KONGRUENSI PADA SUBHIMPUNAN BILANGAN BULAT

Paridjo
Pendidikan Matematika FKIP Universitas Pancasakti Tegal
muhparidjo@gmail.com

Abstrak

Himpunan bilangan bulat dilambangkan dengan $\mathbb{Z}$ merupakan himpunan bagiaan dari sistem bilangan Real dilambangkan dengan $\mathcal{R}$, sifat-sifat pada bilangan $\mathbb{Z}$ merupakansifat-sifat bilangan $\mathcal{R}$. Demikian juga utuk operasi hitungnya. Himpunan bagian $\mathbb{Z}_n = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}$ didefinisikan sebagai relasi bilangan bulat. Kongruensi modulo n merupakan suatu relasi ekivalensi pada di $\mathbb{Z}$. Untuk bilangan a $\in \mathbb{Z}n$ kelas ekivalen modulo n yang memuat a kita tandai dengan $\bar{a}$, yaitu $\bar{a} = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \equiv a \ (mod\ n)\}$. Koleksi kelas ekivalen modulo n kita tandai dengan $\mathbb{Z}n$, yaitu $\mathbb{Z}n = \{\bar{a} \mid a \in \mathbb{Z}\}$. Operasi tambah dan operasi kali pada $\mathbb{Z}n$ didefinisikan untuk setiap $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ di $\mathbb{Z}n + : (\bar{a}, \bar{b}) \rightarrow \overline{a+b}$ dan $\mathrm{x} : (\bar{a}, \bar{b}) \rightarrow \overline{ab}$. Struktur ($\mathbb{Z}n$, +, x) untuk $n > 1$ operasi jumlah maupun kali memiliki sifat-sifat tertutup, assosiatif, komutatif, meniliki unsur identitas, memiliki elemen netral dan untuk jumlah dan kali memiliki sifat distributif.

Katakunci : bilangan bulat, operasi, ekivalen modulo

PENDAHULUAN

Himpunan bilangan bulat dilambangkan dengan $\mathbb{Z}$ merupakan himpunan bagiaan dari sistem bilangan Real dilambangkan dengan $\mathcal{R}$, sifat-sifat pada bilangan $\mathbb{Z}$ merupakansifat-sifat bilangan $\mathcal{R}$. Demikian juga utuk operasi hitungnya. Sub himpunan $\mathbb{Z}_n = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}$ didefinisikan sebagai relasi bilangan bulat. Kongruensi modulo n merupakan suatu relasi ekivalensi pada di $\mathbb{Z}$. Untuk bilangan a $\in \mathbb{Z}n$ klas ekivalen modulo n yang memuat a kita tandai dengan $\bar{a}$, yaitu $\bar{a} = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \equiv a \ (mod\ n)\}$. Koleksi klas ekivalen modulo n kita tandai dengan $\mathbb{Z}n$, yaitu $\mathbb{Z}n = \{\bar{a} \mid a \in \mathbb{Z}\}$. Operasi tambah dan operasi kali pada $\mathbb{Z}n$ didefinisikan untuk setiap $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ di $\mathbb{Z}n + : (\bar{a}, \bar{b}) \rightarrow \overline{a+b}$ dan $\mathrm{x} : (\bar{a}, \bar{b}) \rightarrow \overline{ab}$. Struktur ($\mathbb{Z}n$, +, x) untuk $n > 1$ opersai jumlah maupun kali memiliki sifat-sifat tertutup, assosiatif, komutatif, meniliki unsur identitas, memiliki elemen netral dan untuk jumlah dan kali memiliki sifat distributif. Contoh diberikan untuk memperjelas sifat operasi pada $\mathbb{Z}n$.

Sistem Bilangan Bulat

Himpunan semua bilangan bulat kita tandai dengan $\mathbb{Z}$. Tanda ini juga kita gunakan untuk system bilangan bulat, yaitu himpunan $\mathbb{Z}$ yang dilengkapi dengan operasi tambah: + dan operasi kali: x; kita tulis $(\mathbb{Z}, +, \mathrm{x})$. Jadi $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, \mathrm{x})$.

Kita kemukakan sifat berikut tanpa bukti.

Sifat 1.1 Sistem bilangan bulat menenuhi sifat berikut.

