



## Geometri, Teknologi, dan Bagaimana Penggunaannya dalam Kaitannya dengan Keterampilan Pembuktian

Hery Sutarto, Wuryanto

Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Kota Semarang  
hery.mat@mail.unnes.ac.id

### Abstrak

Geometri mendapatkan porsi yang cukup besar yang didapatkan oleh mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA UNNES. Mulai dari Geometri Dasar, Geometri Ruang, Geometri Analitik, Geometri Transformasi, dan Geometri Non-Euclid. Di dalam geometri dikenal dua macam problem, yaitu *problem to find* (menghitung) dan *problem to proof* (membuktikan). Pada kebanyakan mahasiswa merasakan kesulitan pada jenis *pembuktian*. Kebiasaan yang dilakukan dalam menyelesaikan problem pembuktian mengikuti tahapan sebagai berikut: *Deskriptif Geometry* ► *Geometric Construction* ► *proof*. Tahapan tersebut dirasakan masih terdapat celah untuk menuju kebenaran matematika. Di lain pihak penggunaan teknologi sudah merangsek ke dalam dunia pendidikan, baik untuk keperluan belajar maupun untuk keperluan mengajar. Khusus dalam bidang geometri, muncul istilah *Dynamic Geometry Software* (DGS). Teknologi dalam penggunaannya untuk belajar maupun mengajar hanya bersifat membantu atau lebih tepatnya sebagai alat bantu. Oleh karena itu penggunaannya harus tepat. Tepat siapa yang menggunakannya, tepat kapan menggunakannya, tepat materinya, tepat audiennya. Tulisan ini akan memaparkan secara lugas bagaimana memanfaatkan DGS secara tepat dalam kaitannya dengan geometri dan proses pembuktian berdasarkan hasil riset pengembangan yang telah dilakukan.

**Kata kunci:** geometri, teknologi, pembuktian

### PENDAHULUAN

Sejak tahun 2010, mahasiswa Jurusan Matematika mulai melirik penggunaan teknologi dalam riset sebagai syarat memperoleh gelar Sarjana Pendidikan Matematika. Penggunaan teknologi yang diusung oleh mahasiswa adalah pemanfaatan software-software dinamis (*dynamic software*), yang cenderung dimanfaatkan pada materi-materi geometri (*Dynamic Geometry Software*). Software yang sering dimanfaatkan dan tergolong *Dynamic Geometry Software* seperti Cabri log, the Geometers' Sketchpad, Geogebra, Microsoftmath, Cabri 3D disamping software lainnya. Masing-masing *Dynamic Geometry Software* membawa *tool-tool* yang *powerfull* ketika digunakan secara tepat.

Penelusuran dari skripsi mahasiswa tersebut menghasilkan suatu simpulan ada *disoriented* pemanfaatan *Dynamic Geometry Software* tersebut. Mereka menunjukkan kecenderungan teknologi mampu melakukan segalanya, termasuk mampu berperan sebagai *proofer*. Jika demikian keadannya, maka kemampuan-kemampuan matematika seperti pemahaman, penalaran, koneksi, komunikasi, representasi menjadi hilang. Demikian juga kemampuan-kemampuan mekanis, seperti kemampuan menggunakan alat-alat gambar (jangka, penggaris) sekaligus kemampuan menggambar juga tidak bisa muncul. Pandangan ini sesuai dengan yang dikemukakan Hanna (Tall, Ed. 1991)

menjelaskan tentang bukti matematis yang meliputi : a) penekanan bukti formal, b) pandangan terhadap matematika, c) faktor-faktor dalam bukti yang diterima, dan penalaran yang hati-hati. Dengan dasar itu, maka tulisan ini sebagai upaya menempatkan teknologi (*Dynamic Geometry Software*) secara tepat, khususnya pada mata kuliah Geometri kaitannya dengan kemampuan pembuktian.

