Generalisasi Grup Heisenberg Menggunakan Gaussian Integer

Mochamad Rofik
Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Muhammadiyah Malang
rovikumm@gmail.com

Abstrak

Grup Heisenberg (H) merupakan matriks segitiga atas berordo 3×3 yang mempunyai bentuk $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dengan $a, b,$ dan c anggota ring komutatif. Grup Heisenberg dapat dikategorikan menjadi tiga jenis, (1) grup Heisenberg kontinu, yaitu H dengan $a, b,$ dan $c \in R$, (2) grup Heisenberg diskrit, H dengan $a, b,$ dan $c \in Z$, dan (3) grup Heisenberg modulo n, H dengan $a, b,$ dan $c \in Z_n$. Dalam kajian ini, grup Heisenberg akan diperluas (generalisasi) dengan *Gaussian integer* $(Z_{[i]})$, sehingga didapatkan matriks berbentuk $H_{[Z_{[i]}]} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dengan $\alpha, \beta,$ dan $\gamma \in Z_{[i]}$. Kajian ini pertama-tama akan menunjukkan $Z_{[i]} = a + ib$ dengan $a, b \in Z \; dan \; i^2 = -1$ merupakan ring komutatif dan selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $H_{[Z_{[i]}]}$ merupakan sebuah grup.

Kata kunci - Generalisasi, Grup Heisenberg, Gaussian Integer, Ring komutatif.

A. Pendahuluan

Teori grup merupakan salah satu bidang kajian dalam aljabar abstrak yang mempelajari struktur himpunan. Sebuah himpunan dengan satu operasi biner dapat dinyatakan sebagai grup jika operasi biner pada grup tersebut memenuhi sifat ketertutupan, assosiatif, adanya unsur identitas, dan setiap anggota grup tersebut mempunyai invers. Secara matematis dapat dituliskan sebagai $(a, b) \to a * b: G \times G \to G$ (Milne, 2013).

Grup Heisenberg (H) merupakan sebuah grup terhadap operasi perkalian ($*$) yang berbentuk matriks segitiga atas berordo 3×3, $H = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dengan $a, b,$ dan c anggota ring komutatif. Berdasarkan definisi tersebut, grup Heisenberg terklasifikasi menjadi tiga jenis yaitu, (1) grup Heisenberg kontinu, dengan $a, b,$ dan $c \in R$, (2) grup Heisenberg diskrit, dengan $a, b,$ dan $c \in Z$, dan (3) grup Heisenberg modulo n dengan $a, b,$ dan $c \in Z_{n.}$ (Mardiyah, 2008)

Pada kajian ini, grup Heisenberg akan diperluas (generalisasi) terhadap Gaussian integer $(Z_{[i]})$, Gaussian integer merupakan bilangan kompleks berbentuk $a + ib$ dengan $a, b \in Z$ dan $i^2 = -1$. Mengigat grup Heisenberg memberi syarat $a, b,$ dan c harus anggota ring komutatif, maka dalam kajian ini akan ditunjukkan terlebih dahulu $Z_{[i]}$ merupakan ring komutatif. Selanjutnya, setelah $Z_{[i]}$ ditunjukkan sebagai ring komutatif maka didapatkan matriks segitiga atas berordo 3×3 yang berbentuk

$$H_{[Z_{[i]}]} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{dengan } \alpha, \beta, \text{dan } \gamma \in Z_{[i]}.$$

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka rumusan masalah dalam kajian ini adalah:

a. Apakah Gaussian integer merupakan sebuah ring komutatif?
b. Apakah matriks Heisenberg yang digeneralisasi menggunakan Gaussian integer merupakan sebuah grup?

