SOLUSI SISTEM PERSAMAAN LINIER PADA ALJABAR *MAX-PLUS*

Budi Cahyono
Pendidikan Matematika, FSAINSTEK, Universitas Walisongo Semarang
budi_doplang@yahoo.com

Abstrak

Dalam kehidupan sehari-hari seringkali kita mendapatkan permasalahan yang dapat di modelkan dalam bentuk sistem persamaan linier. Sistem persamaan linier yang terbentuk dapat diselesaikan dengan menggunakan operasi maksimum (max) dan operasi penjumlahan (+), sebagai contoh sistem jaringan kereta, sistem jaringan telekomunikasi, sistem produksi, sistem pemrosesan pararel pada komputer, dan sebagainya. Pengoprasian dengan menggunakan operasi dasar maksimum (max) dan penjumlahan (+) terdapat pada Aljabar *Max-Plus*. Dalam penelitian ini akan dikaji "Bagaimana proses menentukan solusi dari sistem persamaan linier pada Aljabar *Max-Plus"*. Secara umum system persaman linier pada $\Re_{\max}$ dapat dinotasikan dalam persamaan $Ax \oplus b = Cx \oplus d$ dan dua persamaan linier yang dapat ditentukan solusinya adalah $x = Ax \oplus b$ dan $Ax = b$. Pada sistem $Ax \oplus b = Cx \oplus d$ solusi akan didapatkan ketika sistem persamaan linier dinotasikan dalam bentuk kanonik selanjutkan diselesaikan dengan prinsip yang ada di aljabar linier. Solusi dari $x = Ax \oplus b$ adalah $x = A^* \oplus b$ dengan $A^* = e \oplus A \oplus A^2 \oplus ... \oplus A^n \oplus A^{n+1} \oplus ...$ dan solusi sistem persamaan $Ax = b$ ada jika subpenyelesaian terbesarnya (x) dengan $-x_j = \max(-b_{ij} + A_{ij})$ memenuhi sistem persamaan linier $Ax = b$.

Kata Kunci : Matrik, Aljabar Max-Plus, Solusi Sistem Persamaan Linier.

PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari seringkali kita mendapatkan permasalahan yang dapat di modelkan dalam bentuk sistem persamaan linier. Sistem persamaan linier yang terbentuk dapat diselesaikan dengan menggunakan operasi maksimum (max) dan operasi penjumlahan (+), sebagai contoh sistem pada jadwal penerbangan pesawat di suatu bandara, sistem penjadwalan jaringan kereta dan kestabilan, sistem jaringan telekomunikasi, sistem produksi sederhana, sistem pemrosesan pararel pada komputer, dan sebagainya. Pengoprasian dengan menggunakan operasi dasar maksimum (max) dan penjumlahan (+) terdapat pada Aljabar *Max-Plus*. Dalam penelitian ini akan dikaji "Bagaimana proses menentukan solusi dari sistem persamaan linier pada Aljabar *Max-Plus"*. Secara umum sistem persaman linier pada $\Re_{\max}$ atau sistem persamaan linier pada Aljabar *Max-Plus* dapat dinotasikan dalam persamaan $Ax \oplus b = Cx \oplus d$ dengan $A, C \in (\Re_{\max})^{n \times n}, b$ dan d adalah matriks berukuran $n \times 1$ di mana $b_i, d_i \in \Re_{\max}$ untuk $i = 1, 2, 3, ..., n$. Dua bentuk lain dari persamaan linier pada aljabar *max-plus* yang dapat ditentukan solusinya adalah $x = Ax \oplus b$ dan $Ax = b$. Pada penelitian ini akan dibahas bagaimana menyelesaikan sistem persamaan linier yang ada pada aljabar *max-plus*, sehingga dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan seperti penjadwalan penerbangan pesawat di suatu bandara, sistem penjadwalan jaringan kereta dan kestabilan, sistem jaringan telekomunikasi, sistem produksi sederhana dan masalah-masalah lain dalam kehidupan sehari-hari yang terkait.

