\}$ yang didefinisikan dengan $T(x) = f_x$ dimana $f_x(i) = T_i(x)$ untuk semua $x \in F$.
Selanjutnya dibuktikan bahwa operator linear $T : F \longrightarrow \prod_{i=1}^n E_i$ yang didefinisikan dengan $T(x) = f_x$ dimana $f_x(i) = T_i(x)$ untuk semua $x \in F$ adalah terbatas.
Ambil sembarang $x \in F$.
Jelas $T(x) = f_x$ dimana $f_x(i) = T_i(x)$.

$$\begin{aligned}\|T(x)\|_\infty &= \|f_x\|_\infty \\ &= \sup_{i=1}^n \|f_x(i)\|_{E_i} \\ &= \sup_{i=1}^n \|T_i(x)\|_{E_i} \\ &\leq \sup_{i=1}^n M_i\|x\|_F \quad (T_i \text{ terbatas karena } \exists M_i > 0, \|T_i(x)\|_{E_i} \leq M_i\|x\|_F, \forall x \in F) \\ &= \|x\|_F \sup_{i=1}^n M_i \\ &= M\|x\|_F \quad (\text{pilih } M = \sup_{i=1}^n M_i)\end{aligned}$$

Jadi $\exists M > 0, \|T(x)\|_\infty \leq M\|x\|_F$ untuk semua $x \in F$.
Jadi T adalah operator linear terbatas.

Remark 1.19. Secara aljabarik bahwa kategori ruang vektor bersama dengan operator linearnya tertutup terhadap hasil kali langsung (baik berhingga maupun tak-berhingga) tetapi dari Contoh 1.16 menegaskan bahwa hasil kali langsung (dalam pengertian Teorema 1.15) tak-hingga dari ruang bernorma bukanlah sebuah ruang bernorma, akibatnya dari Teorema 1.18 jelas mengatakan bahwa kategori dari ruang bernorma bersama dengan operator linear terbatasnya tertutup di bawah hasil kali langsung berhingga.

Teorema 1.20. Jika diberikan keluarga berhingga dari ruang bernorma atas lapangan bilangan real $\mathbb{R}$ yaitu $\{(E_1, \| \ \|_{E_1}), \dots, (E_n, \| \ \|_{E_n})\}$ maka E_i adalah ruang banach untuk semua $i \in \{1, \dots, n\}$ jika dan hanya jika $\prod_{i=1}^n E_i$ adalah ruang banach.

Bukti:
$\Longrightarrow$) Diketahui E_i adalah ruang banach untuk semua $i \in \{1, \dots, n\}$.
Dibuktikan $\prod_{i=1}^n E_i$ adalah ruang banach.
Ambil sembarang barisan cauchy $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ dalam $\prod_{i=1}^n E_i$.
Jelas $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ yang sifatnya $m, n \geq N \Rightarrow \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$
$\Rightarrow \sup_{i=1}^n \|(f_m - f_n)(i)\|_{E_i} < \varepsilon$
$\Rightarrow \|(f_m - f_n)(i)\|_{E_i} \leq \sup_{i=1}^n \|(f_m - f_n)(i)\|_{E_i} < \varepsilon$ untuk semua $i \in \{1, \dots, n\}$.
$\Rightarrow \|(f_m - f_n)(i)\|_{E_i} < \varepsilon$ untuk semua $i \in \{1, \dots, n\}$.
$\Rightarrow \left\|\left(f_m(i) - f_n(i)\right)\right\|_{E_i} < \varepsilon$ untuk semua $i \in \{1, \dots, n\}$
Jelas $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ yang sifatnya $m, n \geq N \Rightarrow \left\|\left(f_m(i) - f_n(i)\right)\right\|_{E_i} < \varepsilon \ i \in \{1, \dots, n\}$.
Jelas $\langle f_n(i) \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ adalah barisan cauchy dalam E_i untuk semua $i \in \{1, \dots, n\}$.
Karena E_i adalah ruang banach, jelas $\langle f_n(i) \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen $a_i \in E_i$ untuk semua $i \in \{1, \dots, n\}$.
Karena π_i adalah operator linear terbatas yang bersifat surjektif, jelas terdapat $f \in \prod_{i=1}^n E_i$ yang sifatnya $a_i = \pi_i(f) = f(i)$ untuk semua $i \in \{1, \dots, n\}$.
Jelas barisan $\langle f_n(i) \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke $f(i) \in E_i$ untuk semua $i \in \{1, \dots, n\}$.
Jelas $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ yang sifatnya $n \geq N \Rightarrow \left\|\left(f_n(i) - f(i)\right)\right\|_{E_i} < \varepsilon$ untuk semua $i \in \{1, \dots, n\}$.
Jelas $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ yang sifatnya $n \geq N \Rightarrow \left\|\left(f_n(i) - f(i)\right)\right\|_{E_i} \leq \sup_{i=1}^n \left\|\left(f_n(i) - f(i)\right)\right\|_{E_i} < \varepsilon$ untuk semua $i \in \{1, \dots, n\}$.
Jelas $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ yang sifatnya $n \geq N \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$.
Jelas barisan cauchy $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ dalam $\prod_{i=1}^n E_i$ konvergen ke $f \in \prod_{i=1}^n E_i$.
Jadi $\prod_{i=1}^n E_i$ adalah ruang banach.