## Geometri

Geometri mendapatkan porsi yang cukup banyak secara kuantitas selama mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang mengikuti perkuliahan. Geometri Dasar (3 SKS), Geometri Ruang (3 SKS), Geometri Analitik (3 SKS), Geometri Transformasi (2 SKS), dan Geometri Non-Euclid (3 SKS). Besarnya kuantitas mata kuliah geometri tersebut ternyata bertolak belakang dengan anggapan dan respon akademik dari mahasiswa yang menganggap bahwa geometri merupakan kelompok mata kuliah yang sulit. Kesulitan dimulai sejak mata kuliah Geometri Dasar pada semester 1. Kesulitan tersebut diindikasikan karena mahasiswa tingkat pertama “kaget” dengan cara dan objek yang dipelajari dibandingkan ketika mereka masih berada pada jenjang sekolah menengah. Ketika mereka masih duduk di sekolah menengah, mereka belajar matematika didominasi dengan matematika yang sifatnya mekanis, yakni berhitung dan berhitung dengan beragam “rumus” yang sudah didapatkan (*problem to find*). Tetapi masuk pada jenjang perkuliahan mereka dihadapkan pada problem pembuktian (*problem to proof*). Hal senada dikatakan Angel M. Recio And Juan D. Godino (2001) bahwa mahasiswa tingkat satu memiliki kemampuan yang terbatas dalam membuat argumen deduktif, meskipun dalam pembuktian yang dasar.

Memasuki semester 2, mahasiswa dihadapkan pada mata kuliah Geometri Ruang. Kesulitan yang dirasakan pada mata kuliah Geometri Dasar berakumulasi pada mata kuliah ini (Geometri Ruang), karena mata kuliah Geometri Dasar menjadi prasyarat pada mata kuliah Geometri Ruang. Dengan kata lain, ketika mahasiswa masih lemah dalam mata kuliah geometri dasar, maka kemungkinan besar akan menemui kendala juga ketika belajar Geometri Ruang. Selain faktor yang di bawa oleh materi geometri Dasar, pada mata kuliah Geometri Ruang ada faktor yang disebut “*spatial ability*” atau kemampuan pandang ruang.

Usaha yang beragam sudah dilakukan, termasuk membawa teknologi dalam proses pembelajaran. Telihat dalam data perpustakaan Jurusan matematika, sejak tahun 2010 sampai tahun 2017 ada kisaran 20 penelitian yang dilakukan oleh mahasiswa menggunakan *Dynamic Geometry Software* (DGS), diantaranya *the Geometers' Sketchpad*, Cabri, Cabri 3D, Geogebra, *Microsof Math*, atau dalam bentuk aplikasi yang dibuat dengan Ms. Office berupa *powerpoint*.

## Pembuktian

Dalam dokumen kurikulum nasional (Kemdikbud, 2006) tertulis tujuan siswa belajar matematika adalah pemahaman, penalaran, komunikasi, koneksi, dan representasi dalam matematika. Walaupun sekarang kurikulum yang terbaru adalah kurikulum 2013, tetapi tujuan tersebut masih relevan, apalagi dalam dokumen kurikulum 2013 tidak tertuang tujuan pembelajaran matematika secara tersurat lagi. Tujuan tersebut dalam dokumen yang berbeda, Prinsip-prinsip dan standar NCTM memuat disebut standar proses, yaitu pemecaan masalah, pemahaman dan bukti,

komunikasi hubungan, dan penyajian. Dalam dokumen ini bukti disandingkan dengan penalaran (*reasoning and proof*).

Jika pemecahan masalah merupakan fokus dari matematika, maka pemahaman merupakan cara berpikir logis yang membantu kita memutuskan apakah dan mengapa jawaban kita logis. Para mahasiswa perlu mengembangkan kebiasaan memberi argumen atau penjelasan sebagai bagian utuh dari setiap penyelesaian. Menyelidiki jawaban merupakan proses yang dapat meningkatkan pemahaman konsep. Kebiasaan memberikan alasan dapat dimulai dari TK. Dikatakan lebih lanjut (de Walle, 2006) Program pengajaran dari pra TK sampai kelas 12 harus memungkinkan siswa untuk: mengenal pemahaman dan bukti sebagai aspek yang mendasar dalam matematika; membuat dan menyelidiki dugaan-dugaan matematis; mengembangkan dan mengevaluasi argumen dan bukti matematis; memilih dan menggunakan berbagai macam pemahaman dan metode pembuktian.