PEMBAHASAN

Aljabar *Max-Plus*

Dalam aljabar *max-plus* kita akan mengenal dua operasi yang digunakan yaitu operasi maksimum (max) yang dinotasikan dengan lambang $\oplus$ dan operasi penjumlahan (+) yang dinotasikan dengan lambang $\otimes$ yang selanjutnya didefinisikan sebagai berikut;

Definisi 1

Misalkan $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon = -\infty\}$ dan pada $\mathbb{R}_\varepsilon$ didefinisikan dua operasi biner:

(i) $a \oplus b = \text{maks}(a,b),\ \oplus$ dibaca O tambah

(ii) $a \otimes b = a + b, \otimes$ dibaca O kali

$\forall a,b \in \mathbb{R}_\varepsilon$. $\mathbb{R}_\varepsilon$ operasi biner diatas disebut aljabar *max-plus* yang dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{\max}$ (Bacelli dkk,2001). Selanjutnya akan dijelaskan sifat-sifat yang berlaku pada $\mathbb{R}_{\max}$.

Berdasarkan definisi dua operasi biner pada $\mathbb{R}_{\max}$ di atas, maka $\forall a,b \in \mathbb{R}_\varepsilon$ berlaku sifat-sifat berikut ;

i) $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus)$ mempunyai sifat ;
   a) $a \oplus b \in \mathbb{R}_\varepsilon$ (Tertutup)
   b) $a \oplus b = b \oplus a$ (Komutatif)
   c) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ (Asosiatif)
   d) $\varepsilon \oplus a = a \oplus \varepsilon = a,\ \varepsilon$ disebut unsur identitas $\oplus$

ii) $(\mathbb{R}_\varepsilon, \otimes)$ mempunyai sifat ;
   a) $a \otimes b \in \mathbb{R}_\varepsilon$ (Tertutup)
   b) $a \otimes b = b \otimes a$ (Komutatif)
   c) $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ (Asosiatif)
   d) $0 \otimes a = a \otimes 0 = a,\ 0$ disebut unsur identitas $\otimes$ selanjutnya 0 dinotasikan dengan e

iii) Distributif $\otimes$ terhadap $\oplus; a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$

iv) Untuk setiap $a \in \mathbb{R}_\varepsilon$ dengan $a \notin \varepsilon$, terdapat c tunggal elemen $\mathbb{R}_{\max}$ dan bersifat $a \otimes c = e$, c dinamakan unsur invers (balikan) dari a terhadap operasi $\otimes$ (Farlow, 2009)

Dari uraian sifat-sifat di atas yang berlaku pada $\mathbb{R}_{\max}$ diketahui bahwa setiap elemen pada $\mathbb{R}_{\max}$ mempunyai invers terhadap operasi biner $\otimes$, sehingga dapat didefinisikan operasi ϕ (dibaca operasi bagi) yang merupakan operasi balikan dari operasi $\otimes$ pada $\mathbb{R}_{\max}$. Operasi ϕ pada $\mathbb{R}_{\max}$ didefinisikan sebagai operasi pengurangan pada bilangan real. Sedangkan pada operasi $\oplus$, $\mathbb{R}_{\max}$ tidak mempunyai invers (balikan), sehingga berbeda dengan operasi pada penjumlahan pada bilangan real yang mempunyai invers.

Sesuai kaidah pengoperasian bilangan real yaitu operasi perkalian dan pembagian dilakukan terlebih dahulu dibandingkan operasi penjumlahan, maka pada operasi aljabar *max-plus* operasi $\otimes$ dan ϕ dilakukan terlebih dahulu dibandingkan dengan operasi biner $\oplus$.

Contoh :

a. $4 \oplus 1 = maks(4,1) = 4$

b. $9 \oplus \varepsilon = maks(9,-\infty) = 9$

c. $4 \oplus 1 \oplus \varepsilon \oplus 15 = maks(4,1,-\infty,15) = 15$

d. $3 \otimes 9 = 3 + 9 = 12$

e. $e \otimes 9 = 0 + 9 = 9$

f. $\varepsilon \otimes 9 = -\infty + 9 = -\infty$

g. $3 \phi 2 = 3 - 2 = 1$

h. $2 \oplus 3 \otimes 9 \phi 5 = maks(2, 3 + 9 - 5) = maks(2,7) = 7$

i. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \varepsilon & -2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ maka;