Meninjau latar belakang dan rumusan masalah yang telah dikemukakan, karya ilmiah ini bertujuan untuk membuktikan bahwa generalisasi yang dilakukan terhadap grup Heisenberg menggunakan Gaussian integer tetap menghasilkan sebuah grup, yaitu grup Heisenberg tergeneralisasi dengan Gaussian integer atau $(H_{[Z_{[i]}]},*)$ yang selanjutnya cukup ditulis dengan $(H_{[Z_{[i]}]})$.

B. Pembahasan

Suatu struktur aljabar dengan dua operasi biner $(R,+,\times)$ dapat dinyatakan sebagai ring komutatif atau ring abelian jika memenuhi syarat-syarat berikut:

1. $a+b=b+a$ dengan $a,b\ \in R$
2. $a+(b+c)=ab+ac,$ dengan $a,b,c\ \in R$
3. Ada elemen identitas (e) di R sehingga $a+e=e+a=a$ untuk semua $a\in R$
4. Setiap a anggota R ada a^{-1} sedemikian hingga $a+a^{-1}=e$ (setiap unsur memiliki invers)
5. $(ab)c=a(bc)$ untuk semua $a,b,c\ \in R$
6. Untuk semua $a,b,c\ \in R$ berlaku sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan
   $a(b+c)=ab+ac$
   $(a+b)c=ac+bc$
7. $ab=ab$ untuk $a,b\ \in R$ (Judson, 2012)

Namun ada beberapa pendapat yang menyatakan sebuah ring juga harus memiliki unsur identitas, yaitu $ae=ea=a$ untuk setiap $a\in R$. Kajian ini menyertakan adanya unsur identitas sebagai syarat sebuah ring.

Syarat-syarat ring komutatif yang telah dikemukakan diatas dapat diringkas menjadi (1) $(R,+)$ merupakan grup komutatif, (2) $(R,*)$ merupakan semi grup atau monoid komutatif, dan (3) berlaku sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan di R. Pembahasan selanjutnya akan menunjukkan secara bertahap, $Z_{[i]}$ merupakan sebuah grup pada operasi penjumlahan $(\#)$, $Z_{[i]}$ merupakan monoid komutatif pada operasi perkalian $(*)$, dan di $Z_{[i]}$ berlaku sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan. Mempermudah penulisan, Gaussian integer dengan dua operasi biner penjumlahan dan perkalian selanjutnya disimbolkan dengan $\left(Z_{[i]},\#,*\right)$.

Pertama akan ditunjukkan $\left(Z_{[i]},\#\right)$ merupakan sebuah grup komutatif. Ambil tiga anggota sebarang di $Z_{[i]}$, misal $p=a+ib$, $q=x+iy$ dan $r=m+in$.

a. $\left(Z_{[i]},\#\right)$ bersifat tertutup dan komutatif

$\left(Z_{[i]},\#\right)$ bersifat tertutup jika $p\#q=q\#p$ anggota $Z_{[i]}$

Bukti:

$$(a+ib)\#(x+iy)=(a+x)+(ib+iy)$$
$$=(a+x)+i(b+y) \text{ dan}$$

$$(x+iy)\#(a+ib)=(a+x)+ib+iy)$$
$$=(a+x)+i(b+y).$$

Pembuktian menunjukkan $p\#q=q\#p$ dan karena penjumlahan dan perkalian pada bilangan bulat bersifat tertutup maka terbukti $\left(Z_{[i]},\#\right)$ bersifat tertutup dan komutatif

b. $\left(Z_{[i]},\#\right)$ bersifat assosiatif

$\left(Z_{[i]},\#\right)$ mempunyai sifat assosiatif jika $p\#(q\#r)=(p\#q)\#r$ anggota $Z_{[i]}$

Bukti:

$$p\#(q\#r)=(a+ib)\#((x+iy)\#(m+in))$$
$$=(a+ib)\#((x+m)+i(y+n))$$
$$=(a+x+m)+i(b+y+n), \text{ dan}$$

