



## Pendekatan *Matching* Bobot Optimal untuk Menentukan Solusi Masalah Penugasan *Multi-Objective*

Isnaini Rosyida, Tiara Budi Utami, M. Fajar Safaatullah , Kartono

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Semarang  
[isnaini@mail.unnes.ac.id](mailto:isnaini@mail.unnes.ac.id)

### Abstrak

Masalah penugasan *multi-objective* merupakan masalah pemasangan tugas ke pekerja sehingga memenuhi beberapa fungsi tujuan secara simultan. Fungsi tujuan yang akan dicapai misalnya meminimalkan upah pekerja, waktu operasi, produk cacat, dan sebagainya. Pada artikel ini permasalahan yang dikaji dibatasi pada masalah pemasangan  $n$  tugas ke  $n$  pekerja. Tahapan penyelesaian masalah penugasan *multi-objective* dimulai dengan proses pengubahan fungsi tujuan *multi-objective* ke dalam bentuk fungsi *single-objective* melalui proses normalisasi (Metode Bao) atau dengan menjumlahkan koefisien dari setiap fungsi tujuan (Metode Yadaiah-Haragopal). Tahapan berikutnya menentukan *matching* bobot optimal dari masalah penugasan *single-objective* tersebut melalui algoritma Kuhn-Munkres dan algoritma Hungarian. Kebaruan dalam artikel ini pada simulasi penyelesaian beberapa masalah penugasan *multi-objective* dengan menentukan *matching* bobot optimal melalui kedua metode tersebut.

**Kata Kunci:** *Matching*, bobot, penugasan *multi-objective*, penugasan *single-objective*, normalisasi, algoritma Kuhn-Munkres, algoritma Hungarian.

### PENDAHULUAN

Manajemen proyek didesain untuk mengontrol sebuah perusahaan atau sebuah institusi dalam penyelesaian beberapa proyek yang dibatasi oleh biaya, waktu dan kualitas hasilnya. Keberhasilan sebuah perusahaan atau sebuah institusi ditentukan dari kepiawaian manajemen dalam pengambilan keputusan dan antisipasi setiap perubahan. Keterbatasan karyawan pada perusahaan dalam menyelesaikan sebuah proyek perlu diatasi dengan pengoptimalan penugasan karyawan dengan tugas-tugas yang ada agar diperoleh keuntungan maksimal, biaya minimal, output yang dihasilkan berkualitas, dan sebagainya. Sebagian besar metode penyelesaian masalah penugasan yang telah ada hanya mempertimbangkan satu tujuan pengoptimalan (*single objective*). Sebagai contoh, masalah penugasan dengan total biaya minimum atau masalah penugasan dengan total biaya maksimum. Meminimalkan biaya pada masalah penugasan hanya terfokus pada bagaimana memberikan tugas kepada pekerja sehingga total biaya operasional minimum. Begitu juga dalam masalah penugasan dengan total waktu penyelesaian minimum hanya terfokus pada bagaimana memberikan tugas kepada pekerja sehingga total waktu operasi minimum. Masalah penugasan seperti ini disebut sebagai masalah penugasan sederhana (*single-objective*). Metode penyelesaian masalah penugasan *single-objective*, yang dikenal dengan Metode Hungarian, pertama kali dikenalkan oleh Kuhn dan Munkres (Burkard, 2012). Kompleksitas dari Algoritma

Hungarian berupa polinomial  $O(n^4)$ . Berikutnya Edmonds telah menyelidiki kompleksitas dari Metode Hungarian menjadi  $O(n^3)$  (Burkard, 2012).

Tipe lain dari masalah penugasan adalah masalah penugasan *multi-objective*. Metode untuk menyelesaikan masalah penugasan *multi-objective* di antaranya metode dua fase (Przybylski dkk., 2010) dan Algoritma Branch & Bound (Belhouel dkk., 2014). Pada dua metode ini seluruh kemungkinan solusi diperhitungkan sebagai kandidat solusi. Berikutnya, Garret dkk. (2007) telah meneliti masalah penugasan *multi-objective* pada data penugasan pelaut. Bao dkk. (2007) menyelesaikan masalah penugasan *multi-objective* menggunakan algoritma Kuhn-Munkres dengan pengubahan tujuan *multi-objective* menjadi *single-objective* melalui proses rekonstruksi dan normalisasi koefisien fungsi tujuan serta metode pembobotan. Yadaiah dan Haragopal (2016) menyelesaikan masalah penugasan *multi-objective* dengan pengubahan tujuan *multi-objective* menjadi *single-objective* melalui jumlahan semua koefisien dari variabel yang sama pada setiap fungsi tujuan dan selanjutnya diselesaikan dengan algoritma Hungarian. Pada artikel ini disajikan simulasi solusi dari masalah penugasan *multi-objective* melalui metode Bao dkk. (2007) dan metode Yadaiah-Haragopal (2016). Kemudian di analisis perbedaan solusi yang diperoleh melalui kedua metode tersebut dalam menyelesaikan masalah penugasan *multi-objective*.

## PEMBAHASAN

Pembahasan tentang masalah penugasan *multi-objective*, solusi dengan pencarian *matching* bobot optimal melalui algoritma Kuhn-Munkres dan algoritma Hungarian, sertas ilustrasi penerapan kedua metode pada masalah penugasan disajikan pada bagian ini.