- $A \oplus B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \varepsilon & -2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \oplus 2 & 4 \oplus 3 \\ \varepsilon \oplus 2 & -2 \oplus 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$
- $A \otimes B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \varepsilon & -2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \otimes 2 \oplus 4 \otimes 2 & 1 \otimes 3 \oplus 4 \otimes 5 \\ \varepsilon \otimes 2 \oplus -2 \otimes 2 & \varepsilon \otimes 3 \oplus -2 \otimes 5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3 \oplus 8 & 3 \oplus 20 \\ \varepsilon \oplus -4 & \varepsilon \oplus -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 20 \\ -4 & -10 \end{bmatrix}$$

Sistem Persamaan Linier pada Aljabar Max-plus

Secara umum sistem persaman linier pada $\Re_{\max}$ atau sistem persamaan linier pada Aljabar *Max-Plus* dapat dinotasikan dalam persamaan $Ax \oplus b = Cx \oplus d$ dengan $A, C \in (\Re_{\max})^{n \times n}, b$ dan d adalah matriks berukuran $n \times 1$ di mana $b_i, d_i \in \Re_{\max}$ untuk $i = 1, 2, 3, ..., n$. Dua bentuk lain dari persamaan linier pada aljabar *max-plus* yang dapat ditentukan solusinya adalah $x = Ax \oplus b$ dan $Ax = b$.

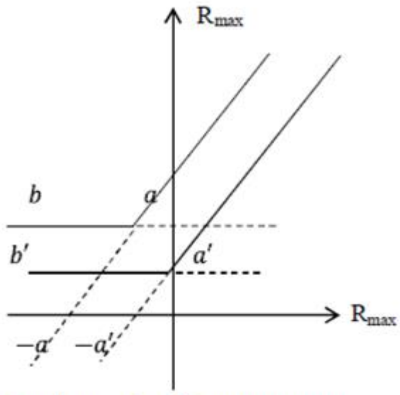
Solusi Sistem Persamaan Linier pada Aljabar *Max-plus*

Dalam pembahasan solusi sistem persamaan linier pada aljabar *max-plus* pada penelitian ini akan dikaji dari dua ranah yaitu secara geometris dan secara analitik; Solusi sistem persamaan linier pada aljabar *max-plus* dipandang dari ranah geometri pada bentuk umum sistem persaman linier pada $\Re_{\max}$ atau sistem persamaan linier pada Aljabar *Max-Plus* yang dapat dinotasikan dalam persamaan $Ax \oplus b = Cx \oplus d$ dengan $A, C \in (\Re_{\max})^{n \times n}, b$ dan d adalah matriks berukuran $n \times 1$ di mana $b_i, d_i \in \Re_{\max}$ untuk $i = 1, 2, 3, ..., n$. Sistem persamaan linier dua variabel dari persamaan $Ax \oplus b = Cx \oplus d$ dapat dinotasikan dalam bentuk;

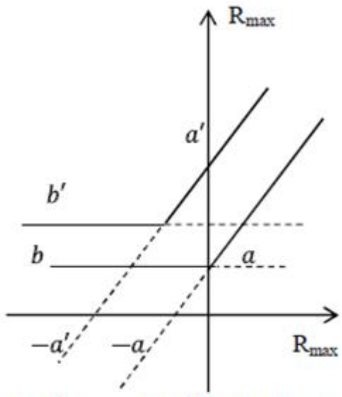
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Jika diberikan bentuk umum dari permasalahan di atas dalam dimensi satu, yaitu $ax \oplus b = cx \oplus d$ dan memisalkan nilai dari $c = a'$ dan $d = b'$ maka persamaan menjadi $ax \oplus b = a' x \oplus b'$ akan mempunyai tiga solusi yang berbeda yaitu 1. Tidak mempunyai solusi; 2. Mempunyai solusi tunggal; 3. Mempunyai solusi banyak; jika kita memisalkan nilai- nilai dari *a, a’, b, b’* sebagai berikut;

1) Tidak mempunyai solusi ketika $a < a'$ dan $b < b'$ atau $a > a'$ dan $b > b'$ secara geometri dapat digambarkan sebagai berikut;