$(p\#q)\#r = \big((a+ib)\#(x+iy)\big)\#(m+in)$
$\quad\quad = \big((a+x)+i(b+y)\#(m+in)\big)$
$\quad\quad = (a+x+m)+i(b+y+n)$
Terlihat $p\#(q\#r) = (p\#q)\#r$.

c. Eksistensi elemen identitas

Misal e merupakan elemen identitas di $\left(Z_{[i]},\#\right)$ maka berlaku
$p\#e = e\#p = p, \forall\, p \in\ Z_{[i]}$.
Bukti:
Ambil sebarang p, misal $p = (a+ib)$ dan dimisalkan $e = (a' + ib')$ maka
$(a+ib)\#(a'+ib') = (a+a')+i(b+b') = a+ib$, hal ini hanya mungkin terjadi jika a' dan $b' = 0$ atau $a' + ib' = 0 + i0 = 0$. Penjabaran ini menunjukkan jika ada unsur identitas di $\left(Z_{[i]},\#\right)$, yaitu 0.

d. Mempunyai invers

Misal p' merupakan invers dari p maka $p\#p' = p'\#p = e$. Misal $p = a + ib$ dan $p' = a' + ib'$ maka $(a+ib)\#(a'+ib') = (a+a')+i(b+b') = 0$. Hal ini hanya akan terjadi jika jika a' merupakan invers dari a dan b' merupakan invers dari b. Jadi invers dari $p = a + ib \in Z_{[i]}$ adalah $p' = -a + i(-b)$.

Karena penjumlahan dan perkalian pada bilangan bulat bersifat tertutuup maka. keempat sifat telah dipenuhi oleh $\left(Z_{[i]},\#\right)$ sehingga dapat dinyatakan bahwa $\left(Z_{[i]},\#\right)$ merupakan sebuah grup. Selanjutnya akan dibuktikan $\left(Z_{[i]},*\right)$ merupakan ring komutatif.

a. $\left(Z_{[i]},*\right)$ Bersifat tertutup dan komutatif

$\left(Z_{[i]},*\right)$ bersifat tertutup dan komutatif jika $p*q = q*p \in Z_{[i]}$. Misal $p = a + ib$ dan $q = x + iy$ maka $p*q = (ax-by)+i(bx+ay)$ dan $q*p = (ax-by)+i(ay+bx)$ karena $p*q = q*p$ dan operasi penjumlahan dan perkalian pada bilangan bulat bersifat tertutup maka terbukti $\left(Z_{[i]},*\right)$ bersifat tertutup dan komutatif.

b. $\left(Z_{[i]},*\right)$ bersifat assosiatif

$\left(Z_{[i]},*\right)$ bersifat assosiatif jika $p*(q*r) = (p*q)*r$. Ambil sebarang bilangan di $Z_{[i]}$, misal p, q dan r dengan $p = (a+ib), q = (x+iy)\ dan\ r = m + in$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $p*(q*r) = (p*q)*r$.

$p*(q*r) = (a+ib)*((x+iy)*(m+in))$
$= (a*ib)*((xm+(-ny))+i(xn+ym)$
$= (a\big(xm+(-ny)\big)+ia(xn+ym)+(ib\big(xm+(-ny)\big)+(-b(xn+ym)$
$= (\big(axm+(-any)\big)+i(axn+aym)+(i\big(bxm+(-bny)\big)+(-(bxn+bym)$
$= ((axm+(-any)+(-(bxn+bym)))+i(axn+bmx+amy+(-bny))$
$= (amx-any-bnx-bym)+i(anx+amy+bmx-bny)$, dan

$(p*q)*r = \big((a+ib)*(x+iy)\big)*(m+in)$
$= (ax+(-by)+i(ay+bx))*(m+in)$
$= (amx+i(anx)+(-bym)+i(-bny)+im(ay+bx)+(-(any+bnx)$
$= (amx-any-bnx-bym)+i(anx+amy+bmx-bny)$

