PRISMA 1 (2018)
PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/

Keberlakuan Teorema pada Beberapa Struktur Aljabar

Mashuri, Kristina Wijayanti, Rahayu Budhiati Veronica, Isnarto

Jurusan Matenmatika FMIPA UNNES
E-mail: mashuri.mat@mail.unnes.ac.id

Abstrak

Aljabar abstrak merupakan salah satu bidang kajian dalam matematika. Kajian dalam aljabar abstrak antara lain tentang struktur grup dan ring yang meliputi definisi dan sifat-sifatnya (teorema). Setiap definisi diikuti oleh contoh-contoh sedangkan sifat/teorema diikuti oleh bukti. Setiap teorema dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu masalah yang terkait dengan definisi atau untuk pembuktian teorema berikutnya. Pada prinsipnya, suatu teorema dapat digunakan apabila teorema tersebut sudah dibuktikan. Oleh karenanya dalam kajian aljabar abstrak yang merupakan topik utama adalah pembuktian teorema. Bentuk umum dari teorema adalah implikasi, yang terdiri atas hipotesis dan konklusi (simpulan). Ada beberapa teorema yang menarik untuk dikaji terkait dengan struktur grup atau ring, seperti homomorfisma dan isomorfisma. Sebagai contoh, dalam homomorfisma grup berlaku elemen identitas selalu dikawankan dengan elemen identitas, invers suatu elemen dikawankan dengan invers dari peta elemen tersebut, peta subgrup dari domain merupakan subgrup dari kodomain, prapeta subgrup dari kodomain merupakan subgrup dari domain. Hal yang serupa berlaku pada homomorfisma ring. Dalam kajian grup dan ring masih banyak teorema yang saling terkait keduanya. Tulisan ini bertujuan untuk mengkaji keberlakuan beberapa teorema yang terdapat dalam grup dan ring maupun pengembangan dari keduanya.

Kata kunci: *Teorema grup, ring, struktur aljabar.*

PENDAHULUAN

Suatu struktur aljabar terdiri atas suatu himpunan dan operasi biner yang memenuhi aksioma yang disyaratkan. Grup merupakan struktur dasar dalam mempelajari aljabar abstrak. Grup terdiri atas sebuah himpunan tak kosong dan sebuah operasi yang memenuhi beberapa aksioma. Dari definisi grup selanjutnya dikembangkan dengan macam-macam grup yang diperoleh dengan menambahkan aksioma yang ada, contohnya grup abelian. Dari definisi selanjutnya diikuti oleh teorema-teorema yang terkait.

Dari definisi grup, dapat dibentuk struktur aljabar lain dengan menambahkan satu operasi biner dan beberapa aksioma, yakni ring. Suatu himpunan R dengan operasi penjumlahan dan perkalian dikatakan ring apabila himpunan R merupakan grup komutatif terhadap operasi penjumlahan dan semigrup terhadap operasi perkalian, serta bersifat distributif perkalian terhadap penjumlahan (Fraleigh, 1989). Dengan menambahkan aksioma yang ada dalam suatu ring, maka diperoleh macam-macam ring, seperti ring dengan elemen satuan, ring komutatif, dan sebagainya. Untuk suatu himpunan yang tertentu, maka dapat dibentuk ring khusus, contohnya adalah ring polinomial. Seperti dalam grup, terdapat banyak teorema yang terkait dengan ring.

Misalkan R ring, suatu polinomial $f(x)$ dalam indeterminate x atas R adalah jumlahan tak hingga $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ dengan $a_i = 0$ kecuali sebanyak berhingga nilai i. Selanjutnya a_i dinamakan koefisien dari $f(x)$. Himpunan semua polinomial dalam indeterminate x dan koefisien di R disimbolkan dengan $R[x]$. Himpunan $R[x]$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian pada polinomial membentuk struktur ring yang disebut ring polinomial (Fraleigh, 1989).

