PRISMA 1 (2018)
**PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika**
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/

# Radikal Prima-*R* Kiri pada (*R*,*S*)-Modul

**Dian Ariesta Yuwaningsih**

**Universitas Ahmad Dahlan (FKIP, UAD, Yogyakarta)**
dian.ariesta17@yahoo.com

**Abstrak**

Diberikan ring *R* dan ring *S* sebarang, serta suatu (*R*,*S*)-modul *M*. Suatu submodul *P* disebut submodul prima-*R* kiri pada (*R*,*S*)-modul jika untuk setiap ideal *I* dan *J* di *R* dengan $(IJ)MSS \subseteq P$ maka berakibat $IMS \subseteq P$ atau $JMS \subseteq P$. Pada paper ini akan disajikan pendefinisian radikal prima-*R* kiri pada (*R*,*S*)-modul melalui sistem-*m* terkait definisi submodul prima-*R* kiri pada (*R*,*S*)-modul.

**Kata Kunci: (*R*,S)-modul, submodul prima-*R* kiri, radikal prima-*R* kiri**

## PENDAHULUAN

Semua ring dalam tulisan ini adalah ring sebarang, kecuali diberikan keterangan tambahan lainnya. Diberikan ring *R* dan ring *S* sebarang. Khumprapussorn *et al.* (2012) memperkenalkan pendefinisian (*R*,*S*)-modules sebagai generalisasi dari (*R*,*S*)-bimodul. Suatu (*R*,*S*)-modul memiliki struktur yang sama dengan suatu (*R*,*S*)-bimodul ketika ring *R* dan ring *S* memiliki elemen idempoten sentral.

Khumprapussorn *et al.* (2012) juga mendefinisikan submodul di dalam (*R*,*S*)-modul *M* sebagai subgrup aditif *N* di *M* sedemikian hingga memenuhi $rns \in N$, untuk setiap $r \in R$, $n \in N$, dan $s \in S$. Dalam papernya, Khumprapussorn *et al.* Mendefinisikan beberapa keprimaan di dalam (*R*,*S*)-modul, yaitu submodul prima penuh dan submodul prima gabungan pada (*R*,*S*)-modul. Perkembangan selanjutnya, (Khumprapussorn, 2013) memperumum definisi submodul prima gabungan pada (*R*,*S*)-modul menjadi submodul prima-*R* kiri pada (*R*,*S*) –modul. Suatu submodul sejati *P* di (*R*,*S*)-modul *M* sebagai submodul prima-*R* kiri apabila untuk setiap ideal *I* dan ideal *J* di *R* dengan $IJMSS \subseteq P$, maka berakibat $IMS \subseteq P$ atau $JMS \subseteq P$.

Selanjutnya, diberikan *T* merupakan ring dengan elemen identitas. Menurut (Lam, 2001) suatu himpunan tak kosong $J \subseteq T$ disebut sistem-*m* jika untuk setiap $a,b \in J$ terdapat $t \in T$ sedemikian hingga memenuhi $atb \in J$. Lebih lanjut, untuk setiap ideal *I* di *T*, himpunan $\sqrt{I} := \{a \in T \mid (\forall \text{sistem-}m\ J \text{ di } T)\, a \in J \Rightarrow J \cap I \neq \varnothing\}$ ekuivalen dengan irisan dari semua ideal prima di *T* yang memuat *I*. Berdasarkan definisi ini, (Behboodi, 2009) telah memperumum definisi dari sistem-*m* dari suatu ring ke modul. Diberikan *M* sebarang modul atas ring *T*. Suatu himpunan tak kosong $X \subseteq M \setminus \{0\}$ disebut sistem-*m* jika untuk setiap ideal (kiri) *I* di *T* dan untuk setiap submodul *K*, *L* di *M* dengan $(K+L) \cap X \neq \varnothing$ dan $(K+IM) \cap X \neq \varnothing$ berakibat $(K+IL) \cap X \neq \varnothing$. Telah ditunjukkan juga bahwa komplemen dari suatu submodul prima adalah suatu sistem-*m* dan untuk setiap sistem-*m* *X*, suatu submodul yang saling asing dengan *X* dan maksimal terhadap sifat ini juga merupakan submodul prima. Lebih lanjut, untuk suatu submodul

$N$ di $M$, himpunan $\sqrt{N} = \{a \in M \mid (\forall \text{sistem} - m\ X \text{ di } M)\, a \in X \Rightarrow X \cap N = \varnothing\}$ sama dengan irisan dari semua submodul prima di $M$ yang memuat $N$.