Terlihat dari penjabaran, $p * (q * r) = (p * q) * r$ dan karena operasi penjumlahan dan perkalian di Z bersifat tertutup maka hal ini menjamin $p * (q * r) = (p * q) * r \in Z_{[i]}$ sehingga terbukti $\left(Z_{[i]}, *\right)$ bersifat assosiatif.

c. $\left(Z_{[i]}, *\right)$ mempunyai identitas

Misal e merupakan elemen identitas di $\left(Z_{[i]}, *\right)$ maka berlaku $p * e = e * p = p, \forall\, p \in Z_{[i]}$. Bukti: Ambil sebarang unsur di $Z_{[i]}$, misal $p = (a + ib)$ dan dimisalkan $e = (a' + ib')$ maka

$(a + ib) * (a' + ib') = aa' + iab' + ia'b + (-bb')$

$= aa' - bb' + i(ab' + a'b)$. Hal ini berakibat

$aa' - bb' + i(ab' + a'b) = a + ib$ dan hanya mungkin terjadi jika

$a' = 1$ dan $b' = 0$. Jadi terbukti $\left(Z_{[i]}, *\right)$ mempunyai unsur identitas yaitu

$1 + i0 = 1$.

Syarat-syarat yang telah diuraikan menunjukkan $\left(Z_{[i]}, *\right)$ merupakan sebuah monoid komutatif. Tahap selanjutnya adalah menunjukkan $\left(Z_{[i]}, \#, *\right)$ berlaku sifat distributif kanan dan distributif kiri. Jika $\left(Z_{[i]}, \#, *\right)$ berlaku sifat distributif kanan dan distributif kiri maka $p * (q + r) = pq + pr$ dan $(p + q) * r = pq + qr$. Misal $p = (a + ib), q = x + iy, dan\; r = m + in$ akan ditunjukkan $p * (q + r) = pq + pr$ dan $(p + q) * r = pq + qr$

Bukti distributif kiri, $p * (q + r) = pq + pr$

$p * (q + r) = (a + ib) * ((x + iy) + (m + in)$

$= (a + ib) * \left((m + x) + i(n + y)\right)$

$= a(m + x) + ia(n + y) + ib(m + x) + \left(-b(n + y)\right)$

$= a(m + x) + i(an + ay) + i(bm + bx) - bn - by$

$= a(m + x) - bn - by + i(an + ay + bm + bx)$

$= am + ax - bn - by + i(an + ay + bm + bx)$, dan

$pq + pr = ((a + ib) * (x + iy)) + ((a + ib) * m + in))$

$= (ax + iay + ibx - by) + (am + ian + ibm - bn)$

$= ax - by + i(ay + bx) + am - bn + i(an + bm)$

$= am + ax - bn - by + i(an + ay + bm + bx)$

Terlihat bahwa $p * (q + r) = pq + pr$ dan karena Z bersifat tertutup pada operasi penjumlahan dan perkalian maka terbukti $p * (q + r) = pq + pr \in Z_{[i]}$.

Bukti distributif kanan, $(p + q) * r = pr + qr$

$(p + q) * r = \left((a + ib) + (x + iy)\right) * (m + in)$

$= ((a + x) + i(b + y)) * (m + in)$

$= m(a + x) + in(a + x) + im(b + y) + \left(-n(b + y)\right)$

$= am + mx + i(an + nx) + i(bm + my) - bn - by$

$= am + mx - bn - by + i(an + nx + bm + my)$,

$= am + mx - bn - ny + i(n(a + x) + m(b + y))$ dan

$pr + qr = ((a + ib) * (m + in)) + ((x + iy) * (m + in))$

$= (am + ian + ibm - bn) + (mx + inx + imy - ny)$

$= am - bn + i(bm + an) + mx - ny + i(my + nx)$

$= am + mx - bn - ny + i(an + bm + my + nx)$

$= am + mx - bn - ny + i(n(a + x) + m(b + y))$

.