Masalah penugasan *multi-objective* dengan  $p$  tujuan dimodelkan sebagai berikut:

$$\text{Minimumkan (maksimumkan): } z(X) = \{z_1(X), z_2(X), \dots, z_p(X)\} \quad (1)$$

$$\text{dengan } z_k(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}^k x_{ij} \text{ untuk setiap } k = 1, 2, \dots, p,$$

dan kendala sebagai berikut:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{untuk setiap } i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{untuk setiap } j = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Kendala (2) dan (3) diinterpretasikan satu tugas untuk satu pekerja dan satu pekerja dipasangkan dengan tepat satu tugas. Variabel  $x_{ij}$  merupakan variabel keputusan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ jika tugas } j \text{ dipasangkan ke pekerja } i \\ 0 & , \text{ jika tugas } j \text{ tidak ditetapkan untuk pekerja } i \end{cases} \quad (4)$$

Dalam hal ini:  $c_{ij}^k$  merupakan koefisien fungsi tujuan ke-  $k$  yang dicari nilai optimalnya (maksimum atau minimum) yang menyatakan parameter alokasi (non-negatif) dari pekerja  $i$  ke tugas  $j$  dengan tujuan  $k$ ,  $n$  menyatakan banyaknya tugas (dan pekerja), Parameter  $c$  dapat menyatakan biaya operasi, waktu penyelesaian pekerjaan, kualitas hasil pekerjaan, dan sebagainya. Pada artikel ini dikaji penyelesaian masalah penugasan *multi-objective* dengan: pendekatan *matching* bobot optimal, metode Hungarian, dan ilustrasi penyelesaian masalah penugasan dengan kedua metode tersebut.

### Solusi Masalah Penugasan *Multi-Objective* dengan Pencarian *Matching* Bobot Optimal melalui Algoritma Kuhn-Munkres

Diberikan graf  $G(V, E)$ . Himpunan bagian  $M$  dari himpunan sisi  $E(G)$  disebut penjadohan (*matching*) pada graf  $G$  jika tidak ada dua sisi yang bertetangga (*adjacent*). Suatu titik  $v$  di graf  $G$  dikatakan tertutup oleh *matching*  $M$  ( $M$ -saturated) jika titik  $v$  merupakan titik akhir dari salah satu sisi di  $M$ . Lintasan alternatif- $M$  ( $M$ -alternating path) adalah lintasan yang sisinya bergantian di  $E \setminus M$  dan di  $M$ . Sebuah lintasan alternatif- $M$  yang titik awal dan titik akhirnya tidak tertutup oleh  $M$  dinamakan lintasan augmentasi- $M$  ( $M$ -augmenting path). Pohon alternatif- $M$  adalah sebuah pohon yang berakar di titik  $v$  yang mempunyai sifat semua lintasan yang berawal dari titik  $v$  adalah lintasan alternatif- $M$ . Berikut ini tahapan penyelesaian masalah penugasan *multi-objective* dengan pencarian *matching* bobot optimal melalui Algoritma Kuhn-Munkres (Bao dkk., 2007).

#### 1. Merekonstruksi koefisien fungsi tujuan

Tujuan dari Algoritma Kuhn-Munkres adalah menentukan penjadohan sempurna dengan bobot maksimum. Apabila masalah penugasan *multi-objective* diselesaikan melalui algoritma Kuhn-Munkres, maka perlu dilakukan rekonstruksi bobot pada koefisien fungsi tujuan minimum dengan cara: misal  $c_{ij}^k$  menyatakan nilai atau elemen baris ke- $i$ , kolom ke- $j$  dari koefisien fungsi tujuan ke- $k$ . Data  $c_{ij}^k$  akan direkonstruksi dengan menentukan nilai  $m_k = \text{maksimum} \{c_{ij}^k\}$  untuk setiap  $k = 1, 2, \dots, p$ , kemudian dihitung nilai  $c_{ij}^{k'} = m_k - c_{ij}^k$  yang merupakan koefisien baru hasil rekonstruksi.

#### 2. Normalisasi data

Masalah penugasan *multi-objective* memuat  $p$ -fungsi tujuan dengan masing-masing fungsi tujuan mempunyai satuan ukur yang berbeda-beda. Untuk memperkecil tingkat kesalahan pada solusi yang diperoleh, terlebih dahulu dilakukan langkah penormalan pada semua data koefisien fungsi tujuan (Bao dkk., 2017). Dimisalkan  $c_{ij}^k$  adalah nilai atau elemen baris ke- $i$ , kolom ke- $j$  dari fungsi

tujuan ke- $k$ ,  $m'_k = \text{maksimum} \{c_{ij}^k\}$  untuk setiap  $k = 1, 2, \dots, p$ , data  $c_{ij}^k$  dinormalisasi sebagai berikut:

$$c_{ij}^{k''} = \frac{c_{ij}^k}{m'_k} \quad (5)$$

dengan  $c_{ij}^{k''}$  adalah data hasil normalisasi (nilai  $c_{ij}^k$  pada persamaan (5) untuk fungsi tujuan minimum diganti dengan nilai  $c_{ij}^{k'}$  hasil rekonstruksi) (Grodzevichl & Romanko, 2006).