1. Terhadap operasi tambah
   a. Setiap bilangan a, b dan c di $\mathbb{Z}$ memenuhi sifat asosiatif,
   $(a + b) + c = a + (b + c)$.
   b. Setiap bilangan a dan b di $\mathbb{Z}$ memenuhi sifat komutatif, $a + b = b + a$
   c. Terdapat a dan b di $\mathbb{Z}$ yang memenuhi a + 0 = a untuk semua bilangan $a \in \mathbb{Z}$
   d. Untuk setiap bilangan $a \in \mathbb{Z}$terdapat bilangan $-a \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi
   $a + -a) = 0$
2. Terhadap operasi kali
   a. Setiap bilangan a, b dan c di $\mathbb{Z}$ memenuhi sifat asosiatif, $(ab)\ c = a(bc)$.
   b. Setiap bilangan a dan b di $\mathbb{Z}$ memenuhi sifat komutatif, $a\ b = b\ a$
   c. Terdapat bilangan 1 di $\mathbb{Z}$ yang memenuhi $a.1 = a$ untuk semua bilangan
   $a \in \mathbb{Z}$
   d. Untuk setiap bilangan a dan b di $\mathbb{Z}$ yang memenuhi $ab = 0$ berlaku
   $a = 0$ atau $b = 0$
3. Terdapat operasi tambah dan operasi kali, setiap bilangan a, b dan c di Z memenuhi sifat distributive , $a(b + c) = ab + ac$

Sifat 1.2 Untuk setiap bilangan a dan b di daerah bilangan bulat$\mathbb{Z}$, berlaku:

1. $0a = 0$
2. $(-a)b = a(-b) = -ab$

Bukti 1.

Dari sifat 1.1kita punya $0 = 0 + 0$. Jadi $0a = (0 + 0)a$, atau $0a = 0a + 0a$

Tambahkan pada ruas kanan dan kiri $-\ 0a$, kita peroleh

$$0a + (-0a) = (0a + 0a) + (-0a)$$
$$0 = 0a + \big(0a + (-0a)\big)$$
$$0 = 0a + 0$$
$$0 = 0a$$

Bukti 2
Dari 1 dan sifat 1.2, khususnya hubungan $a + (-a) = 0$, kita peroleh

$0 = 0b = (a + (-a))b$, dan $0 = ab + a(-b)$

Dengan menambahkan $-ab$ pada ruas kiri dan kanan kita peroleh

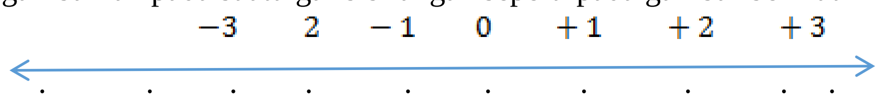
$$(-ab) + 0 = (-ab) + (ab + (-a)\ b)$$
$$-ab = ((-ab) + ab) + (-a)b$$
$$-ab = 0 + (-a)\ b$$
$$-ab = (-a)\ b.$$

Dengan cara yang sejalan kita peroleh $-ab = a(-b)$.

Jadi $(-a)\ b = a\ (-b) = -ab$

Urutan Bilangan Bulat

Suatu kenyataan bahwa bilangan bulat adalah bahwa setiap dua bilangan a dan b di $\mathbb{Z}$ senantiasa dapat saling dibandingkan: a lebih kecil dari b, a lebih besar dari b, a sama dengan b, berturut-turut kita tuliskan denan $a, b, a > b$ dan $a = b$. Dari ketiga hubungan tersebut hanya satu yang berlaku. Dengan demikian, semua biangan blat dapat kita gambarkan pada suatu garis bilangan seperti pada gambar berikut



Dari gambar di atas $a < b$ jika bilangan a terletak di sebelah kiri bilangan b Bilangan $a \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $a < 0$ kita katakana *positif*. Sebaliknya yang memenuhi $a < 0$ kita katakana a negatif. Himpunan semua bilangan bulat positif kita sebut juga himpunan bilangan *asli*, kita tandai dengan $\mathbb{N}$

Jelas, himpuan bilangan asli $\mathbb{N}$ membentuk subhimpunan di daerah bilangan bulat $\mathbb{Z}$.

Sifat 1.3 Subhimpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dari daerah bilangan bulat Z memenuhi:

1. Untuk setiap bilangan a dan $b\ di\ \mathbb{N}$ berlaku $a + b \in \mathbb{N}$ dan $ab \in \mathbb{N}$
2. Untuk setiap bilangan $a \in \mathbb{Z}$ berlaku atau $a = 0$ atau $a \in \mathbb{N}$atau -$a \in \mathbb{Z}$

Sifat 1.4 Misalkan a dan b di $\mathbb{Z}$ Maka $a < b$ jika dan hanya jika $b - a \in N$.