Di dalam papernya, (Yuwaningsih dan Wijayanti, 2015) telah memperumum sifat-sifat dari ring di atas kedalam struktur ($R$,$S$)-modul, yaitu mendefinisikan radikal prima gabungan pada ($R$,$S$)-modul. Berdasarkan penelitian-penelitian sebelumnya, dalam paper ini akan disajikan hasil penelitian terkait pendefinisian radikal prima-$R$ kiri pada suatu ($R$,$S$)-modul melalui pendefinisian sistem-$m$ terkait submodul prima-$R$ kiri pada suatu ($R$,$S$)-modul.

**Sistem-*M***

Sebelum menyajikan hasil terkait pendefinisian radikal prima-$R$ kiri pada suatu ($R$,$S$)-modul, berikut disajikan terlebih dahulu hasil terkait pendefinisian sistem-$m$ pda suatu ($R$,$S$)-modul beserta sifat-sifatnya.

**Definisi 2.1.** Diberikan suatu ($R$,$S$)-modul $M$. Suatu himpunan tak kosong $X \subseteq M \setminus \{0\}$ disebut sistem-$m$ jika untuk setiap ideal $I$ dan ideal $J$ di $R$ serta submodul $K$ di $M$ dengan $(K + IMS) \cap X \neq \varnothing$ dan $(K + JMS) \cap X \neq \varnothing$, maka berakibat $(K + IJMSS) \cap X \neq \varnothing$.

Berikut ditunjukkan hasil suatu hubungan antara submodul prima-$R$ kiri dengan sistem-$m$ pada suatu ($R$,$S$)-modul.

**Proposisi 2.2.** Diberikan suatu ($R$,$S$)-modul $M$ dan submodul sejati $P$ di $M$. Submodul $P$ merupakan submodul prima-$R$ kiri jika dan hanya jika $X := M \setminus P$ merupakan sistem-$m$.

**Bukti.** $(\Rightarrow)$. Diketahui $P$ merupakan submodul prima-$R$ kiri. Diambil sebarang ideal $I$ dan ideal $J$ di $R$ serta submodul $K$ di $M$ dengan $(K + IMS) \cap X \neq \varnothing$ dan $(K + JMS) \cap X \neq \varnothing$. Andaikan $(K + IJMSS) \cap X = \varnothing$, maka diperoleh $K + IJMSS \subseteq P$. Akibatnya diperoleh $K \subseteq P$ dan $IJMSS \subseteq P$. Karena diketahui $P$ merupakan submodul prima-$R$ kiri, maka dari $IJMSS \subseteq P$ berakibat $IMS \subseteq P$ atau $JMS \subseteq P$. Akibatnya, diperoleh $(K + IMS) \cap X = \varnothing$ atau $(K + JMS) \cap X = \varnothing$. Terjadi kontradiksi, sehingga pengandaian salah dan harus diingkar. Jadi, diperoleh bahwa $(K + IJMSS) \cap X \neq \varnothing$. Dengan demikian, terbukti bahwa $X$ merupakan sistem-$m$.

$(\Leftarrow)$. Diketahui bahwa $X := M \setminus P$ merupakan sistem-$m$. Diambil sebarang ideal $I$ dan ideal $J$ di $R$ yang memenuhi $IJMSS \subseteq P$. Andaikan $IMS \not\subset P$ dan $JMS \not\subset P$, maka diperoleh $(IMS) \cap X \neq \varnothing$ dan $(JMS) \cap X \neq \varnothing$. Karena diketahui $X$ merupakan sistem-$m$, maka dengan mengambil submodul $K = \{0\}$, maka diperoleh $(IJMSS) \cap X \neq \varnothing$. Akibatnya diperoleh bahwa $IJMSS \not\subset P$. Terjadi kontradiksi, sehingga pengandaian salah dan harus diingkar. Jadi diperoleh $IMS \subseteq P$ atau $JMS \subseteq P$. Dengan demikian, terbukti bahwa $P$ merupakan submodul prima-$R$ kiri di $M$. $\square$

Berikut diberikan contoh suatu sistem-$m$ pada suatu ($R$,$S$)-modul.