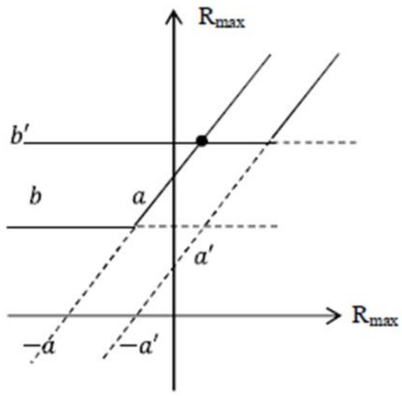


Gambar Grafik persamaan $a > a'$ dan $b > b'$

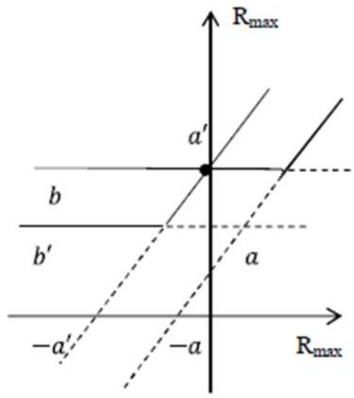


Gambar Grafik persamaan $a < a'$ dan $b < b'$

2) Mempunyai solusi tunggal ketika $a < a'$ dan $b > b'$ atau $a < a'$ dan $b > b'$ secara geometri dapat digambarkan sebagai berikut;

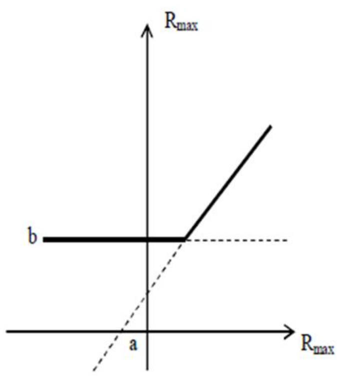


Gambar Grafik persamaan $a > a'$ dan $b < b'$



Gambar Grafik persamaan $a < a'$ dan $b > b'$

3) Mempunyai solusi banyak ketika $a = a'$ dan $b \neq b'$ atau $a \neq a'$ dan $b = b'$ secara geometri dapat digambarkan sebagai berikut;



Gambar Grafik persamaan $a = a'$ dan $b = b'$

Solusi sistem persamaan linier pada aljabar *max-plus* dipandang dari ranah analitik pada bentuk umum sistem persaman linier pada $\Re_{\max}$ atau sistem persamaan linier pada Aljabar *Max-Plus* yang dapat dinotasikan dalam persamaan $Ax \oplus b = Cx \oplus d$ dengan $A, C \in (\Re_{\max})^{n \times n}, b$ dan d adalah matriks berukuran $n \times 1$ di mana $b_i, d_i \in \Re_{\max}$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n$; akan dikaji dari sistem persamaan linier dua variabel yang dapat dinotasikan dalam bentuk; $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$ dan ditentukan solusinya dengan langkah-langkah berikut;

Untuk menyelesaikan system persamaan linier tersebut maka langkah awal adalah merubah bentuk persamaan menjadi bentuk kanonik dengan aturan sebagai berikut;

Definisi : Pada sistem $Ax \oplus b = Cx \oplus d$ dikatakan bentuk kanonik jika nilai *A,C,b* dan *d* memenuhi aturan berikut; $c_{ij} = -\infty$ jika $a_{ij} > c_{ij}$, dan $a_{ij} = -\infty$ jika $a_{ij} < c_{ij}$

$$d_i = -\infty \text{ jika } b_i > d_i \text{ dan } b_i = -\infty \text{ jika } b_i < d_i$$

Dari bentuk umum persamaan linier pada aljabar *max-plus* dua variabel akan dibahas beberapa kasus;

1. $a_{i1} < c_{i1}, a_{i2} < c_{i2}, b_1 = d_1$ dan $b_2 < d_2$

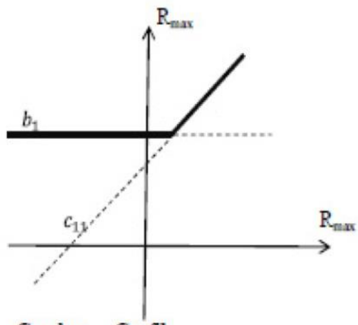
   bentuk kanonik dari kasus tersebut adalah

   $$\begin{bmatrix} \varepsilon & a_{12} \\ \varepsilon & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_1 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \varepsilon \\ c_{21} & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

   dari bentuk kanonik tersebut didapat 2 persamaan, yaitu;

   $(a_{12}x_2) \oplus b_1 = (c_{11}x_1) \oplus d_1$ dan $(a_{22}x_2) = (c_{21}x_1) \oplus d_2$