Dalam sistem $\mathbb{N}$, bilangan 1 mempunyai sifat khusus dibandingkan dengan bilangan lain $\mathbb{N}$, yaitu setiap $x \in \mathbb{Z}$memenuhi hubungan $1 \leq x\ (1 = x\ atau\ 1 < x)$

Dalam hal kita katakana bilangan 1 adalah bilangan tersecil di $\mathbb{N}$ Sifat ini dapat diperluas untuk setiap subhimpunan tak hampa. Misal$\mathbb{N}'$ subhimpunan yang memuat semua bilangan genap di $\mathbb{N}$ Maka 2 adalah bilangan terkecil di N'. Untuk menunjukkan keberlakuan sifat ini secara umum. Lebih dahulu kita ketengahkan aksioma peano untuk himpunan bilanan asli $\mathbb{N}$.

Sifat 1.5 (Aksioma Peano)

1) 1 adalah anggota N
2) Setiap $x \in \mathbb{N}$ mempunyai pengikut $p(x) \in \mathbb{N}$.
3) Dua bilangan di $\mathbb{N}$ yang berbeda mempunyai pengikut yang berbeda.
4) 1 bukan pengikut bilangan $x \in \mathbb{N}$ yang manapun.
5) Jika subhimpunan $S \subset \mathbb{N}$ memuat 1 dan pengikut dari setiap bilangan di S maka $S = \mathbb{N}$

Aksioma ini dikemukakan oleh Guisseppe Peano sekitar 1890 sebagai rumusan formal konsep bilangan asli .
Pada gambar garis bilangan pengikut *p(x)* suatu bilangan $x \in \mathbb{N}$ adalah bilangan yang terletak langsung di sebelah kanannya. Jadi $p(x) = x + 1$.
Pengertian pengikut tidak lain adalah pemetaan $P: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ yang bersifat satu-satu dan $p(x) \neq 1$ untuk semua $x \in \mathbb{N}$

3. Sifat bilangan bulat

Misalkan kita mempunyai dua bilangan adan b di $\mathbb{Z}$. Persamaan $a + x = b$ senantiasa mempnyai solusi di $\mathbb{Z}$ Artinya senantiasa terdapat bilangan $x \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $a + x = b$. Selain itu untuk bilangan bulat a tidak sanma dengan nol, persamaan ax = b tidak senantiasa mempunyai solusi di $\mathbb{Z}$. Dalam hal persamaan $ax = b$ mempunyai solusi di $\mathbb{Z}$ bilangan a kita sebut pembag dari . Dalam hal ini pengertian pembagi hanya dikenakan pada bilangan bulat tidak sama dengan nol. Kita dapat memberikan definisi yang lebih umum.

Definisi 3.1 Misalkan a dan b blangan di $\mathbb{Z}$ Bilangan a disebut pembagi dari b jika bilangan $c \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $ac = b$.

Bilangan a pembagi bilangan b kita tandai dengan $a \mid$ b, sebaliknya a bukan pembagi b kita tandai dengan $a \nmid b$. Dalam hal $a = 0$ bilangan a hanya dapat menjadi pembagi bilangan $b = 0$.

Selain kata pembagi, kita gunakan juga kata factor, yaitu a factor dari b, dapat juga mengatakan bahwa a membagi b, atau b dapat dibagi oleh a. Pembagi bilangan 1 kita sebut unit. Jadi, bilangan $u \in \mathbb{Z}$ adalah unit jika terdapat bilangan $v \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $uv = 1$. Bilanan 1 dan -1 adalah unit di $\mathbb{Z}$

Khusus untuk bilangan $a \neq 0$, pengertian bilangan a pembagi bilangan b dapat kita perluas mencakup a bukan pembagi b.

Nilai mutlak suatu bilangan $\in \mathbb{Z}$, yaitu $|a|$, yang didefinisikan oleh:

$$|a| = \begin{cases} = a, & jika\ a \geq 0 \\ = -a & jika\ a < 0 \end{cases}$$

Sifat-sifat

Sifat 3.1 Misalkan a dan b di $\mathbb{Z}$, dan a $\neq$ 0. Maka terdapat bilangan q dan r yang memenuhi $b = qa +$ r dan $0 < r < |a|$.