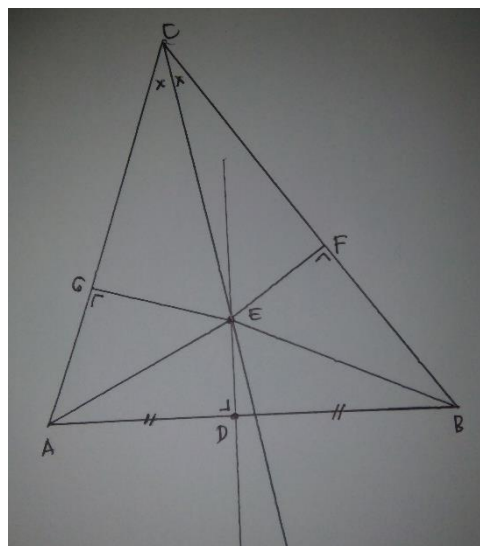
### Teknologi

Teknologi menjadi satu dari enam prinsip dan standar matematika sekolah untuk mencapai pendidikan matematika yang berkualitas tinggi, yakni kesetaraan, kurikulum, pengajaran, pembelajaran, dan teknologi. Prinsip tersebut menjelaskan bahwa keunggulan dalam pendidikan matematika melibatkan lebih banyak hal di samping tujuan-tujuan materinya. Teknologi penting dalam belajar dan mengajar matematika; teknologi mempengaruhi matematika yang diajarkan dan meningkatkan proses belajar siswa. (NCTM, 2000, hal 24). Teknologi memungkinkan siswa untuk memfokuskan diri pada ide-ide matematika, pemahaman dan penyelesaian soal yang tidak mungkin dikerjakan tanpa bantuan komputer.

Berikut adalah contoh pentingnya kehadiran teknologi, ketika disandingkan dengan pembuktian dalam geometri.

“Buktikan bahwa semua segitiga adalah segitiga sama kaki”

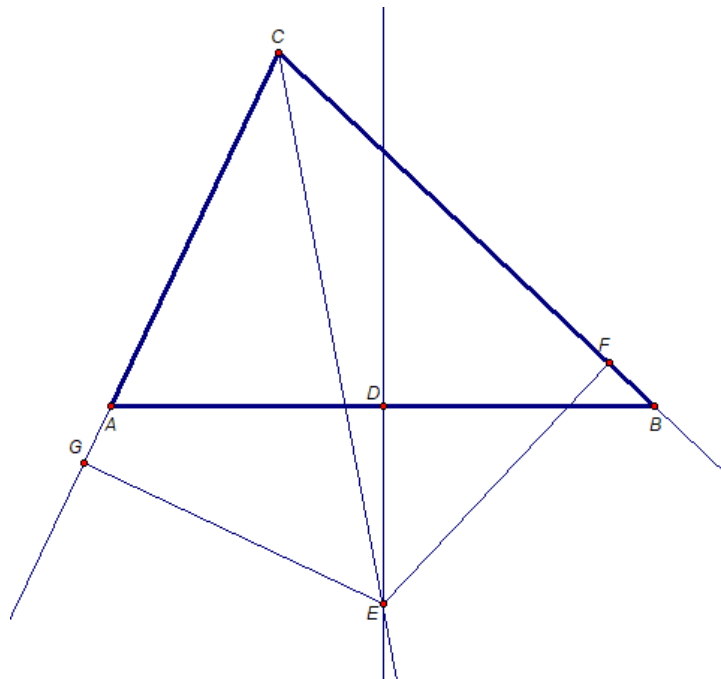
Pada proses pembuktian yang biasa dilakukan, maka tahapannya sebagai berikut. *Deskriptif Geometry* ► *Geometric Construction* ► *proof*. Produk dari langkah-langkah tersebut adalah seperti pada gambar 1 di bawah ini.



Gambar 1: lukisan geometri dari problem yang disajikan dengan menggunakan *paper pencil based*

Dengan langkah-langkah pembuktian secara deduksi aksiomatis yang merupakan kelanjutan dari gambar yang dihasilkan, maka kita mendapatkan  $AC = BC$ . Artinya segitiga  $ABC$  adalah segitiga samakaki. Dalam benak kita dan mahasiswa yakin bahwa bukti tersebut salah. Tapi ketika diruntut proses pembuktian tersebut tiada cacat, semua argumen yang diberikan “benar” secara matematis.