Dalam kajian grup dan ring, terdapat beberapa teorema yang saling berkaitan, baik nama maupun bentuk teoremanya. Suatu teorema yang berlaku pada suatu struktur aljabar dapat dikatakan juga berlaku pada struktur aljabar yang lain, apabila struktur aljabar yang kedua diperoleh dari struktur aljabar yang pertama hanya dengan menambahkan suatu aksioma.

PEMBAHASAN

Definisi Grup dan Ring

Pada bagian ini disajikan beberapa definisi dan teorema yang terkait dengan kajian grup dan ring.

1. **Grup**
   a. Definisi 1 (Definisi Grup)
   Misalkan G himpunan tak kosong dan operasi $*$ merupakan operasi biner pada G. Himpunan G dilengkapi dengan operasi * ditulis $< G,* >$ dikatakan grup apabila memenuhi:
      i. Operasi $*$ pada himpunan G bersifat assosiatif.
      ii. Himpunan G memiliki elemen netral terhadap operasi $*$.
      iii. Setiap elemen di G memiliki invers terhadap operasi $*$.

   b. Definisi 2 (Definisi Grup Abelian)
   Grup $< G,* >$ dinamakan grup abelian (komutatif) apabila $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in G$

   c. Teorema 1 (Teorema Kanselasi pada Grup)
   Diketahui $< G,* >$ grup dan $a, b, c \in G$.
      i. Jika $a * b = a * c$ maka $b = c$. (Hukum kanselasi kiri)
      ii. Jika $b * a = c * a$ maka $b = c$. (Hukum kanselasi kanan)

   d. Definisi 3 (Definisi Subgrup)
   Misalkan G grup, H himpunan tak kosong dan H subset G. H dinamakan subgrup dari G apabila H merupakan grup terhadap operasi yang didefinisikan pada G.

   e. Teorema 2
   Diketahui G grup dan H subset G. H subgrup dari G jika dan hanya jika $ab^{-1} \in H$ untuk setiap $a. b \in H$.

   f. Definisi 4 (Definisi Koset)
   Misalkan G grup, H subgrup dari G dan $a \in G$.
      i. $aH = \{ah | h \in H\}$ dinamakan koset kiri dari H yang memuat a,
      ii. $Ha = \{ha | h \in H\}$ dinamakan koset kanan dari H yang memuat a.

   Apabila $aH = Ha$ atau koset kiri sama dengan koset kanan maka H dinamakan subgrup normal.

   g. Grup Faktor
   Teorema 5: Misalkan G grup dan H subgrup normal dari G. Operasi (aH)(bH)=abH terdefinisi dengan baik jika dan hanya jika $gH = Hg$ untuk setiap $g \in G$.
   Teorema 6: Jika G grup dan H subgrup normal dari G maka G/H dengan operasi (aH)(bH)=abH membentuk grup.

Definisi: Grup G/H terhadaap operasi (aH)(bH)=abH dinamakan grup faktor dari G modulo H.

h. Definisi 5 (Definisi Homomorfisma Grup)
Misalkan G dan G' grup. Pemetaan $\varphi: G \to G'$ dinamakan homomorfisma grup apabila $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ untuk setiap $a, b \in G$.

i. Definisi 6 (Definisi Macam-macam Homomorfisma pada Grup)
Misalkan $\varphi: G \to G'$ homomorfisma grup.
    i. φ dinamakan monomorfisma apabila φ injektif
    ii. φ dinamakan epimorfisma apabila φ surjektif
    iii. φ dinamakan isomorfisma apabila φ bijektif
    iv. φ dinamakan endomorfisma apabila $G = G'$
    v. φ dinamakan automorfisma apabila $G = G'$ dan φ bijektif.

j. Teorema 7 (Teorema pada Homomorfisma Grup)
Misalkan $\varphi: G \to G'$ homomorfisma grup.
    i. Jika e elemen netral di G maka $\varphi(e) = e'$ dengan e' elemen netral di G
    ii. Jika $a \in G$ maka $\varphi(a^{-1}) = [\varphi(a)]^{-1}$
    iii. Jika H subgrup dari G maka $\varphi(H)$ subgrup dari G'
    iv. Jika K' subgrup dari G' maka $\varphi^{-1}(K')$ subgrup dari G.