Sifat 3.2 Misalkan S subhimpunan dari $\mathbb{Z}$ yang tak kosong. Untuk setiap bilangan a dan b di S, berlaku $a + b \in S$ dan $a - b \in S$. Maka terdapat bilangan $n \in S$ yang bersifat $S = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Sifat 3.3. Setiap bilangan a dan b di $\mathbb{Z}$ yang tak keduanya 0 senantiasa mempunyai pembagi sekutu terbesar $d \in \mathbb{Z}$, dan $d = sa + tb$ untuk suatu s dan t di $\mathbb{Z}$.

Sifat 3.4. Misalkan a suatu bilangan di $\mathbb{Z}$ yang bukan $0, 1$ atau -1. Maka a senantiasa dapat dituliskan sebagai hasil kali factor prima. Penulisan ini, tanpa melihat factor 1 dan -1 dan membedakan factor sekawan, tunggal.

Kongruensi

Dalam sifat 3.2 telah dikemukakan sub himpunan

$$\mathbb{Z}_n = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Dengan subhimpunan ini kita definisikan relasi di daerah bilangan bulat.

Definisi 4.1 Dua bilangan a dan b di $\mathbb{Z}$ dikatakan kongruen modulo n, ditulis

$a \equiv b$ (mod n) , jika $a - b \in \mathbb{Z}n$

Sifat 4.1 Kongruensi modulo n adalah suatu relasi ekuivalen di $\mathbb{Z}$

Bukti:

1. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \equiv a$ (mod n), karena $a - a = 0 \in \mathbb{Z}n$
2. Ambil a dan b di $\mathbb{Z}$ dan misalkan $a \equiv b$ (mod n).

   Menurut definisi 4.1 kita mempunyai $- b \in \mathbb{Z}n$; jadi juga $b - a \in \mathbb{Z}n$. Kita peroleh $b \equiv a$ (mod n).

3. Ambil a, b dan c di $\mathbb{Z}$ dan misalkan $a \equiv b$ (mod n) dan $b \equiv c$ (mod n). Menurut definisi 4.1 , kita punya $a - b \in \mathbb{Z}\, n$ dan $b - c \in Zn$. Selanjutnya kita punya $(a - b) + (b - c) = a - c \in Zn$. Kita peroleh $a \equiv c$ (mod n). Jadi kongruensi modulo n memenuhi sifat refleksif, simetris dan transitif. Dengan demikian, suatu relasi ekivalen

Untuk bilangan a $\in \mathbb{Z}n$ klas ekivalen modulo n yang memuat a kita tandai dengan $\bar{a}$, yaitu

$$\bar{a} = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \equiv a \ (mod\ n)\}$$

Koleksi klas ekivalen modulo n kita tandai dengan $\mathbb{Z}n$, yaitu

$$\mathbb{Z}n = \{\ \bar{a} \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

Telah dijelaskan bahwa $\mathbb{Z}n$ membentuk suatu partisi di $\mathbb{Z}$, yaitu saling lepas dan gabungannya adalah seluruh $\mathbb{Z}$. dalam tanda $\bar{a}$ dapat kita baca: bilangan a adalah wakil dari kelas ekivalen $\bar{a}$. Di $\mathbb{Z}n$, untuk setiap $n \neq 0$, setiap kelas ekivalen mempunyai wakil yang tak hingga banyaknya.
Selanjutnya untuk mendefinisikan operasi tambah dan operasi kali pada $\mathbb{Z}n$ terlebih dulu kita tinjau pengaitan berikut, yang didefinisikan untuk setiap $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ di $\mathbb{Z}n$.

$$+\colon (\bar{a}, \bar{b}) \rightarrow \overline{a+b}$$

$$\mathrm{x} : (\bar{a}, \bar{b}) \rightarrow \overline{ab}$$

Perlu kita tujukkan bahwa pengaitan di atas tidak tergantung pada wakil dari kelas ekivalen. Misalkan $\bar{a} = \bar{a}_1 \ \ dan \ \ \bar{b} = \bar{b}_1$. Kita tunjukkan bahwa

$\overline{a+b} = \overline{a_1 + b_1}$ dan $\overline{ab} = \overline{a_1 b_1}$

Dari hubungan $\bar{a} = \bar{a}_1 \ \ dan \ \ \bar{b} = \bar{b}_1$ berturut-turut kita punya $a = a_1 + sn$ dan $b = b_1 + tn$ untuk suatu s dan t di Z. Kita punya hubungan berikut:

$a + b = a_1 + b_1 + (s + t)n$, dengan $s + t \in \mathbb{Z}$

ab = $a_1\, b_1 + (\, a_1 t + b_1 s + stn)\, n$ dengan $(\, a_1 t + b_1 s + stn) \in \mathbb{Z}$.