Ternyata kesalahan bukan pada proses pembuktian yang deduksi aksiomatis, tetapi pada konstruksi gambar, yang tampak benar dan biasa dilakukan di kelas. Menarik garis bagi, maka kita cukup membubuhkan tanda bahawa dua sudut tersebut sama. Membuat garis sumbu, cukup membubuhkan tanda tengah-tengah dan tegak lurus. Membuat garis tegak lurus, cukup membubuhkan tanda tegak lurus dari konstruksi yang telah dibuat. Tanpa kita yakin apakah sudah tepat secara empirik konstruksi kita. Gambar 2 di bawah ini merupakan hasil lukisan dengan menggunakan software *the Geometers' Sketchpad*. Tampak pada konstruksi tersebut perpotongan antara garis bagi sudut C dan sumbu AB selalu berada di eksterior segitiga  $ABC$ . Bandingkan dengan konstruksi pada gambar 1. Demikian juga ketika menarik garis yang tegak lurus ke sisi AC dan BC melalui titik potong tersebut, diperlihatkan satu diantaranya berada di *interior* segitiga  $ABC$  dan satu lainnya di *eksterior* segitiga  $ABC$ .



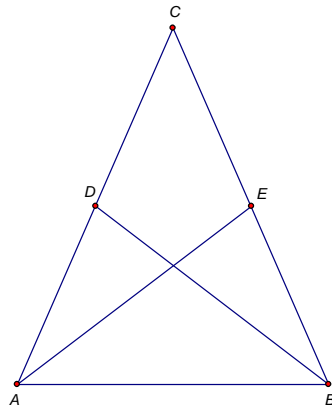
Gambar 2: Konstruksi dari persoalan yang sama dengan menggunakan *the Geometers' Sketchpad*

Teknologi merupakan sarana penting untuk mengajar dan belajar matematika secara efektif; teknologi memperluas matematika yang dapat diajarkan dan meningkatkan belajar siswa. Dilihat sebagai bagian utuh dari alat-alat pembelajaran, teknologi dapat memperluas lingkup mateati pemebelajaran yang dapat dipelajari

siswa dan dapat memperluas soal yang dapat dikerjakan oleh siswa (Ball & Stacey, 2005; NCTM Position Statement, 2005)

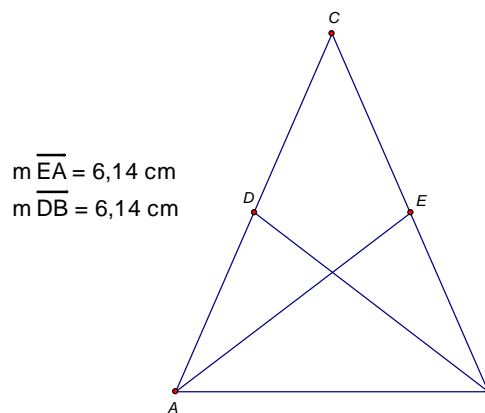
Contoh kasus *disoriented* pada penggunaan software the Geometers Sketchpad.  
Kasus 1

*Buktikan bahwa dalam segitiga sama kaki; garis berat ke sisi-sisi yang sama, sama panjang juga.*



Gambar 3 : konstruksi segitiga samakaki yang dikonstruksi dengan the Geometers Sktvps.

Dengan menggunakan tool yang ada dalam software tersebut, maka kita mengkonstruksi segitiga ABC sama kaki, dengan  $AC = BC$ . Kemudian dengan tool *midpoint*, maka ditentukan titik E dan titik D (lihat gambar 3). Karena yang akan dibuktikan adalah garis berat kita hubungkan AE dan BD. Setelah itu, dengan tool *measure-lenght* atau *measure-distance*, maka secara otomatis dalam layar muncul panjang EA dan DB yang ternyata memang besarnya sama (sama panjang). Lihat Gambar 4