k. Definisi 6 (Definisi Kernel)
Jika $\varphi: G \to G'$ homomorfisma grup maka $\varphi^{-1}(\{e'\}) = \{x \in G | \varphi(x) = e'\}$ dinamakan kernel dari φ dan disimbolkan dengan Ker(φ).

l. Teorema 8 (Teorema Kernel pada Grup)
Misalkan $\varphi: G \to G'$ homomorfisma grup. Diperoleh φ injektif jika dan hanya jika Ker(φ)= $\{e\}$.

m. Teorema 9 (Teorema Utama Homomorfisma Grup)
Jika $\varphi: R \to R'$ homomorfisma ring dengan Ker(φ)= H maka R/H $\cong \varphi(R)$.

2. Ring

a. Definisi 7 (Definisi Ring)
Misalkan R himpunan tak kosong, operasi penjumlahan $(+)$ dan operasi pergandaan $(.)$ merupakan opersi biner pada R. Himpunan R bersama-sama dua operasi tersebut $< R, +, . >$ dikatakan ring apabila memenuhi:
    i. $< R, + >$ grup abelian
    ii. Operasi pergandaan bersifat assosiatif pada R
    iii. Berlaku hukum distributif kanan dan kiri
    Hukum distributif kanan: $a(b + c) = ab + ac$ untuk setiap $a, b, c \in R$
    Hukum distributif kiri: $(a + b)c = ac + bc$ untuk setiap $a, b, c \in R$

b. Definisi 8 (Definisi Ring Abelian)
Ring $< R, +, . >$ dinamakan ring abelian (komutatif) apabila operasi pergandaan bersifat komutatif pada R yaitu $a.b = b.a$ untuk setiap $a, b \in R$.

c. Teorema 10 (Teorema Kanselasi pada Ring)
Diketahui D daerah integral dan $a, b, c \in D$ dengan $a \neq 0$.
    i. Jika $ab = ac$ maka $b = c$. (Hukum kanselasi kiri)
    ii. Jika $ba = ca$ maka $b = c$. (Hukum kanselasi kanan)

d. Definisi 9 (Definisi Subring)

Misalkan R ring, H himpunan tak kosong dan H subset R. H dinamakan subring dari R apabila H merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan yang didefinisikan pada R.

e. Teorema 11 (Teorema pada Subring)

Diketahui R ring dan H subset R. H subring dari R jika dan hanya jika $ab \in H$ dan $a - b \in H$ untuk setiap $a.b \in H$.

f. Definisi 10 (Definisi Ideal)

Misalkan R ring, dan I subset R. I dinamakan ideal dari R apabila:

i. $< I, +>$ merupakan subgrup dari $< R, +>$

ii. $rI \subset I$ untuk setiap $r \in R$

iii. $Ir \subset I$ untuk setiap $r \in R$.

Apabila I memenuhi i), dan ii), I dinamakan ideal kiri. Apabila I memenuhi i), dan iii), I dinamakan ideal kanan.

g. Ring Faktor

Teorema 12: Misalkan H subring dari R dan $a, b \in R$. Operasi (a+H)(b+H)=ab+H terdefinisi dengan baik jika dan hanya jika H ideal dari R.

Teorema 13: Jika R ring dan I ideal dari R maka R/I= $\{r + I | r \in R\}$ dengan operasi (a+H)+(b+H)=(a+b)+H dan (a+H)(b+H)=ab+H untuk setiap a,b$\in R$ membentuk ring.

Definisi 11: Ring R/I terhadap operasi (a+H)+(b+H)=(a+b)+H dan (a+H)(b+H)=ab+H untuk setiap a,b$\in R$ dinamakan ring faktor dari R modulo I.

h. Definisi 12 (Definisi Homomorfisma Ring)

Misalkan R dan R' ring. Pemetaan $\varphi: R \to R'$ dinamakan homomorfisma ring apabila untuk setiap $a, b \in R$ berlaku:

i. $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

ii. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

i. Definisi 13 (Definisi Macam-macam Homomorfisma pada Ring)

Misalkan $\varphi: R \to R'$ homomorfisma ring.