Kita peroleh $\overline{a+b} = \overline{a_1 + b_1}$ dan $\overline{ab} = \overline{a_1 b_1}$

Dengan demikian , pengaitan $+\colon (\bar{a}, \bar{b}) \rightarrow \overline{a+b}$ dan $\mathrm{x} : (\bar{a}, \bar{b}) \rightarrow \overline{ab}$, masing-masing mendefinisikan pemetaan $\mathbb{Z}n$ x $\mathbb{Z}n$. Kita punya definisi berikut:

Definisi 4.2 Operasi tambah dan operasi kali pada $\mathbb{Z}n$ berturut-turut adalah pemetaan $+:$ $\mathbb{Z}$n x $\mathbb{Z}$n $\to \mathbb{Z}n$ yang didefinisikan oleh pengaitan

$$+ : (\bar{a}, \bar{b}) \to \bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b},$$

Dan $pemetaan\ x :$ $\mathbb{Z}n\ x\ \mathbb{Z}n \to \mathbb{Z}n$ yang didefinisikan oleh pengaitan

$$\mathrm{x} : (\bar{a}, \bar{b}) \to \bar{a}\,\bar{b} = \overline{ab}\,,$$

untuk semua $\bar{a}\ dan\ \bar{b}$ di $\mathbb{Z}n$

Kita mempunyai system struktur ($\mathbb{Z}n$, +, x) . Sifat berikut menjelaskan struktur yang dimiliki oleh sistem ini.

Sifat 4.2 Untuk setiap bilangan bulat $n > 1$, dan $\bar{a},$ $\bar{b}$ dan $\bar{c}$ di system ($\mathbb{Z}$n, +, x) berlaku:

1. Terhadap operasi tambah:
   a. $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = (\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$
   b. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$
   c. Terdapat unsur $\bar{0} \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $\bar{0} + \bar{a} = \bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$
   d. Untuk setiap - $\bar{a} \in \mathbb{Z}n$. terdapat – $(\bar{a})$ $\in \mathbb{Z}$n. yang memenuhi $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$
2. Terdapat operasi kali:
   a. $(\bar{a}\bar{b})\,\bar{c} = \bar{a}(\bar{b}\,\bar{c})$,
   b. $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$
   c. Terdapat unsur $\bar{I} \in \mathbb{Z}n$ yang memenuhi $\bar{I}\bar{a} = \bar{a}\,\bar{I} = \bar{a}$
   d. Untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}n$. terdapat a^{-1} $\in \mathbb{Z}$n. yang memenuhi $\bar{a}.a^{-1} = \bar{I}$
3. Terhadap operasi tambah dan operasi kali secara bersama-sama berlaku
   $\bar{a}\,(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\,\bar{c}$)

Sistem ($\mathbb{Z}n$, +, x) selanjutnya kita tulis $\mathbb{Z}n$, kita sebut system bilangan bulat modulo n. Khusus untuk suatu n bilangan bulat prima system $\mathbb{Z}n$ memenuhi sifat lain selain yang telah disebut dalam sifat 4.2.

Sifat 4.3 Misal p suatu bilangan prima di $\mathbb{Z}$. Untuk setiap unsur $\bar{a} \in Zp$, $\bar{a} \neq \bar{0}$, terdapat $\bar{b}$ $\in Zp$ yang memenuhi $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a} = \bar{I}$

Bukti.

Dari unsur $\bar{a} \neq \bar{0}$ kita punya $a \in \mathbb{Z}p$ atau p bukan pembagi dari a. Dengan demikian pembagi sekutu dari p dan a adalah 1. Menurut sifat 3.3 terdapat bilangan bulat s dan t yang memenuhi $1 = sp + ta$.

Kita peroleh $\bar{I} = \bar{t}\bar{a}$ dan $\bar{b} = \bar{t}$ adalah unsur $\mathbb{Z}p$ yang kita cari.