**Contoh 2.3.** Diberikan $\mathbb{Z}$ sebagai $(2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})-$modul. Dapat ditunjukkan bahwa $6\mathbb{Z}$ merupakan submodul prima-$2\mathbb{Z}$ kiri di $\mathbb{Z}$. Diambil ideal $I = (2m)\mathbb{Z}$ di $2\mathbb{Z}$ dan ideal $J = (3n)\mathbb{Z}$ di $3\mathbb{Z}$ untuk suatu $m, n \in \mathbb{Z}$. Dapat ditunjukkan bahwa

$\left(\left(2m\right)\mathbb{Z}\right)\left(\left(3n\right)\mathbb{Z}\right)\mathbb{Z}\left(3\mathbb{Z}\right)\left(3\mathbb{Z}\right)\subseteq\left(54mn\right)\mathbb{Z}\subseteq 6\mathbb{Z}$ tetapi $\left(\left(3n\right)\mathbb{Z}\right)\mathbb{Z}\left(3\mathbb{Z}\right)\subseteq\left(9n\right)\mathbb{Z}\not\subset 6\mathbb{Z}$, untuk setiap $m,n\in\mathbb{Z}$. Padahal $\left(\left(2m\right)\mathbb{Z}\right)\mathbb{Z}\left(3\mathbb{Z}\right)\subseteq\left(6m\right)\mathbb{Z}\subseteq 6\mathbb{Z}$, untuk setiap $m,n\in\mathbb{Z}$. Dengan demikian, terbukti bahwa $6\mathbb{Z}$ merupakan submodul prima-$2\mathbb{Z}$ kiri di $\mathbb{Z}$. Oleh karena itu, diperoleh bahwa $\mathbb{Z}\backslash 6\mathbb{Z}$ merupakan sistem-*m* dari $\left(2\mathbb{Z},3\mathbb{Z}\right)-$modul $\mathbb{Z}$.

Telah diketahui bahwa setiap submodul maksimal di (*R*,*S*)-modul *M* merupakan submodul prima-*R* kiri di *M*. Berikut diberikan hubungan antara submodul yang maksimal di (*R*,*S*)-modul *M* dengan submodul prima-*R* kiri di *M* terkait dengan sistem-*m* suatu (*R*,*S*)-modul.

**Proposisi 2.4.** Diberikan (*R*,*S*)-modul *M* dan sistem-*m* *X* di *M*. Jika *P* merupakan submodul dari *M* yang maksimal dengan sifat $P\cap X=\varnothing$, maka *P* merupakan submodul prima-*R* kiri.

**Bukti.** Diambil sebarang ideal *I* dan ideal *J* di *R* dengan $IJMSS\subseteq P$. Andaikan $IMS\not\subset P$ dan $JMS\not\subset P$. Karena *P* merupakan submodul yang maksimal maka $P+IMS=M$ dan $P+JMS=M$. Akibatnya, diperoleh $\left(P+IMS\right)\cap X\neq\varnothing$ dan $\left(P+JMS\right)\cap X\neq\varnothing$. Karena *X* merupakan sistem-*m*, maka diperoleh $\left(P+IJMSS\right)\cap X\neq\varnothing$. Karena $IJMSS\subseteq P$, maka diperoleh $P\cap X\neq\varnothing$. Terjadi kontradiksi, sehingga pengandaian salah dan harus diingkar. Dengan demikian, diperoleh bahwa $IMS\subseteq P$ atau $JMS\subseteq P$. Jadi terbukti bahwa *P* merupakan submodul prima-*R* kiri di *M*. $\square$

## Radikal Prima-*R* Kiri

Pada bagian ini akan sajikan hasil dari penelitian ini, yaitu terkait pendefinisian radikal prima-*R* kiri pada suatu (*R*,*S*)-modul *M*. Namun, sebelumnya akan didefinisikan terlebih dahulu himpunan $\sqrt[L_P]{N}$ untuk suatu submodul *N* di (*R*,*S*)-modul *M* sebagai berikut.