Pembuktian menunjukkan $(p+q)*r = pr + qr$ dan karena ketertutupan bilangan bulat pada operasi penjumlahan dan perkalian berlaku, maka terbutkti $(p+q)*r = pr + qr \in Z_{[i]}$.

Berdasarkan uraian yang telah ditunjukkan, terlihat $Z_{[i]}$ merupakan sebuah grup pada operasi pertama $(Z_{[i]}, \#)$, $Z_{[i]}$ terbukti merupakan sebuah monoid komutatif pada operasi kedua $(Z_{[i]}, *)$, dan yang terakhir telah ditunjukkan berlakunya sifat distributif kiri dan distributif kanan. Dengan pembuktian yang telah dijabarkan dapat disimpulkan bahwa $Z_{[i]}$ merupakan ring komutatif.

Telah dibuktikannya $Z_{[i]}$ merupakan ring komutatif berimplikasi syarat awal generaslisasi grup Heisenberg menggunakan Gaussian integer telah terpenuhi. Setelah generalisasi dilakukan, didapatkan matriks segitiga atas berordo 3×3 yang berbentuk $H_{[Z_i]} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dengan $\alpha, \beta,$ dan $\gamma \in Z_{[i]}$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $H_{[Z_i]}$ merupakan sebuah grup.

Pertama akan ditunjukkan bahwa $H_{[Z_i]}$ bersifat tertutup. Ambil sebarang p dan $q \in H_{[Z_i]}$, misal $p = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $q = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka

$p * q = \begin{bmatrix} 1 & x+a & y+az+b \\ 0 & 1 & z+c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ karena penjumlahan dan perkalian di $Z_{[i]}$ bersifat tertutup maka terbukti $H_{[Z_i]}$ bersifat tertutup.

Kedua adalah menunjukkan $H_{[Z_i]}$ mempunyai sifat assosiatif. Ambil sebarang p, q dan $r \in H_{[Z_i]}$ misal $p = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $q = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $r = \begin{bmatrix} 1 & s & t \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka

$$(p*q)*r = p*(q*r)$$

$$(p*q)*r = \left(\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) * \begin{bmatrix} 1 & s & t \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x+a & y+az+b \\ 0 & 1 & z+c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & s & t \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & s+(x+a) & t+u(x+a)+(y+az+b) \\ 0 & 1 & u+z+c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & s+x+a & t+y+b+ux+ua+az \\ 0 & 1 & u+z+c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$p*(q*r) = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & s & t \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & s+x & t+xu+y \\ 0 & 1 & u+z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & (s+x)+a & t+xu+y+a(u+z)+b \\ 0 & 1 & u+z+c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & s+x+a & t+ux+y+a(u+z)+b \\ 0 & 1 & u+z+c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & s+x+a & t+y+b+ux+ua+az \\ 0 & 1 & u+z+c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pembuktian yang telah dilakukan menunjukkan $(p*q)*r = p*(q*r)$ dan karena berlaku sifat ketertutupan operasi penjumlahan dan perkalian di $Z_{[i]}$, hal ini menjamin $(p*q)*r = p*(q*r) \in H_{[Z_i]}$.

Ketiga menunjukkan bahwa $H_{[Z_i]}$ mempunyai unsur identitas dan invers. $H_{[Z_i]}$ merupakan matriks $A_{n\times n}$, hal ini berakibat berlakunya beberapa teorema pada matriks.

Teorema I. Bila A adalah matriks $(n \times n)$ maka $I_nA = AI_n = A$, degan $I_n = [\overline{l_1}\overline{l_2}\overline{l_3} \dots \overline{l_n}]$

Teorema II. Bila $A_{n\times n}$ adalah sebuah matriks tak singular ($det \neq 0$), maka ada sebuah matriks $B_{n\times n}$ sedemikian rupa sehingga $AB = I$ (Kuntjoro, 2009).