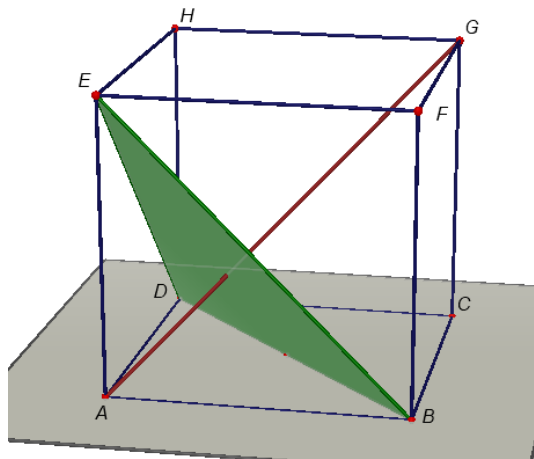
Gambar 4: bentuk tampilan dari the Geometers Sketchpad dengan menu *measure-lenght* atau *distance*

Sampai pada tahap ini, selesai dan dianggap bahwa sudah terbukti *dalam segitiga sama kaki; garis berat ke sisi-sisi yang sama, sama panjang juga.*

Kasus 2, dimana *software* cabri 3D digunakan

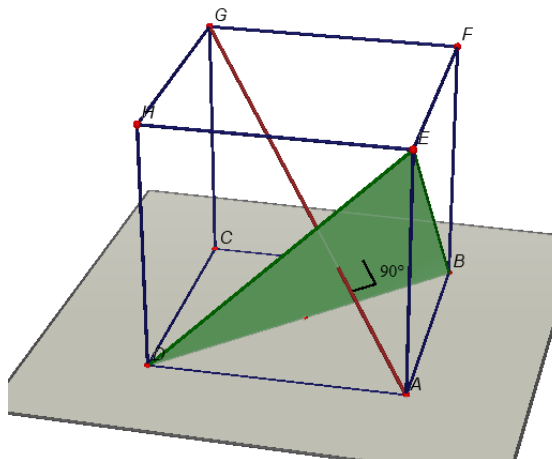
Tunjukkan bahwa sudut yang dibentuk oleh diagonal AG dan bidang BDE adalah  $90^\circ$  ( $AG \perp BDE$ )

*Software* Cabri 3D dengan mudah dengan menggunakan tool *cube*, maka langsung dapat dikonstruksi sebuah kubus. (lihat Gambar 5)



Gambar 5: Konstruksi dari problem dengan menggunakan Cabri 3D

Setelah mengkonstruksi AG dan bidang BDE, maka dengan menggunakan tool *measure-angle*, tampak bahwa sudut yang dibentuk oleh AG dan bidang BDE adalah  $90^\circ$ .



Gambar 6: Cabri 3D menyediakan menu “*measure-angle*”, sehingga di tampilkan sudut yang dibentuk oleh AG dan bidang BDE adalah  $90^\circ$

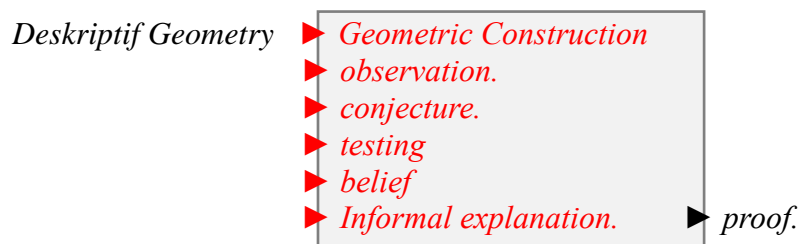
Jika penggunaan teknologi hanya sebatas seperti yang digambarkan pada dua kasus di atas, maka penggunaan teknologi tidak banyak membantu dalam proses belajar

dan pemerolehan pengetahuan. Yang ada malah menghilangkan kemampuan-kemampuan matematis seperti yang dibidik oleh tujuan matematika diajarkan. Dengan kata lain, penggunaan yang seperti ini belum tepat. Seharusnya teknologi meningkatkan proses belajar matematika karena memungkinkan eksplorasi yang lebih luas dan memperbaiki penyajian ide-ide matematika. Teknologi digunakan untuk “menuntun” berpikir atau sebagai bukti empiris dari suatu persoalan yang ditemui. Teknologi juga dapat digunakan juga untuk memperjelas teorema sebelum dibuktikan secara deduksi aksiomatis.

### Diskusi

Teknologi akan dapat membantu dalam rangkaian proses pembuktian jika digunakan secara tepat. Tidak masuk terlalu jauh, dan terbatas. Jika tidak, maka penggunaan teknologi malah akan memberikan efek negatif bagi penggunanya. Banyak kemampuan-kemampuan yang menjadi hilang, bahkan *mathematics culture* seperti berpikir kritis, berpikir kreatif, pemahaman, penalaran, komunikasi, koneksi, dan representasi semakin pudar.