3. Pengubahan fungsi tujuan *multi-objective* ke bentuk *single-objective*

Proses pengubahan fungsi tujuan *multi-objective* ke bentuk *single-objective* dilakukan melalui metode pembobotan, yaitu pemberian bobot untuk masing-masing tujuan. Pada artikel ini, diberikan bobot yang sama untuk masing-masing tujuan, yang artinya setiap fungsi tujuan mempunyai tingkat kepentingan yang sama. Misal  $\alpha_k$  menyatakan bobot fungsi tujuan ke- $k$ . Karena terdapat  $p$  fungsi tujuan,

maka  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = \frac{1}{p}$  dan  $\sum_{k=1}^p \alpha_k = 1$  untuk setiap  $k = 1, 2, \dots, p$ . Setelah proses pembobotan, fungsi tujuan *multi-objective* diubah menjadi bentuk *single-objective* sebagai berikut.

Maksimumkan (minimumkan):

$$z(X) = \alpha_1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}^{1''} x_{ij} + \alpha_2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}^{2''} x_{ij} + \dots + \alpha_p \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}^{p''} x_{ij}$$

4. Penyelesaian masalah penugasan *single-objective* melalui Algoritma Kuhn-Munkres.

Masukan : Graf bipartisi komplit berbobot  $G$  dengan partisi  $(X, Y)$ .

Langkah 1 : Pelabelan pada titik-titik  $G$ , namakan pelabelan  $\ell$ .

a) Untuk setiap  $x \in X$ , misal  $\ell(x) = \text{maksimum} \{w(xy) | y \in Y\}$ .

b) Untuk setiap  $y \in Y$ , didefinisikan  $\ell(y) = 0$ .

c) Diperoleh graf  $G_\ell$  adalah graf bagian perentang dari  $G$  dengan himpunan sisi

$$E_\ell = \{xy | w(xy) = \ell(x)\}.$$

Langkah 2 : Pemilihan sebarang *matching*  $M$  pada  $G_\ell$ .

Langkah 3 : Penentuan *matching* sempurna di  $G$ . Jika *matching*  $M$  bukan *matching* sempurna, maka disusun sebuah pohon alternatif  $T$  yang berakar dari suatu titik yang tidak tertutup oleh *matching*  $M$  yang digunakan untuk mendefinisikan sebuah pelabelan titik baru  $\ell'$ .

- a) Jika  $X$  tertutup oleh  $M$ , maka  $M$  merupakan *matching* sempurna (karena  $|x| = |y|$ ) dan *matching*  $M$  optimal pada  $G_\ell$ , algoritma berhenti. Jika  $M$  bukan *matching* sempurna di  $G_\ell$ , maka dilanjutkan.
- b) Misal  $u$  adalah titik yang tidak tertutup oleh  $M$ ,  $u \in X$ .
- c) Disusun pohon alternatif  $T$  dari  $M$  yang berakar di  $u$ . Jika terdapat lintasan augmentasi- $M$ , maka lintasan  $M$  diperpanjang sepanjang lintasan augmentasi- $M$  untuk mendapatkan *matching* baru dan kembali ke langkah 3a. Jika tidak memuat lintasan augmentasi- $M$ , maka  $T$  tidak dapat diperluas lebih jauh di  $G_\ell$  dan pelabelan titik  $\ell$  diganti dengan pelabelan titik baru  $\ell'$  dengan sifat bahwa  $M$  dan  $T$  termuat di graf  $G_\ell$ .

Langkah 4 : Pelabelan titik baru  $\ell'$  melalui  $T$ .

Hitung  $m_\ell = \min \{ \ell(x) + \ell(y) - w(xy) | x \in X \cap V(T) \text{ dan } y \in Y - V(T) \}$ .

Diperoleh pelabelan baru untuk  $\ell'$  sebagai berikut:

$$\ell' = \begin{cases} \ell(x) - m_\ell & \text{untuk } x \in X \cap V(T) \\ \ell(y) + m_\ell & \text{untuk } y \in Y \cap V(T) \\ \ell(x), \ell(y) & \text{lainya} \end{cases} \quad (2.15)$$

Langkah 5 : Jika  $\ell = \ell'$ , maka di susun  $G_\ell$  baru dengan  $G_\ell = G_{\ell'}$  dan kembali ke Langkah 3.c.

Pada penelitian ini telah dirancang program Matlab untuk menyelesaikan masalah penugasan *multi-objective* melalui algoritma Kuhn-Munkres.

### Solusi Masalah Penugasan *Muti-Objective* melalui Algoritma Hungarian

Berikut ini sifat yang yang menjamin solusi optimal masalah penugasan dengan Algoritma Hungarian (Yadaiah dan Haragopal, 2016).

**Teorema 1.** Jika sebuah bilangan ditambahkan atau dikurangkan dari semua elemen pada baris atau kolom dalam matriks biaya penugasan (Assignment Cost Matriks/ACM) mula-mula, maka solusi optimal pada matriks biaya ACM yang baru sama dengan solusi optimal pada matriks ACM mula-mula. (Hillier dan Lieberman, 2015)

Misal koefisien-koefisien dari fungsi tujuan menyatakan biaya, waktu penyelesaian dan kualitas produk yang dihasilkan setiap pekerja terhadap tugas yang dikerjakan. Berikut ini metode dari Yadaiah-Haragopal dalam menyelesaikan masalah penugasan *multi-objective* melalui Algoritma Hungarian.

Masukan : Diberikan matriks biaya penugasan (ACM) yang setiap elemennya merupakan koefisien-koefisien fungsi tujuan.