   Misalkan $a_{22} = a_{12}$, jika disubtitusikan kedua persamaan yang didapat maka diperoleh $(c_{21}x_1) \oplus d_2 \oplus b_1 = (c_{11}x_1) \oplus d_1$ karena $b_1 = d_1$ maka persamaan menjadi $(c_{21}x_1) \oplus d_2 \oplus b_1 = (c_{11}x_1) \oplus b_1$. Misalkan $b_1 \geq d_2$ dan $c_{21} = c_{11}$, maka persamaan menjadi $(c_{21}x_1) \oplus b_1 = (c_{11}x_1) \oplus b_1$ sehingga didapatkan nilai dari x_1 dengan solusi banyak, selanjutnya subtitusikan nilai x_1 kepersamaan $(a_{22}x_2) = (c_{21}x_1) \oplus d_2$. Dan itulah solusi dari persamaan tersebut, secara grafik dapat digambarkan sebagai berikut ;



Gambar Grafik

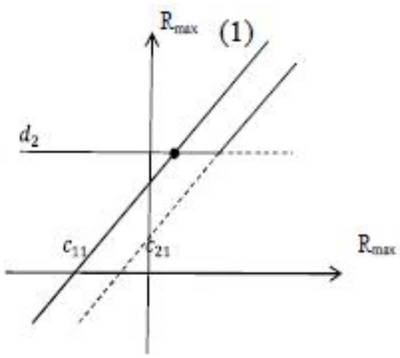
2. $a_{i1} < c_{i1}, a_{i2} > c_{i2}, b_1 > d_1$ dan $b_2 < d_2$

   bentuk kanonik dari kasus tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & a_{12} \\ \varepsilon & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_1 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \varepsilon \\ c_{21} & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ d_2 \end{bmatrix}$$

dari bentuk kanonik tersebut didapat 2 persamaan, yaitu;
$(a_{12}x_2) \oplus b_1 = (c_{11}x_1)$ dan $(a_{22}x_2) = (c_{21}x_1) \oplus d_2$

Misalkan $a_{22} = a_{12}$, jika disubtitusikan kedua persamaan yang didapat maka diperoleh $(c_{21}x_1) \oplus d_2 \oplus b_1 = (c_{11}x_1)$. Misalkan $d_2 \geq b_1$ dan $c_{21} < c_{11}$, maka persamaan menjadi $(c_{21}x_1) \oplus d_2 = (c_{11}x_1)$ sehingga didapatkan nilai dari x_1 dengan solusi tunggal, selanjutnya subtitusikan nilai x_1 kepersamaan $(a_{22}x_2) = (c_{21}x_1) \oplus d_2$. Dan itulah solusi dari persamaan tersebut, secara grafik dapat digambarkan sebagai berikut ;



Gambar Grafik

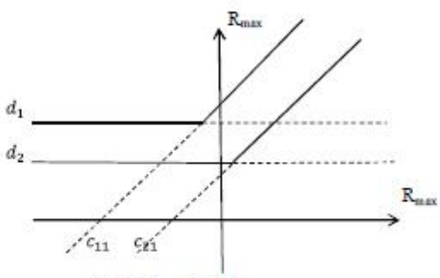
3. $a_{i1} < c_{i1}, a_{i2} > c_{i2}$, dan $b_i < d_i$

bentuk kanonik dari kasus tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & a_{12} \\ \varepsilon & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \varepsilon \\ c_{21} & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

dari bentuk kanonik tersebut didapat 2 persamaan, yaitu;
$(a_{12}x_2) = (c_{11}x_1) \oplus \mathrm{d}_1$ dan $(a_{22}x_2) = (c_{21}x_1) \oplus d_2$

4. Misalkan $a_{22} = a_{12}$, jika disubtitusikan kedua persamaan yang didapat maka
5. diperoleh $(c_{21}x_1) \oplus d_2 = (c_{11}x_1) \oplus d_1$. Misalkan $c_{21} < c_{11}$ dan $d_1 < d_2$, maka persamaan tidak mempunyai solusi. Dan solusi dari persamaan tersebut, secara grafik dapat digambarkan sebagai berikut ;



Gambar Grafik

Contoh ; Diberikan sistem persamaan linier sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Tentukan solusi dari SPL di atas?