**Definisi 3.1.** Diberikan suatu (*R*,*S*)-modul *M* dan suatu submodul *N* di *M*. Apabila terdapat submodul prima-*R* kiri yang memuat *N*, maka didefinisikan himpunan $\sqrt[L_P]{N}=\left\{a\in M\mid\left(\forall\text{sistem-}m\ X\ \text{di}\ M\right)a\in X\Rightarrow X\cap N\neq\varnothing\right\}$. Apabila tidak terdapat submodul prima-*R* kiri yang memuat *N*, maka didefinisikan $\sqrt[L_P]{N}=M$.

Selanjutnya, apabila diberikan suatu (*R*,*S*)-modul *M*, didefinisikan spektrum prima-*R* kiri dari *M* adalah himpunan:

$$Spec_R^{L_P}\left(M\right)=\left\{P\mid P\ \text{submodul prima}-R\ \text{kiri di}\ M\right\}.$$

Apabila diberikan submodul *N* di (*R*,*S*)-modul *M*, didefinisikan himpunan:

$$V_R^{L_P}\left(N\right)=\left\{P\in Spec_R^{L_P}\left(M\right)\mid N\subseteq P\right\}.$$

Berikut ini diberikan karakteristik dari himpunan $\sqrt[L_P]{N}$ untuk suatu submodul *N* di (*R*,*S*)-modul *M*.

**Teorema 3.2.** Jika diberikan (*R*,*S*)-modul *M* dan submodul *N* di *M*, maka $\sqrt[L_P]{N}=M$ atau $\sqrt[L_P]{N}=\bigcap\limits_{P\in V_R^{L_P}\left(N\right)}P$.

**Bukti.** Misalkan $\sqrt[L_P]{N} \neq M$, berarti $V_R^{L_P}(N) \neq \varnothing$. Akan dibuktikan bahwa $\sqrt[L_P]{N} = \bigcap_{P \in V_R^{L_P}(N)} P$. Diambil sebarang $a \in \sqrt[L_P]{N}$ dan $P \in V_R^{L_P}(N)$. Dibentuk sistem-*m* $X := M \backslash P$. Karena $N \subseteq P$ maka diperoleh $X \cap N = \varnothing$. Akibatnya $a \notin X$, sehingga diperoleh $a \in P$. Karena pengambilan $P \in V_R^{L_P}(N)$ sebarang, maka diperoleh $a \in \bigcap_{P \in V_R^{L_P}(N)} P$. Dengan demikian, terbukti bahwa $\sqrt[L_P]{N} \subseteq \bigcap_{P \in V_R^{L_P}(N)} P$. Selanjutnya, diambil sebarang $a \in \bigcap_{P \in V_R^{L_P}(N)} P$. Andaikan $a \notin \sqrt[L_P]{N}$, maka terdapat sistem-*m* $X$ sedemikian sehingga memenuhi $a \in X$ tetapi $N \cap X = \varnothing$. Selanjutnya, dibentuk himpunan $\mathfrak{I} = \{ J \mid N \subseteq J, J \text{ submodul di } M \text{ dan } J \cap X = \varnothing \}$. Berdasarkan Lemma Zorn, $\mathfrak{I}$ memiliki elemen maksimal, misalkan submodul *K* di *M* dengan $N \subseteq K$ yang maksimal dengan sifat $K \cap X = \varnothing$. Berdasarkan Proposisi 2.4., maka diperoleh *K* merupakan submodul prima-*R* kiri di *M*. Dengan demikian, $K \in V_R^{L_P}(N)$. Dari sini diperoleh $a \in K$. Padahal $a \in X$, sehingga $K \cap X \neq \varnothing$. Terjadi kontradiksi, sehingga pengandaian salah dan harus diingkar. Jadi, diperoleh bahwa $a \in \sqrt[L_P]{N}$, sehingga terbukti $\bigcap_{P \in V_R^{L_P}(N)} P \subseteq \sqrt[L_P]{N}$.