Langkah 1 : Dihitung jumlahan dari semua koefisien dari setiap variabel yang sama pada fungsi tujuan dan diperoleh matriks biaya penugasan yang baru (*modified ACM*)

- Langkah 2 : Jika permasalahan pada matriks biaya penugasan yang baru merupakan masalah maksimisasi, maka dilakukan perubahan tanda pada setiap elemen dalam matriks ACM yang baru dan dilanjutkan ke langkah 3. Sebaliknya jika permasalahan pada matriks biaya penugasan yang baru merupakan masalah minimisasi, maka dilanjutkan ke langkah 4.
- Langkah 3 : (Proses reduksi baris)  
Ditentukan elemen minimum pada setiap baris- $i$  ( $i=1,2,3,\dots,n$ ) dan kemudian kurangkan elemen minimum ini dari setiap elemen pada baris ke- $i$  dalam matriks biaya yang baru.
- Langkah 4 : (Proses reduksi kolom)  
Ditentukan elemen minimum pada setiap kolom- $j$  ( $j=1,2,3,\dots,n$ ) dan kemudian kurangkan elemen minimum ini dari setiap elemen pada kolom- $j$  dalam matriks biaya yang baru.
- Langkah 5 : (Pengecekan baris atau kolom)  
Digambarkan garis tegak atau mendatar yang dapat menutupi semua elemen nol pada matriks biaya, dengan prosedur sebagai berikut:
- Diperiksa baris yang memuat tepat 1 elemen nol, dimulai dari baris-1. Pada setiap baris yang memuat tepat satu elemen nol, elemen nol tersebut ditandai dengan tanda segiempat  $\square$  untuk menyatakan penugasan dan kemudian gambarkan garis tegak yang melalui elemen nol tersebut. Jika tidak terdapat tepat satu elemen nol pada sebuah baris, maka lewati baris tersebut. Proses dilanjutkan sampai pengecekan baris terakhir.
  - Jika semua elemen nol sudah tertutupi oleh garis (tegak atau mendatar), maka dilanjutkan ke langkah 2. Jika belum, maka dilanjutkan ke proses pengecekan kolom.
  - Diperiksa kolom yang memuat tepat 1 elemen nol, dimulai dari kolom-1. Pada setiap kolom yang memuat tepat satu elemen nol, elemen nol tersebut ditandai dengan  $\square$  untuk menyatakan penugasan dan kemudian gambarkan garis mendatar yang melalui elemen nol tersebut. Jika tidak terdapat tepat satu elemen nol pada sebuah kolom, maka lewati kolom tersebut. Proses dilanjutkan sampai pengecekan kolom terakhir dan dicek apakah semua elemen nol sudah dilalui oleh garis.
- Langkah 6 : Dilakukan pengecekan apakah banyaknya tanda segiempat sudah sama dengan banyaknya baris? Jika ya, dilanjutkan ke langkah 9. Jika tidak, dilanjutkan ke langkah 7.
- Langkah 7: Ditentukan elemen minimum dari elemen-elemen yang tidak dilalui oleh garis (tegak atau mendatar).
- Elemen-elemen yang dilalui oleh dua garis sekaligus, yaitu garis mendatar dan garis tegak, ditambah dengan elemen minimum pada langkah 7.
  - Elemen-elemen yang tidak dilalui oleh garis dikurangi dengan elemen minimum pada langkah 7.
  - Elemen-elemen yang dilalui oleh satu garis tetap (tidak ditambah atau dikurangi).
- Langkah 8 : Kembali ke langkah 5.
- Langkah 9 : Diperoleh solusi penugasan, yang dinyatakan dengan banyaknya tanda  $\square$  sama dengan banyaknya baris/kolom.
- Keluaran : Penugasan optimal  $x_{ij}$  yang ditandai dengan tanda segiempat  $\square$ .

**Simulasi Penerapan Algoritma Kuhn-Munkres dan Algoritma Hungarian dalam Menyelesaikan Beberapa Masalah Penugasan *Multi-Objective***

Pada bagian ini dibahas penerapan algoritma Kuhn-Munkres dan algoritma Hungarian dalam menyelesaikan beberapa masalah penugasan *multi-objective*. Masalah yang pertama diambil dari data penugasan karyawan sebuah pabrik yang memproduksi kotak kemasan (*boxes packaging*). Pabrik tersebut mempunyai 3 tim yang akan mengerjakan 3 pesanan pekerjaan, yaitu membuat kotak kemasan 1, 2, dan 3. Simbol  $t_{ij}$  menyatakan rata-rata waktu operasi tim  $i$  dalam menyelesaikan produk  $j$ ,  $p_{ij}$  adalah rata-rata hasil produksi tim  $i$  saat mengerjakan produk  $j$ , dan  $w_{ij}$  adalah rata-rata jumlah *waste* yang dihasilkan tim  $i$  saat mengerjakan produk  $j$ . Data koefisien fungsi tujuan disajikan pada matriks biaya penugasan (*Assignment Cost matrix/ACM*) mula-mula pada Tabel 1.