Langkah pertama kita tentuka bentuk kanonik dari SPL didapat;

$$\begin{bmatrix} -\infty & 2 \\ -\infty & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ -\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -\infty \\ 2 & -\infty \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -\infty \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (-\infty \otimes x_1) \oplus (2 \otimes x_2) \\ (-\infty \otimes x_1) \oplus (2 \otimes x_2) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ -\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (6 \otimes x_1) \oplus (-\infty \otimes x_2) \\ (2 \otimes x_1) \oplus (-\infty \otimes x_2) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -\infty \\ 5 \end{bmatrix}$$

Didapat persamaan

$(2 \otimes x_2) \oplus 1 = 6 \otimes x_1$ dan $(2 \otimes x_2) = (2 \otimes x_1) \oplus 5$

Maka

$6 \otimes x_1 = (2 \otimes x_1) \oplus 5$

$6 \otimes x_1 = 5$

Sehingga didapat

$$x_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3$$

Jadi solusi yang didapat unik atau tunggal.

Bentuk lain dari persamaan linier aljabar max-*plus* dapat dinotasikan dengan $a \oplus x = b$ dengan $a, b \in$. Untuk memberikan gambaran yang jelas bagaimana menentukan solusi dari persamaan linier $a \oplus x = b$, kita bisa menelaahnya dari persamaan dimensi satu $a + x = b$ dengan $a, b \in$ bilangan real tak negatif . Jelas bahwa bila $a > b$, maka persamaan $a + x = b$ tidak mempunyai solusi, sebaliknya bila $a \leq b$ maka persamaan mempunyai solusi $x = b - a$. Begitu juga untuk persamaan $a \oplus x = b$ dengan $a, b \in$, jika $a > b$ maka persamaan tidak mempunyai solusi dan sebaliknya bila $a \leq b$ maka persamaan mempunyai solusi $x = b$.

Selanjutnya dibahas jika *a* diganti dengan matrik *A*. Untuk matrik *A* ini, selalu didapat apa yang dikenal dengan subpenyelesaian terbesar dari $A \oplus x = b$. Sub penyelesaian terbesar adalah vektor terbesar *x* dari yang memenuhi persamaan $A \oplus x \leq b$. Penyelesaian dinotasikan oleh $A^*(A, b)$. Sub-penyelesaian terbesar tidak harus merupakan suatu penyelesaian dari $A \oplus x = b$. Contoh ; $A = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ persamaan $A \oplus x = b$ tidak mempunyai penyelesaian sebab bila punya penyelesaian berarti ada $x = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ sehingga $\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Didapat $p = 0$ dan $\max\{3, 4 + q\} = 2$. Jadi $A \oplus x = b$ tidak punya solusi. Dilain pihak secara umum, pertidaksamaan $A \oplus x \leq b$ selalu punya solusi. Hal ini bisa ditunjukkan bahwa $A \oplus x = b$ belum tentu mempunyai penyelesaian, dilain pihak $A \oplus x \leq b$ selalu punya penyelesaian. Sehingga bila suatu penyelesaian dari $A \oplus x = b$ ada, maka sub-penyelesaian terbesar adalah penyelesaiannya. Untuk memperjelas akan dibahas beberapa contoh sebagai berikut; $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}$ dengan penjelasan di atas maka didapat penyelesaian terbesar adalah $x=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}$. Penyelesaian ini juga memenuhi $A\oplus x=b$. Hal ini dapat dicek sebagai berikut $\begin{bmatrix}-5 & -4\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -1\end{bmatrix}=-x^T$ jadi $x=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}$ sehingga diperoleh $A\otimes x=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}=b$. Contoh lain $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}20\\ 4\end{bmatrix}$ dengan penjelasan di atas maka didapat penyelesaian terbesar adalah $x=\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}$. Tetapi penyelesaian ini memenuhi $A\oplus x\neq b$ jadi $A\oplus x=b$ tidak mempunyai solusi. Hal ini dapat dicek sebagai berikut $\begin{bmatrix}-20 & -4\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 0\end{bmatrix}=-x^T$ jadi $x=\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}$ sehingga diperoleh $A\otimes x=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 4\end{bmatrix}\leq\begin{bmatrix}20\\ 4\end{bmatrix}=b$.