Dengan demikian, terbukti bahwa $\sqrt[L_P]{N} = \bigcap_{P \in V_R^{L_P}(N)} P$. □

**Contoh 3.3.** Diberikan $\mathbb{Z}$ sebagai $(2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})-$modul dan submodul $8\mathbb{Z}$ di $\mathbb{Z}$. Diperoleh himpunan:

$$V_{2\mathbb{Z}}^{L_P}(8\mathbb{Z}) = \{ A \in Spec_{2\mathbb{Z}}^{L_P}(M) \mid 8\mathbb{Z} \subseteq A \} = \{ 4\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z} \}.$$

Oleh karena itu, diperoleh himpunan:

$$\sqrt[L_P]{8\mathbb{Z}} = \bigcap_{P \in V_{2\mathbb{Z}}^{L_P}(N)} P = 4\mathbb{Z} \cap 2\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z}.$$

Berdasarkan sifat-sifat yang telah disajikan sebelumnya, terakhir dapat didefinisikan radikal prima-*R* kiri pada suatu *(R,S)*-modul sebagai berikut.

**Definisi 3.4.** Diberikan suatu *(R,S)*-modul *M*. Jika terdapat submodul prima-*R* kiri di *M*, maka didefinisikan radikal prima-*R* kiri dari *M* adalah $rad_{L_p}^R(M) := \sqrt[L_P]{0} = \bigcap_{P \in Spec_R^{L_P}(M)} P$. Jika tidak terdapat submodul prima-*R* kiri di *M*, didefinisikan radikal prima-*R* kiri dari *M* adalah $rad_{L_p}^R(M) := M$.

Berikut ini disajikan contoh dari radikal prima-*R* kiri pada suatu (*R*,*S*)-modul.

**Contoh 3.5.** Diberikan $\mathbb{Z}$ sebagai $(2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z})-$modul. Dapat ditunjukkan bahwa submodul $\{0\}$ merupakan submodul prima-$2\mathbb{Z}$ kiri di $(2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z})-$modul $\mathbb{Z}$. Oleh karena setiap submodul prima-$2\mathbb{Z}$ kiri di $\mathbb{Z}$ memuat submodul $\{0\}$, maka diperoleh radikal prima-$2\mathbb{Z}$ dari $(2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z})-$modul $\mathbb{Z}$ adalah $rad_{L_p}^{2\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) := \{0\}$.

## SIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang disajikan pada bagian sebelumnya, dapat ditarik simpulan diantaranya sebagai berikut: (1) Suatu himpunan tak kosong $X \subseteq M \setminus \{0\}$ disebut sistem-*m* jika untuk setiap ideal *I* dan ideal *J* di *R* serta submodul *K* di *M* dengan $(K + IMS) \cap X \neq \varnothing$ dan $(K + JMS) \cap X \neq \varnothing$, maka berakibat $(K + IJMSS) \cap X \neq \varnothing$; (2) Radikal prima-*R* kiri suatu (*R*,*S*)-modul *M*, dinotasikan dengan $rad_{L_p}^{R}(M)$, didefinisikan sebagai *M* atau merupakan irisan dari semua submodul prima-*R* kiri di (*R*,*S*)-modul *M*.

Penelitian seputar (*R*,*S*)-modul merupakan hal yang baru di bidang struktur aljabar. Oleh karena itu, penelitian terkait (*R*,*S*)-modul masih terbuka lebar. Dengan adanya penelitian terkait pendefinisian radikal prima-*R* kiri ini diharapkan dapat mendorong penelitian-penelitian lebih lanjut terkait sifat-sifat serta pengembangan radikal prima-*R* kiri pada suatu (*R*,*S*)-modul.

## DAFTAR PUSTAKA

Behboodi, M., 2009, On the Prime Radical and Baer's Lowes Nilradical of Modules, *Acta Mathematica Hungaria*, 122 (3), 293-306.

Khumprapussorn, T., Pianskool, S., dan Hall, M., 2012, (*R*,*S*)-Modules and their Fully and Jointly Prime Submodules, *International Mathematical Forum*, 7(33), 1631-1643.

Khumprapussorn, T., 2013, Left *R*-Prime (*R*,*S*)-Submodules, *International Mathematical Forum*, 8(13), 619-626.

Lam, T.Y., 2001, *A First Course in Noncommutative Rings*, Springer Verlag New York, Inc., USA.

Yuwaningsih, D.A., dan Wijayanti, I.E., 2015, On Jointly Prime Radicals of (*R*,*S*)-Modules, *Journal of Indonesian Mathematical Society*, 21(1), 25-34.