Tabel 1. Data matriks biaya penugasan mula-mula

|                |       | Produk |       |       |                                      |
|----------------|-------|--------|-------|-------|--------------------------------------|
|                |       | $P_1$  | $P_2$ | $P_3$ |                                      |
| Tim<br>(T,P,W) |       |        |       |       |                                      |
|                | $T_1$ | $t$    | 148   | 181   | 98                                   |
| $p$            |       | 25255  | 24265 | 12950 | $\leftarrow c_{ij}^2 = p_{ij}$ (pcs) |
| $w$            |       | 342    | 497   | 324   | $c_{ij}^3 = w_{ij}$ (pcs)            |
| $T_2$          | $t$   | 350    | 264   | 53    |                                      |
|                | $p$   | 42000  | 34168 | 6985  |                                      |
|                | $w$   | 1099   | 735   | 190   |                                      |
| $T_3$          | $t$   | 80     | 95    | 40    |                                      |
|                | $p$   | 10550  | 12469 | 7190  |                                      |
|                | $w$   | 254    | 461   | 35    |                                      |

(Sumber: Data Laporan Hasil Cetak Flexo 6 Bulan Juli 2016)

Permasalahan yang muncul adalah menentukan penugasan optimal antara tim dan jenis produk yang diproduksi sehingga total waktu operasi serta banyaknya *waste* dapat minimum, dan hasil produksi dapat maksimum secara bersamaan. Penyelesaian masalah penugasan menggunakan metode Bao dkk. (2007) sebagai berikut:

1. Pada kasus ini dilakukan rekonstruksi bobot pada data waktu ( $t_{ij}$ ) dan *waste* ( $w_{ij}$ ), sedangkan untuk data hasil produksi ( $p_{ij}$ ) tetap. Dari Tabel 1 diketahui  $m_1 = 350$  dan  $m_2 = 1099$ , diperoleh :  $c_{ij}^{k'} = m_k - c_{ij}^k$  hingga diperoleh data baru ( $t_{ij}', w_{ij}'$ ) pada Tabel 2.

Tabel 2. Rekonstruksi koefisien pada matriks biaya penugasan

|         |      | Produk |       |       |
|---------|------|--------|-------|-------|
| Tim     |      | $P_1$  | $P_2$ | $P_3$ |
| (T,P,W) |      |        |       |       |
|         | $t'$ | 203    | 169   | 253   |
| $T_1$   | $p$  | 25255  | 24265 | 12950 |
|         | $w'$ | 757    | 602   | 775   |
|         | $t'$ | 0      | 86    | 298   |
| $T_2$   | $p$  | 42000  | 34168 | 6985  |
|         | $w'$ | 0      | 365   | 910   |
|         | $t'$ | 270    | 255   | 310   |
| $T_3$   | $p$  | 10550  | 12469 | 7190  |
|         | $w'$ | 845    | 638   | 1064  |

2. Berdasarkan Tabel 2,  $m_1' = 310$ ,  $m_2' = 42000$ , dan  $m_3' = 1064$ , kemudian dinormalisasi melalui  $c_{ij}^{k''} = \frac{c_{ij}^k}{m_k'}$  dan diperoleh  $(t_{ij}'', p_{ij}'', w_{ij}'')$  pada Tabel 3.

Tabel 3. Normalisasi koefisien pada matriks biaya penugasan

|       |       | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|
|       | $t''$ | 0.65  | 0.55  | 0.81  |
| $T_1$ | $p''$ | 0.60  | 0.58  | 0.31  |
|       | $w''$ | 0.71  | 0.57  | 0.73  |
|       | $t''$ | 0.00  | 0.28  | 0.96  |
| $T_2$ | $p''$ | 1.00  | 0.81  | 0.17  |
|       | $w''$ | 0.00  | 0.34  | 0.85  |
|       | $t''$ | 0.87  | 0.82  | 1.00  |
| $T_3$ | $p''$ | 0.25  | 0.30  | 0.17  |
|       | $w''$ | 0.79  | 0.60  | 1.00  |

3. Pengubahan fungsi tujuan *multi-objective* ke bentuk *single-objective*. Diasumsikan bobot tujuan  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$  dengan  $\alpha_1 =$  bobot waktu,  $\alpha_2 =$  bobot hasil produksi, dan  $\alpha_3 =$  bobot *waste*. Diperoleh fungsi tujuan baru berupa penugasan *single-objective* sebagai berikut:

$$\text{Maksimumkan: } \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 t_{ij}'' x_{ij} + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 p_{ij}'' x_{ij} + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_{ij}'' x_{ij}. \quad (6)$$