1. φ dinamakan monomorfisma apabila φ injektif
2. φ dinamakan epimorfisma apabila φ surjektif
3. φ dinamakan isomorfisma apabila φ bijektif
4. φ dinamakan endomorfisma apabila $R = R'$
5. φ dinamakan automorfisma apabila $R = R'$ dan φ bijektif.

j. Teorema 14 (Teorema pada Homomorfisma Ring)

Misalkan $\varphi: R \to R'$ homomorfisma ring.

1. Jika 0 elemen netral di R maka $\varphi(0) = 0'$ dengan $0'$ elemen netral di R'
2. Jika $a \in R$ maka $\varphi(-a) = -\varphi(a)$
3. Jika H subring dari R maka $\varphi(H)$ subring dari R'
4. Jika K' subring dari R' maka $\varphi^{-1}(K')$ subring dari R.

k. Definisi 14 (Definisi Kernel Ring)

Jika $\varphi: R \to R'$ homomorfisma ring maka $\varphi^{-1}(\{e'\}) = \{x \in G | \varphi(x) = e'\}$ dinamakan kernel dari φ dan disimbolkan dengan Ker(φ).

l. Teorema 15 (Teorema Kernel pada Ring)

Misalkan $\varphi: R \to R'$ homomorfisma ring. Diperoleh φ injektif jika dan hanya jika Ker(φ)= $\{e\}$.

m. Teorema 16 (Teorema Utama Homomorfisma Ring)
Jika $\varphi: R \to R'$ homomorfisma ring dengan Ker(φ)= H maka R/H $\cong \varphi(R)$.

3. Ring Armendariz

Suatu syarat dapat ditambahkan dalam definisi suatu struktur aljabar sehingga diperoleh struktur yang baru. Demikian pula dengan syarat yang ada dalam definisi ring. Armendariz (1974) mengemukakan lemma sebagai berikut, misalkan R ring tereduksi, $f(x), g(x) \in R[x]$ dengan $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, dan $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ maka $f(x)g(x) = 0$ jika dan hanya jika $a_i b_j = 0$ untuk setiap i,j (Armendariz, 1974). Rege dan Chhawchharia (1997), memperkenalkan ring Armendariz yaitu suatu ring yang memiliki sifat Armendariz. Struktur dan sifat dari ring Armendariz telah banyak dikaji oleh para peneliti, Kim dan Lee (2000) menjelaskan hubungan antara ring Armendariz dan ring tereduksi, Antoine (2008) mengkaji himpunan elemen nilpoten pada ring Armendariz, serta Kwak *et al.* (2012) mengkaji tentang sifat Armendariz pada ideal dari suatu ring.

Telah banyak penelitian yang dilakukan oleh para ahli terkait ring polinomial miring, Amir (2012) menjelaskan tentang pembentukan ring polinomial miring dari suatu quaternion dan pembentukan ring polinomial miring bersusun atas automorfisma pada ring polinomial miring. Nam *et al.* (2013) mengkaji tentang struktur dasar dari hasil kali koefisien-koefisien pada ring polinomial miring.

Keberlakuan Teorema pada Grup dan Ring

Dengan mengkaji/membandingkan beberapa definisi yang ada dalam kajian grup dan ring, maka dapat diselidiki keberlakuan dari suatu teorema. Berikut ini adalah beberapa teorema yang dimaksud.

1. Teorema Kanselasi

Bentuk Teorema Kanselasi yang berlaku pada ring, hanya terkait dengan operasi perkalian. Namun demikian, karena pada suatu ring merupakan grup (abelian) terhadap operasi penjumlahan, maka Teorema Kanselasi pada ring berlaku juga untuk operasi yang pertama (penjumlahan), sehingga jika dituliskan secara lengkap Teorema Kanselasi pada ring menjadi sebagai berikut.