$\Longleftarrow$) Diketahui $\prod_{i=1}^n E_i$ adalah ruang banach.
Dibuktikan E_i adalah ruang banach untuk semua $i \in \{1, \dots, n\}$.

Ambil sembarang barisan cauchy $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ dalam E_i untuk semua $i \in \{1,\dots,n\}$.
Jelas $\forall\varepsilon > 0\exists N \in \mathbb{N}$ yang sifatnya $m,n \geq N \Longrightarrow \|x_{im} - x_{in}\|_{E_i} < \varepsilon$ untuk semua $i \in \{1,\dots,n\}$.
Karena π_i adalah operator linear terbatas yang bersifat surjektif, jelas terdapat $f_m, f_n \in \prod_{i=1}^{n} E_i$ yang sifatnya $x_{im} = \pi_i(f_m) = f_m(i)$ dan $x_{in} = \pi_i(f_n) = f_n(i)$ untuk semua $i \in \{1,\dots,n\}$.
Jelas $\varepsilon > 0\exists N \in \mathbb{N}$ yang sifatnya $m,n \geq N \Longrightarrow \|f_m(i) - f_n(i)\|_{E_i} < \varepsilon$ untuk semua $i \in \{1,\dots,n\}$.
Jelas $\varepsilon > 0\exists N \in \mathbb{N}$ yang sifatnya $m,n \geq N \Longrightarrow \sup_{i=1}^{n}\|f_m(i) - f_n(i)\|_{E_i} < \varepsilon$.
Jelas $\varepsilon > 0\exists N \in \mathbb{N}$ yang sifatnya $m,n \geq N \Longrightarrow \|f_m - f_n\|_{E_i} < \varepsilon$ untuk semua $i \in \{1,\dots,n\}$.
Jelas $\langle f_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ adalah barisan cauchy dalam $\prod_{i=1}^{n} E_i$.
Karena $\prod_{i=1}^{n} E_i$ adalah ruang banach, jelas terdapat $f \in \prod_{i=1}^{n} E_i$ yang sifatnya bahwa barisan $\langle f_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke f.
Jelas $\varepsilon > 0\exists N \in \mathbb{N}$ yang sifatnya $n \geq N \Longrightarrow \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$.
Jelas $\varepsilon > 0\exists N \in \mathbb{N}$ yang sifatnya $n \geq N \Longrightarrow \sup_{i=1}^{n}\|f_n(i) - f(i)\|_{E_i} < \varepsilon$.
Jelas $\varepsilon > 0\exists N \in \mathbb{N}$ yang sifatnya $n \geq N \Longrightarrow \|f_n(i) - f(i)\|_{E_i} \leq \sup_{i=1}^{n}\|f_n(i) - f(i)\|_{E_i} < \varepsilon$.
Jelas $\varepsilon > 0\exists N \in \mathbb{N}$ yang sifatnya $n \geq N \Longrightarrow \|f_n(i) - f(i)\|_{E_i} < \varepsilon$ untuk semua $i \in \{1,\dots,n\}$.
Jelas $\varepsilon > 0\exists N \in \mathbb{N}$ yang sifatnya $n \geq N \Longrightarrow \|x_{in} - x_i\|_{E_i} < \varepsilon$ untuk semua $i \in \{1,\dots,n\}$. (dimana $f(i) = x_i \in E_i$ untuk semua $i \in \{1,\dots,n\}$).
Jelas $\varepsilon > 0\exists N \in \mathbb{N}$ yang sifatnya $n \geq N \Longrightarrow \|x_{in} - x_i\|_{E_i} < \varepsilon$ untuk semua $i \in \{1,\dots,n\}$.
Jelas barisan cauchy $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke $x_i \in E_i$ untuk semua $i \in \{1,\dots,n\}$.
Jadi E_i adalah ruang banach untuk semua $i \in \{1,\dots,n\}$.