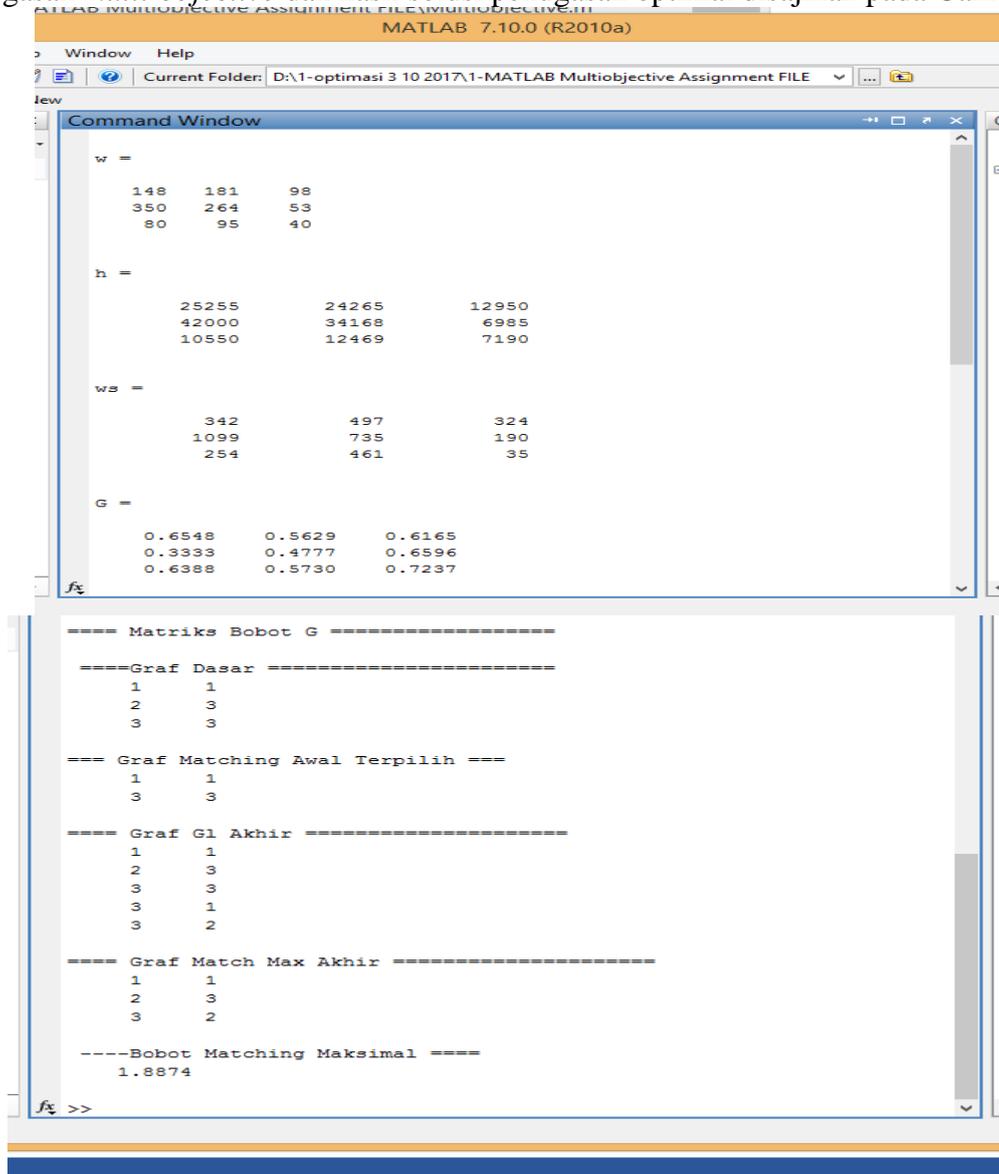
Koefisien-koefisien dari fungsi tujuan (6) disajikan dalam Tabel 4.

Tabel 4. Data hasil produksi IV (*single-objective*)

|       | $P_2$ | $P_1$ | $P_3$ |
|-------|-------|-------|-------|
| $T_1$ | 0.66  | 0.56  | 0.62  |
| $T_2$ | 0.33  | 0.48  | 0.66  |
| $T_3$ | 0.64  | 0.57  | 0.72  |

4. Menyelesaikan masalah penugasan *single-objective* melalui Algoritma Kuhn-Munkres, dengan masukan graf bipartisi komplit berbobot  $G$  dengan bobot  $G$  adalah nilai-nilai pada Tabel 4.

Pada penelitian ini digunakan program Matlab untuk menyelesaikan masalah penugasan *multi-objective* dan hasil solusi penugasan optimal disajikan pada Gambar 4.



Gambar 4. Solusi masalah penugasan hasil program Matlab

Diperoleh *matching* sempurna bobot maksimum  $M' = \{x_1y_1, x_2y_3, x_3y_2\}$  di  $G$ , dengan jumlah waktu, hasil produksi, dan *waste* disajikan pada Tabel 10.

**Penyelesaian masalah penugasan dengan data koefisien pada tabel 1 melalui metode Hungarian**

Langkah 1 : Menjumlahkan semua koefisien dari variable yang sama, seperti disajikan pada Tabel 5.

Tabel 5. Matriks biaya penugasan yang baru dari data pada Tabel 1

|    | <b>P1</b> | <b>P2</b> | <b>P3</b> | <b>Min Row</b> |
|----|-----------|-----------|-----------|----------------|
| T1 | 25745     | 24943     | 13372     | 13372          |
| T2 | 43449     | 35167     | 7228      | 7228           |
| T3 | 10884     | 13025     | 7265      | 7265           |

Langkah 2 : Karena permasalahan pada matriks biaya penugasan yang baru merupakan masalah minimisasi, maka dilanjutkan ke langkah 4.

Langkah 4 : Proses reduksi kolom

Tabel 6. Hasil proses reduksi kolom dari data koefisien pada Tabel 5.

|                   | <b>P1</b> | <b>P2</b> | <b>P3</b> |
|-------------------|-----------|-----------|-----------|
| T1                | 8754      | 5811      | 0         |
| T2                | 32602     | 22179     | 0         |
| T3                | 0         | 0         | 0         |
| <b>Min Column</b> | 3619      | 5760      |           |

Langkah 5 : (Pengecekan baris atau kolom)

Tabel 7. Hasil pengecekan baris atau kolom dari data pada Tabel 6

|    | <b>P1</b> | <b>P2</b> | <b>P3</b> |
|----|-----------|-----------|-----------|
| T1 | 8754      | 5811      | 0         |
| T2 | 32602     | 22179     | 0         |
| T3 | 0         | 0         | 0         |

Langkah 6 : Karena banyaknya tanda □ belum sama dengan banyaknya baris, maka dilanjutkan ke langkah 7.