Teorema Kanselasi pada Ring
Diketahui $< D, +, . >$ daerah integral dan $a, b, c \in D$.

i. Jika $a + b = a + c$ maka $b = c$. (Hukum kanselasi kiri terhadap +)
ii. Jika $b + a = c + a$ maka $b = c$. (Hukum kanselasi kanan terhadap +)
iii. Jika $a \neq 0$ dan $a.b = a.c$ maka $b = c$. (Hukum kanselasi kiri terhadap .)
iv. Jika $a \neq 0$ dan $b.a = c.a$ maka $b = c$. (Hukum kanselasi kanan terhadap .)

2. Teorema Homomorfisma

Dari Teorema Homomorfisma Ring bagian i. dan ii. dapat dikatakan bahwa keduanya berlaku dengan memandang ring R sebagai grup abelian terhadap operasi penjumlahan. Untuk Teorema bagian iii. dan iv. tetap berlaku dengan memandang subring sebagai subgrup.

3. Teorema Kernel

Teorema Kernel pada grup juga berlaku pada ring. Hal ini dapat dipahami karena Teorema Kernel pada ring hanya terkait dengan operasi penjumlahan pada ring. Dengan demikian teorema ini hanya memandang ring sebagai grup abelian terhadap operasi penjumlahan. Sehingga Teorema Kernel pada grup tetap berlaku pada ring.

4. Teorema pada Ring Armendariz

Definisi 15

Ring R dikatakan ring tereduksi jika R tidak memiliki elemen nilpoten selain nol. Dengan kata lain apabila $a^2 = 0$ maka $a = 0, \forall a \in R$. (Krempa, 1996).

Definisi 16

Misalkan R dan R' ring, pemetaan $\varphi: R \to R'$merupakan homomorfisma ring jika (1). $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ dan (2). $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)\ \forall a, b \in G$. (Fraleigh, 1989)

Definisi 17

Suatu homomorfisma ring yang injektif disebut monomorfisma ring sedangkan homomorfisma dari suatu ring ke dalam dirinya sendiri disebut Endomorfisma ring. (Fraleigh, 1989)

Lemma 1

Misalkan R adalah ring tereduksi dan $f(x), g(x) \in R[x]$ dengan $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ dan $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ maka berlaku $f(x)g(x) = 0$ jika dan hanya jika $a_i b_j = 0$ untuk setiap i,j. (Armendariz, 1974)

Bukti

Misalkan $f(x)g(x) = 0$ dan $n = m$. Diperoleh persamaan sebagai berikut $a_0 b_0 = 0$; $a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0; \dots; a_n b_0 + \cdots + a_0 b_n = 0$. Oleh sebab R tereduksi diperoleh $a_0 b_0 = 0$ jika dan hanya jika $b_0 a_0 = 0$. Apabila persamaan $a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0$ dikalikan dengan b_0 dari kiri, maka diperoleh $b_0 a_1 b_0 = 0$. Oleh sebab R tereduksi, $(a_1 b_0)^2 = a_1 b_0 a_1 b_0 = 0$diperoleh $a_1 b_0 = 0$ dan $b_0 a_1 = 0$. Dengan cara yang sama pada persamaan-persamaan lain, diperoleh $a_i b_0 = 0$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$. Persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi $a_0 b_1 = 0$; $a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0; \dots; a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n = 0$. Diperoleh $a_0 b_1 = 0$ mengakibatkan $b_1 a_0 = 0$. Kalikan dengan b_1 dari kiri pada persamaan $a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0$, diperoleh $b_1 a_1 b_1 = 0$. Dengan cara yang sama seperti sebelumnya diperoleh $a_i b_1 = 0$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$. Apabila proses tersebut dilanjutkan maka diperoleh $a_i b_j = 0$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$.

Tentu saja konvers dari pernyataan tersebut berlaku.

Apabila pada ring R berlaku $f(x)g(x) = 0$ mengakibatkan $a_i b_j = 0$ untuk setiap $0 \leq i \leq n; 0 \leq j \leq n$, maka ring R dikatakan memiliki sifat Armendariz.