Merujuk Teorema I, maka identitas dari $H_{[Z_i]}$ adalah $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Berdasarkan Teorema II untuk memastikan $H_{[Z_i]}$ mempunyai invers maka akan dibuktikan terlebih dahulu $H_{[Z_i]}$ adalah matriks tak singular, pembuktian dilakukan dengan menunjukkan determinan $H_{[Z_i]} \neq 0$.

Menggunakan metode *sarrus* didapatkan $\det H_{[Z_i]} = 1\begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \alpha\begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1(1-0) - \alpha(0-0) + \beta(0-0) = 1 - 0 - 0 = 1$. Terlihat $\det(H_{[Z_i]}) \neq 0$ sehingga dapat disimpulkan setiap anggota $H_{[Z_i]}$ mempunyai invers.

$H_{[Z_i]}$ telah terbukti mempunyai invers, langkah terakhir yang perlu dilakukan adalah memastikan invers tersebut merupakan anggota $H_{[Z_i]}$. Metode Gauss-Jordan digunakan untuk mencari invers tersebut. $(H{:}I) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha & \beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$$b_1 - \alpha b_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \beta-\alpha\gamma & 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & \gamma & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$b_1 - (-\beta+\alpha\gamma)b_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\alpha & \alpha\gamma-\beta \\ 0 & 1 & \gamma & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$b_2 - \gamma b_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\alpha & \alpha\gamma-\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\gamma \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = I.{H_{[Z_i]}}^{-1}$$

Jadi ${H_{[Z_i]}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & \alpha\gamma-\beta \\ 0 & 1 & -\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, karena $Z_{[i]}$ bersifat tertutup pada operasi penjumlahan dan perkalian, maka terbukti $H_{[Z_i]}$ memiliki invers.

Penjabaran yang telah dilakukukan menunjukkan bahwa $H_{[Z_i]}$ bersifat tertutup, assosiatif, mempunyai unsur identitas dan mempunyai invers, hal ini membuktikan bahwa $H_{[Z_i]}$ merupakan sebuah grup.

C. Simpulan dan Saran

Pembuktian yang telah dilakukan menunjukkan $Z_{[i]}$ merupakan sebuah ring komutatif, sehingga generalisasi terhadap grup Heisenberg dapat dilakukan. Generalisasi yang dilakukan menghasilkan $H_{[Z_i]}=\begin{bmatrix}1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ dengan $\alpha, \beta,$ dan $\gamma \in Z_{[i]}$. Selanjutnya, $H_{[Z_i],}$ ditunjukkan memenuhi sifat ketertutupan, assosiatif, mempunyai unsur identitas, dan mempunyai invers sehingga dapat disimpulkan $H_{[Z_i]}$ merupakan sebuah grup.

Kajian ini dibatasi sampai pembuktian $H_{[Z_i]}$ nerupakan sebuah grup, untuk lebih memperluas khasanah keilmuan, khususnya mengenai teori grup dan grup Heisenberg dalam kajian selanjutnya dapat dikaji sifat-sifat grup pada $H_{[Z_i]}$.

D. Daftar Pustaka

[1] Milne, J. S. 2013. *Group Theory*, (Online). (http:// http://jmilne/org/math, diakses 22 Oktober 2015).

[2] Mardiya, A. 2008. *Grup Heisenberg Modulo 2*. Skripsi. Program Sarjana Matematika. Padang: Univ. Andalas.

[3] Jodson, Thomas. W and Austin, Stephen. F., 2012. *Abstrac Algebra, Theory and Applications*. Washington: University of Pugetsound

[4] Kuntjoro, W. 2009. *Matriks Inversi dan Sifat-Sifatnya*, (Online). http://geodesy.gd. itb.ac.id/wedyanto/wp-content/uploads/2009/08/ihg1-kuliah-4.pdf, diakses 22 Oktober 2015).