Langkah 7 : Penentuan nilai minimum dari elemen yang tidak dilalui garis

Tabel 8. Pengurangan nilai minimum dari setiap elemen tidak dilalui garis

|    | <b>P1</b> | <b>P2</b> | <b>P3</b> | <b>Min Row</b> |
|----|-----------|-----------|-----------|----------------|
| T1 | 2943      | 0         | 0         |                |
| T2 | 26791     | 16368     | 0         |                |
| T3 | 0         | 0         | 5811      |                |

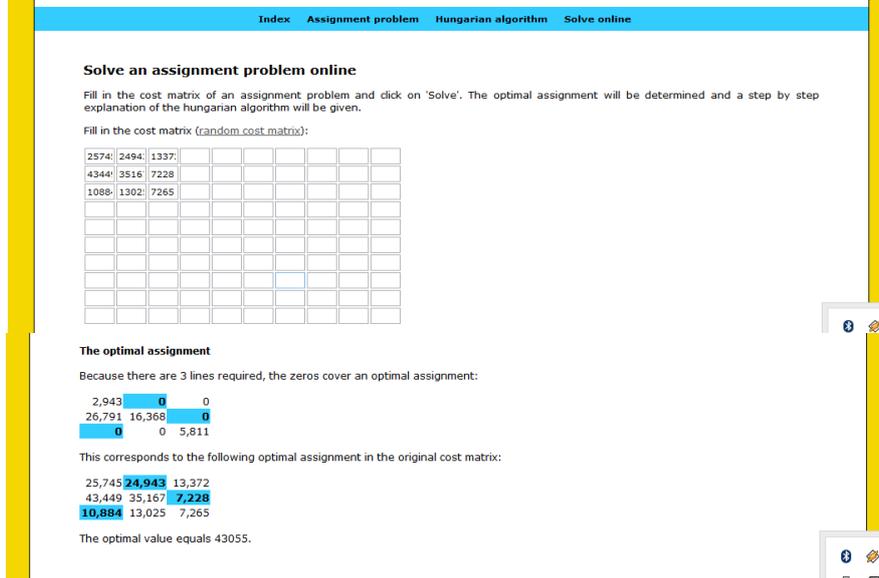
Langkah 8 : kembali ke langkah 5

Tabel 9. Pengecekan baris atau kolom dari data pada Tabel 8

|    | <b>P1</b> | <b>P2</b> | <b>P3</b> |
|----|-----------|-----------|-----------|
| T1 | 2943      | 0         | 0         |
| T2 | 26791     | 16368     | 0         |
| T3 | 0         | 0         | 5811      |

Langkah 9 : Diperoleh solusi penugasan, yaitu tugas  $P_1$  dikerjakan oleh  $T_3$ ,  $P_2$  dikerjakan oleh  $T_1$ , dan  $P_3$  dikerjakan oleh  $T_2$ .

Hasil pengerjaan di atas juga dapat dilakukan melalui software algoritma Hungarian berikut ini.



Gambar 5. Solusi masalah penugasan dengan data koefisien pada Tabel 5 (sumber: <http://www.hungarianalgorithm.com/solve.php>)

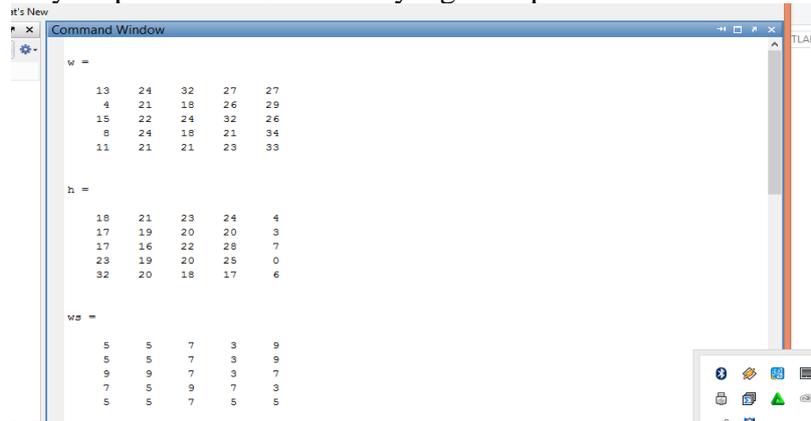
Berikutnya diberikan simulasi kedua dari penugasan *multi-objective* dengan data matriks biaya penugasan disajikan pada Tabel 10.

Tabel 10. Matriks biaya penugasan mula-mula untuk simulasi ke-2

|       |     | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|
| $T_1$ | $t$ | 148   | 181   | 98    | 105   |
|       | $p$ | 25255 | 24265 | 12950 | 13455 |
|       | $w$ | 342   | 497   | 324   | 276   |
| $T_2$ | $t$ | 350   | 264   | 53    | 155   |
|       | $p$ | 42000 | 34168 | 6985  | 15476 |
|       | $w$ | 1099  | 735   | 190   | 346   |
| $T_3$ | $t$ | 80    | 95    | 40    | 78    |
|       | $p$ | 10550 | 12469 | 7190  | 9465  |
|       | $w$ | 254   | 461   | 35    | 105   |
| $T_4$ | $t$ | 115   | 120   | 95    | 100   |
|       | $p$ | 1575  | 11478 | 10850 | 8965  |
|       | $w$ | 235   | 348   | 87    | 98    |

Penyelesaian melalui Algoritma Kuhn-Munkres dan Algoritma Hungarian disajikan pada Tabel 11.

Berikutnya diperhatikan Gambar 7 yang merupakan data untuk simulasi ketiga.