Definisi 18.

Misalkan R ring dengan identitas 1, α endomorfisma di R, dan δ merupakan α-derivatif, ring polinomial miring disimbolkan dengan $R[x; \alpha, \delta]$ dalam pubah tak diketahui x adalah ring yang terdiri dari polinomial $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $a_i \in R$ untuk semua i yang memenuhi aturan perkalian $xa = \alpha(a)x + \delta(a), \forall a \in R$. (Amir, 2012)

Definisi 19.

Suatu ring R dikatakan memiliki sifat Armendariz (ring Armendariz) apabila setiap polinomial $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x]$ dengan $f(x)g(x) = 0$ maka berlaku $a_i b_j = 0$ untuk setiap i,j. (Rege & Chhawchharia, 1997)

Contoh 1.

Diberikan himpunan matrik $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & t \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a, t \in \mathbb{Z} \right\}$, akan ditunjukkan R merupakan ring Armendariz.

Ambil sebarang $p = A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m$ dan $q = B_0 + B_1x + \cdots + B_nx^n$ elemen di $R[x]$ dengan $pq = 0$ dimana $A_i = \begin{bmatrix} a_i & t_i \\ 0 & a_i \end{bmatrix}$ dan $B_j = \begin{bmatrix} b_j & s_j \\ 0 & b_j \end{bmatrix}$ untuk $0 \le i \le m$ dan $0 \le j \le n$.

Andaikan ada $A_l = \begin{bmatrix} a_l & t_l \\ 0 & a_l \end{bmatrix}$ dengan $a_l \neq 0$ dan $A_0 = A_1 = \cdots = A_{l-1} = 0$ dimana $0 \le l \le m$. Oleh sebab $A_0B_l + A_1B_{l-1} + \cdots + A_lB_0 = 0$ diperoleh $A_lB_0 = 0$. Ini berarti bahwa $\begin{bmatrix} a_l & t_l \\ 0 & a_l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_0 & s_0 \\ 0 & b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_lb_0 & a_ls_0 + t_lb_0 \\ 0 & a_lb_0 \end{bmatrix} = 0$

Diperoleh $a_lb_0 = 0$ dan $a_ls_0 + t_lb_0 = 0$. Oleh sebab $a_l \neq 0$ diperoleh $b_0 = 0$ dan $s_0 = 0$. Jadi $B_0 = 0$.

Oleh sebab $A_0B_{l+1} + \cdots + A_lB_1 + A_{l+1}B_0 = 0$ diperoleh $A_lB_1 = 0$ dan $B_1 = 0$. Dengan cara yang sama seperti di atas, maka diperoleh $B_0 = B_1 = \cdots B_n = 0$. Dengan demikian diperoleh $A_iB_j = 0$ untuk $0 \le i \le m$ dan $0 \le j \le n$.

Analog apabila terdapat $B_k = \begin{bmatrix} b_k & s_k \\ 0 & b_k \end{bmatrix}$ dengan $b_k \neq 0$ dan $B_0 = B_1 = \cdots = B_{k-1} = 0$ dimana $0 \le k \le n$. Diperoleh $A_0 = A_1 = \cdots A_m = 0$ sehingga$A_iB_j = 0$ untuk $0 \le i \le m$ dan $0 \le j \le n$.

Andaikan $A_i = \begin{bmatrix} 0 & t_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B_j = \begin{bmatrix} 0 & s_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ untuk setiap $0 \le i \le m$ dan $0 \le j \le n$. Jelas $A_iB_j = \begin{bmatrix} 0 & t_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & s_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

Diperoleh $A_iB_j = 0$ untuk $0 \le i \le m$ dan $0 \le j \le n$.

Jadi R merupakan ring Armendariz.

Teorema 18.

Setiap daerah integral merupakan ring tereduksi.