Bentuk ke-tiga dari persamaan linier *max-plus* adalah $x=ax\oplus b$. Dalam menentukan solusi sistem persamaan linier bentuk ke-tiga ini akan sangat terkait dengan graf precendence. Berikut akan dijelaskan bagaimana menentukan solusi sistem persamaan linier dari $x=ax\oplus b$;

Misalkan $A\in\mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ dan $b\in\mathbb{R}_{\max}^{n}$, jika terdapat bobot rata-rata sirkuit graf $G(A)$ kurang dari atau sama dengan 0 dan $A^* \overset{def}{=} e\oplus A^+ = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^{\otimes i}$, maka didapatkan

$$\begin{aligned}
A^*\otimes b &= \bigoplus_{i=1}^{-\infty} A^{\otimes i}\otimes b\\
&= \left(\bigoplus_{i=1}^{-\infty} A^{\otimes i}\otimes b\right)\oplus(e\otimes b)\\
&= A\otimes\left(\bigoplus_{i=1}^{-\infty} A^{\otimes i}\otimes b\right)\oplus(e\otimes b)\\
&= A\otimes(A^*\otimes b)\oplus b
\end{aligned}$$

Selanjutnya pandang persamaan $x=ax\oplus b$ dengan memisalkan $x=A^*b$ maka diperoleh $A^*b=A(A^*b)\oplus b$ jadi solusi dari $x=Ax\oplus b$ adalah $x=A^*b$

Misalkan bobot sirkuit dalam *G(A)* adalah negative dan misalkan y adalah solusi pertama $x=Ax\oplus b$ selain $x=A*b$ maka untuk dari $x=Ax\oplus b$ untuk semua sirkuit *G(A)* berbobot negative adalah tunggal.

SIMPULAN

Melalui bentuk umum sederhana dimensi satu sistem persamaan linier pada aljabar *max-plus*, dapat diambil kesimpulan bahwa persamaan $Ax \oplus b = Cx \oplus d$ mempunyai tiga solusi yang berbeda yaitu mempunyai solusi tunggal, mempunyai solusi banyak dan tidak mempunyai solusi. Ketiga kasus tersebut didapat dari kondisi-kondisi berikut; 1). Mempunyai solusi tunggal ketika $a < a'$ dan $b > b'$ atau $a < a'$ dan $b > b'$; 2). Mempunyai solusi banyak ketika $a = a'$ dan $b \neq b'$ atau $a \neq a'$ dan $b = b'$; 3). Tidak mempunyai solusi ketika $a < a'$ dan $b < b'$ atau $a > a'$ dan $b > b'$.

Pada sistem bentuk lain dari persamaan linier aljabar max-*plus* dapat dinotasikan dengan $a \oplus x = b$ dengan $a, b \in$. Untuk memberikan gambaran yang jelas bagaimana menentukan solusi dari persamaan linier $a \oplus x = b$, kita bisa menelaahnya dari persamaan dimensi satu $a + x = b$ dengan $a, b \in$ bilangan real tak negatif . Jelas bahwa bila $a > b$, maka persamaan $a + x = b$ tidak mempunyai solusi, sebaliknya bila $a \leq b$ maka persamaan mempunyai solusi $x = b - a$. Begitu juga untuk persamaan $a \oplus x = b$ dengan $a, b \in$, jika $a > b$ maka persamaan tidak mempunyai solusi dan sebaliknya bila $a \leq b$ maka persamaan mempunyai solusi $x = b$. Dan selanjutnya dibahas jika *a* diganti dengan matrik *A*. Untuk matrik *A* ini, selalu didapat apa yang dikenal dengan subpenyelesaian terbesar dari $A \oplus x = b$. Sub penyelesaian terbesar adalah vektor terbesar *x* dari yang memenuhi persamaan $A \oplus x \leq b$. Penyelesaian dinotasikan oleh $A^*(A, b)$. Sub-penyelesaian terbesar tidak harus merupakan suatu penyelesaian dari $A \oplus x = b$.

DAFTAR PUSTAKA

Baccelli,F.,Cohen,G.,olsde,G.j.,Quadrat, J.P. (2001). *Synchroni Zation and Linearity*, New York: Jhon willey and sons.

Chung, Misoo (1995), ‘*Eigen Values and Eigen Vektors In The Max-plus Algebra*’ Thesis submitted to the faculty of the graduate school of the University of Colorado at Denver.

Subiono. (2012). *Aljabar Max-Plus dan Terapannya*, Surabaya: ITS.