Gambar 7. Data Matriks biaya penugasan mula-mula untuk simulasi ke-3  
 Penyelesaian melalui Algoritma Kuhn-Munkres (Bao dkk., 2007) dan Algoritma Hungarian (Yadaiah-Haragopal, 2016) untuk data ke-3 disajikan pada Tabel 11. Hasil penyelesaian masalah penugasan *multi-objective* dari ketiga data di atas dengan program Matlab dan software algoritma Hungarian dirangkum pada Tabel 11.

Tabel 11. Perbandingan solusi beberapa masalah penugasan

|   | Metode Hungarian  | Metode Kuhn-Munkres                                     |
|---|---|---|
| Penugasan optimal dari data pada Tabel 1  | $P_1 - T_3$   | $P_1 - T_1$   |
|   | $P_2 - T_1$   | $P_2 - T_3$   |
|   | $P_3 - T_2$   | $P_3 - T_2$   |
|   | $t = 314, p = 41800, w = 941$                           | $t = 295, p = 44709, w = 992$                           |
| Penugasan optimal dari data pada Tabel 10 | $P_1 - T_4$   | $P_1 - T_1$   |
|   | $P_2 - T_3$   | $P_2 - T_3$   |
|   | $P_3 - T_1$   | $P_3 - T_4$   |
|   | $P_4 - T_2$   | $P_4 - T_2$   |
|   | $t = 358, p = 42468, w = 1068$                          | $t = 399, p = 53183, w = 985$                           |
| Penugasan optimal dari data pada Gambar 7 | $P_1 - T_5, P_2 - T_1, P_3 - T_2, P_4 - T_3, P_5 - T_4$ | $P_1 - T_2, P_2 - T_3, P_3 - T_4, P_4 - T_5, P_5 - T_1$ |
|   | $t = 94, p = 74, w = 37$                                | $t = 119, p = 101, w = 23$                              |

Solusi masalah penugasan untuk data pada Tabel 1, Tabel 10, dan data pada Gambar 7 dengan algoritma Kuhn-Munkres mempunyai perbedaan dengan penyelesaian melalui metode Hungarian sebagai berikut:

- (a) Pada data ke-1, melalui algoritma Kuhn-Munkres waktu penyelesaian pekerjaan lebih singkat dan tingkat produksi lebih banyak dibandingkan solusi melalui metode Hungarian,
- (b) Pada data ke-2, melalui algoritma Kuhn-Munkres tingkat produksi lebih banyak dan banyaknya produk cacat lebih sedikit dibandingkan solusi melalui metode Hungarian,
- (c) Pada data ke-2, melalui algoritma Kuhn-Munkres tingkat produksi lebih banyak dan banyaknya produk cacat lebih sedikit.

Perbedaan solusi yang diperoleh disebabkan data koefisien fungsi tujuan pada masalah penugasan *multi-objektif* mengandung satuan yang berbeda-beda. Oleh karena itu, untuk mengurangi tingkat kesalahan perlu dilakukan langkah rekonstruksi dan normalisasi pada data koefisien fungsi tujuan tersebut. Hal ini sudah dilakukan pada metode Bao dkk. (2007), akan tetapi langkah ini tidak terdapat pada metode Yadaiah dan Haragopal (2016). Pada penelitian ini diperoleh dugaan bahwa solusi masalah penugasan *multi-objektif* dengan pencarian matching bobot optimal melalui algoritma Kuhn-Munkres lebih optimal dibandingkan solusi melalui metode Hungarian.

## SIMPULAN

Pada artikel ini telah dikaji solusi masalah penugasan *multi-objective* melalui pencarian matching bobot optimal dengan algoritma Kuhn Munkres dan algoritma Hungarian. Berdasarkan simulasi yang dilakukan pada beberapa data masalah penugasan *multi-objective*, diperoleh dugaan bahwa solusi melalui algoritma Kuhn Munkres lebih baik dibandingkan solusi melalui metode Hungarian. Dugaan ini masih perlu proses pembuktian lebih lanjut dan hal ini dapat menjadi penelitian lanjutan.

## DAFTAR PUSTAKA

- Bao, Chiao-Pin, T. Ming-Chi, & T. Meei-ing. 2007. A New Approach to Study The *Multi-Objective* Assignment Problem. *WHAMPOA – An Interdisciplinary Journal*, 53: 123-132.
- Belhou, L., L. Galand, & D. Vanderpooten. 2014. An Efficient Procedure for Finding Best Compromise Solutions to the *Multi-Objective* Assignment Problem. *In Computers & Operations Research*. Elsevier.
- Burkard, R.,; Dell'Amico, M., Martello, S. 2012. Assignment Problems (Revised reprint). *SIAM*. [ISBN 978-1-61197-222-1](#).
- Garrett, J.D., J. Vannucci, R. Silva, D. Dasgupta, and J. Simien. 2007. Applying Hybrid Multiobjective Evolutionary Algorithms to the Sailor Assignment Problem. *In Advances in Evolutionary Computing for System Design*. Springer Verlag.
- Hillier, S. F. & J. G. Lieberman. 2008. *Introduction To Operations Research* (9<sup>th</sup> ed.). New York: Mc Graw-Hill, Inc.
- Przybylski, A., X. Gandibleux, & M. Ehrgott. 2010. A Two Phase Method for *Multi-Objective* Integer Programming and Its Application to the Assignment Problem with Three Objectives. *Journal of Discrete Optimization*, 7: 149-165.
- Yadaiah, V. dan Haragopal, V.V. 2016. Multiobjective Optimization of Time-Cost-Quality Using Hungarian Algorithm. *American Journal of Operations Research* 6: 31-35.