Bukti

Pernyataan tersebut akan dibuktikan dengan kontraposisinya, yaitu setiap ring tak tereduksi bukan daerah integral. Misalkan D ring tak tereduksi. Ring D tak tereduksi maka D memiliki elemen nilpoten selain nol, artinya terdapat $a \in D$ dan $a \neq 0$ tetapi $a^n = 0$ untuk suatu bilangan bulat positif n. Misalkan m adalah bilangan bulat positif terkecil sehingga $a^m = 0$. Diperoleh $a^m = 0 \Leftrightarrow a.a^{m-1} = 0$. Oleh sebab m adalah bilangan bulat terkecil sehingga $a^m = 0$ maka haruslah $a^{m-1} \neq 0$. Oleh sebab $a \in D$ dan D suatu ring, maka $a^{m-1} \in D$. Jadi tedapat $a, a^{m-1} \in D$ dengan $a \neq 0$ dan $a^{m-1} \neq 0$ tetapi $a.a^{m-1} = 0$. Ring D memuat pembagi nol, sehingga ring D bukan daerah integral. Jadi kontraposisi dari Teorema 18 benar, , sehingga terbukti bahwa setiap daerah integral merupakan ring tereduksi.

Akibat 1.

Setiap daerah integral merupakan ring Armendariz.

Bukti

Ambil sebarang daerah integral D, berdasarkan Proposisi 1 diperoleh bahwa D ring tereduksi. Oleh sebab D ring tereduksi, maka D memenuhi Lemma Armendariz. Jadi D memiliki sifat Armendariz, sehingga D merupakan ring Armendariz. Jadi setiap daerah integral merupakan ring Armendariz.

Akibat 2.

Setiap field merupakan ring Armendariz.

Bukti

Ambil sebarang field F, oleh sebab F field maka F daerah integral. Berdasarkan Akibat 1 diperoleh bahwa F ring Armendariz. Jadi setiap field merupakan ring Armendariz.

Dari Akibat 1 dapat disimpulkan bahwa struktur aljabar yang terbentuk dengan menyaratkan harus memenuhi integral domain, maka struktur aljabar tersebut merupakan ring armendariz. Contohnya adalah field.

SIMPULAN

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan: (1) untuk memeriksa keberlakuan teorema pada beberapa struktur aljabar, dapat dilakukan dengan menyelidiki definisi tersebut, menemukan relasinya, dan menggunakan beberapa teorema terkait lainnya, (2) ada beberapa teorema dalam grup yang secara implisit berlaku pula dalam ring. Dengan kata lain ada torema dalam ring yang keberlakuaanya dikarenakan suatu ring memenuhi aksioma grup abelian terhadap operasi penjumlahan, (3) untuk membuktikan bahwa daerah integral (*integral domain*) merupakan ring armendariz, maka cukup dibuktikan daerah integral merupakan ring tereduksi.

DAFTAR PUSTAKA

Amir, K.A. 2012. Pembentukan Gelanggang Polinom Miring dari Quaternion. *Kaunia,* VIII(2) : 99-106.

Antoine, R. 2008. Nilpoten Elemen dan Armendariz R ings. *Jurnal Aljabar* 319: 3128-3140.

Armendariz, E. 1974. Sebuah catatan tentang perluasan cincin Baer dan PP. *J. Austra. Matematika. Soc 18:* 470-473.

Fraleigh, JB 1989. *A Course Pertama di Aljabar Abstrak* (4 th ed.). Membaca: addison Wesley Publishing Company.

Krempa, J. 1996. Beberapa Contoh Reduced Rings. *Aljabar Kolokium,* 3: 289-300.

Kwak, KT, Y. Lee & SJ Yun. 2012. Properti Armendariz di Cita-cita. *Jurnal aljabar* 354: 121-135.

Nam, BS, SJ Ryu & SJ Yun. 2013. Pada Koefisien Polinomial Nilpoten pada Cincin Polinomial Skewin. *Korea J. Matematika*, 21 (4): *421-428.*

Rege, MB & S. Chhawchharia. 1997. Armendariz Rings. *Proc. Jepang Acad. Ser. Sebuah matematika Sci.* 73 (1997) 14-17.