KESIMPULAN

Kesimpulan dari tulisan ini adalah ruang bernorma bersama dengan operator linear terbatasnya membentuk sebuah kategori yang dinotasikan dengan $\mathbf{Norm}_{\mathbb{R}}$. Kategori ruang bernorma bersama dengan operator linear tersebut tidak tertutup di bawah hasil kali tak-hingga dan contohnya adalah jika $\boldsymbol{I} = \mathbb{N}$ dan $\boldsymbol{E_i} = \mathbb{R}$ untuk semua $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}$ maka $\prod_{i\in I} \boldsymbol{E_i} = \boldsymbol{s}^\infty$ dimana $\boldsymbol{s}^\infty$ bukan ruang bernorma, karena terdapat elemen dalam $\boldsymbol{s}^\infty$ yaitu $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ dimana $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \mathbf{sup}_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}|\boldsymbol{n}| \nless \infty$, tetapi kategori tersebut tertutup di bawah hasil kali hingga yaitu jika diberikan keluarga berhingga dari ruang bernorma atas lapangan bilangan real $\mathbb{R}$ yaitu $\{(\boldsymbol{E_1}, \|\ \ \|_{\boldsymbol{E_1}}), \dots, (\boldsymbol{E_n}, \|\ \ \|_{\boldsymbol{E_n}})\}$ dan diberikan sembarang keluarga berhingga dari operator linear terbatas yaitu $\{\boldsymbol{T_1}: \boldsymbol{F} \longrightarrow \boldsymbol{E_1}, \dots, \boldsymbol{T_n}: \boldsymbol{F} \longrightarrow \boldsymbol{E_n}\}$ maka terdapat secara tunggal operator linear terbatas $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{F} \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{E_i}$ yang sifatnya $\boldsymbol{\pi_i T} = \boldsymbol{T_i}$ untuk semua $\boldsymbol{i} \in \{\boldsymbol{1}, \dots, \boldsymbol{n}\}$. Saran yang dapat dilakukan selanjutnya dalam penelitian ini menguji apakah keberadaan hasil kali langsung juga berlaku pada kategori ruang pre-Hilbert atau ruang Hilbert, Ponnusamy (2002).

DAFTAR PUSTAKA

Barnes, B., Adjei, I. A., Sebil, C., & Harris, E. (2018). The Product-Normed Linear Space. *Europen Journal of Pure and Applied Mathematics,* 11(3), 740-750.

Barr, M. (1976). Closed categories and Banach spaces. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, 17(4), 335-342.

Blackadar, B. (2006). *Operator Algebras*: *Thery of C*-Algebras and von Neumann Algebras*. Springer.

Debnath, L., & Mikusinski, P. (1990). *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*. Academic Press.

Dragomir, S. S., (2017). Hypo-*q*-Norm on A Cartesian Product of Normed Linear Spaces. *arXiv:1711.07340v1 [math.FA]. 15Nov2017*.

Endou, N., Shidama, Y., & Miyajima, K. (2007). The product space of real normed spaces and its properties. *Formalized Mathematics*, 15(3), 81-85.

Hungerford, T. W. (1974). *Algebra*. Springer-Verlag: New York, Inc.

Kreyszig. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons. Inc.

Kolmogorov, A.N., & Fomin, S.V. (1957), *Elements of The Theory of Functions and Functional Analysis*. Graylock Press, Rochester, N. Y.

Lyubinin, A. (2017). Non-Archimedean Coalgebras and Coadmissible Modules. *arXiv:1410.3731v2 [math.RA].*

Megginson, R. E. (1998). *An Introduction to Banach Space Theory*. Graduate Texts in Mathematics, Springer.

Ponnusamy, S. (2002). *Fundations of Functional Analysis*, Alpha Science International Ltd, Pangbourne England.

Prugovecki, E. (1971). *Quantum Mechanics in Hilbert Space*. Academic Press: New York and London.

Sabre, R. I. (2015). Some Properties Of Cartesian Product Of Two Fuzzy Normed Spaces. *journal of the college of basic education*, 21(88/علمي).

Schep, A. R. (2010). Products and factors of Banach function spaces. *Positivity*, 14(2), 301-319. Doi: 10.1007/s11117-009-0019-2.