Batasan penggunaan teknologi (*Dynamic Geometri Software*) dalam proses pembuktian dalam geometri digambarkan seperti pada gambar 6 di bawah ini.



Gambar 6: Peran teknologi dalam proses pembuktian berada pada kegiatan *geometric construction, observation, conjecture, testing, belief, informal explanation*

Ketika berbicara penggunaan teknologi pada jenjang perguruan tinggi, maka teknologi tersebut harus ditempatkan di tempat yang tepat. Maksudnya teknologi digunakan sesuai dengan fungsinya, yaitu hanya sebagai *bridge* untuk menuju ke fokus utama seorang mahasiswa belajar geometri, yaitu kemampuan pembuktian. Apa yang dihasilkan dan ditampilkan di dalam komputer melalui *Dynamic Geometri Software* bukanlah suatu *proof*, atau hanya bisa kita sebut sebagai *empirical proof* yang dalam ilmu matematika kebenarannya belum dapat dipertanggungjawabkan.

Hadirnya bukti empirik, sesuai dengan konsep proses pembuktian yang diungkap oleh Tall (1991) mengajukan konsep bukti generik sebagai cara untuk meningkatkan pemahaman membaca bukti suatu pernyataan. Kemudian, Leron (Tall, 1991) menawarkan bukti terstruktur dengan menggabungkan metode penyajian formal dan informal ke dalam suatu pembuktian, yang bukan bertujuan untuk meyakinkan, tetapi untuk membantu pembaca dalam meningkatkan pemahamannya terhadap gagasan di belakang bukti itu.

Dalam pembuktian matematika, ungkapan dosen dan mahasiswa mendorong terjadinya interaksi di antara mahasiswa dan dosen dalam suatu diskusi transaktif dan fasilitatif. Dalam diskusi transaktif peserta diskusi melaksanakan penalaran transaktif (*transactive reasoning*), yaitu mengkritik, menjelaskan, mengklarifikasi dan mengelaborasi suatu gagasan (Berkowitz dalam Blanton dkk, dalam Sumarmo, 2003).

Kehadiran teknologi berupa Dynamic Geometry Software akan semakin meningkatkan interaksi tersebut.

## **SIMPULAN**

Kegiatan pembuktian dalam geometri dengan menggunakan teknologi *Dynamic Geometry Software* mendekati apa yang tertulis pada bagian pendahuluan dari standar profesional memuat lima perubahan pokok dalam pengajaran matematika yang diperlukan agar siswa dapat mengembangkan kemampuan matematikanya. Guru perlu Mengubah kelas dari sekedar kumpulan siswa mejadi komunitas matematika; menjadika logika dan bukti matematika sebagai alat pembenaran dan mejauhkan otoritas guru untuk memutuskan suatu kebenaran; mementingan pemahaman daripada hanya mengingat prosedur; mengaitkan matematika, ide-ide dan apikasinya, dan tidak memberlakukan matematika sebagai kumpulan konsep dan prosedur yang terasingkan.

## **DAFTAR PUSTAKA**

- Ball & Stacey, K. 2005. Teaching Strategies for developing judicious Technology use. In W.J. Malasky & P.C. Elliot (Eds), *Technology Supported Mathematics Learning Environmet* (pp.27-44). Reston, VA: National Council of Teaching of Mayematics
- John A. Van de Walle. Ed.6. 2006. *Sekolah Dasar dan Menengah, Matematika Pengembangan Pengajaran*. Jakarta: Erlangga
- National Council of Teacher of Mathematics. 2000. *Principles and Standars for School Mathematics*. Reston, VA. Author
- Sumarmo, U. 2003. *Pembelajaran Keterampilan Membaca Matematika Pada Siswa Sekolah Menengah*. Disampaikan pada Seminar Nasional Pendidikan MIPA di FPMIPA UPI.
- Tall, D. 1991. *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Angel M. Recio And Juan D. Godino. Institutional And Personal Meanings Of Mathematical Proof *Educational Studies in Mathematics* 48, 83–99, 2001. © 2002 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.