Contoh:

$$Z_n = \left\{\bar{a} \,\middle|\, a \in Z\right\}$$

$$\bar{a} = \{x \mid x \in Z, x \equiv a \pmod{n}\}$$

Misal n = 5

$$\bar{a} = \{x \mid x \in Z, x \equiv a \pmod{5}\}$$

$$\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$$

$$\bar{0} = \{\ldots, -5, 0, 5, 10, \ldots\}$$

$$\bar{1} = \{\ldots, -4, 1, 6, 11, \ldots\}$$

$\bar{2}$ = { . . . , -3 , 2, 7, 12, . . . }

$\bar{3}$ = { . . . , -2 , 3 , 8, 13, . . . }

$\bar{4}$ = { . . . , -1 , 4, 9, 14, . . . }

Perhatikan tabel penjumlahan $\mathbb{Z}_5$

Tabel 1 Penjumlahan $\mathbb{Z}_5$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

a. Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_5$, untuk setiap a, b di Z, maka $(\bar{a} + \bar{b}) \in \mathbb{Z}_5$, bersifat tertutup

b. Asosiatif, untuk setiap $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_5$ berlaku, $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$

Contoh:

Misal $\bar{a} = \bar{2}$, $\bar{b} = \bar{3}$ dan $\bar{c} = \bar{1}$

$\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{2} + (\bar{3} + \bar{1}) = \bar{2} + \bar{4} = \bar{1}$

$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = (\bar{2} + \bar{3}) + \bar{1} = \bar{0} + \bar{1} = \bar{1}$

c. Komutatif, untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_5$ berlaku, $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$

Misal $\bar{a} = \bar{2}$, $\bar{b} = \bar{4}$

$\bar{a} + \bar{b} = \bar{2} + \bar{4} = \bar{1}$

$\bar{b} + \bar{a} = \bar{4} + \bar{2} = \bar{1}$

d. Terdapat unsur $\bar{0} \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $\bar{0} + \bar{a} = \bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$

Contoh,
$\bar{0} + \bar{4} = \bar{4} + \bar{0} = \bar{4}$

e. Untuk setiap - $\bar{a} \in \mathbb{Z}n$. terdapat – $(\bar{a}) \in \mathbb{Z}$n. yang memenuhi $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$

Contoh.
$\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$, invers $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$

$\bar{1} + \bar{4} = \bar{0}$, invers $\bar{1}$ adalah $\bar{4}$

$\bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$, invers $\bar{2}$ adalah 3

$\bar{3} + \bar{2} = \bar{0}$, invers 3 adalah 2

$\bar{4} + \bar{1} = \bar{0}$, invers $\bar{4}$ adalah $\bar{1}$

Terhadap operasi kali .

Tabel 2 Tabel Perkalian $\mathbb{Z}_5$

X	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$

a. Operasi perkalian pada $\mathbb{Z}_5$ tertutup, untuk setiap

setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_5$ berlaku, $\bar{a}\bar{b} \in \mathbb{Z}_5$

a. Asosiatif, untuk setiap $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_5$ berlaku, $(\bar{a}\bar{b})\,\bar{c} = \bar{a}(\bar{b}\,\bar{c})$

Contoh:
Misal $\bar{a} = \bar{2}$,$\bar{b} = \bar{3}$ dan $\bar{c} = \bar{1}$

$(\bar{a}\bar{b})\,\bar{c} = (\bar{2}\ \bar{3})\bar{1} = \bar{1}\ \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{a}(\bar{b}\,\bar{c}) = \bar{2}\ (\bar{3}.\bar{1}) = \bar{2}\,.\bar{3} = \bar{1}$

b. Komutatif, untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_5$ berlaku, $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$

$\bar{a}\bar{b} = \bar{2}\,.\bar{3} = \bar{1}$

$\bar{b}\bar{a} = \bar{3}\,.\bar{2} = \bar{1}$

c. Terdapat unsur $\bar{I} \in \mathbb{Z}n$ yang memenuhi $\bar{I}\bar{a} = \bar{a}\,\bar{I} = \bar{a}$

Contoh:
$\bar{1}.\bar{1} = \bar{1}\,\bar{1} = \bar{1}$,

$\bar{1}.\bar{2} = \bar{2}\,\bar{1} = \bar{2}$

$\bar{1}.\bar{3} = \bar{3}\,\bar{1} = \bar{3}$

$\bar{1}.\bar{4} = \bar{4}\,\bar{1} = \bar{4}$

d. Untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}n$. terdapat $a^{-1} \in \mathbb{Z}$n. yang memenuhi $\bar{a}.a^{-1} = \bar{I}$

Contoh:
$\bar{1}\,\bar{1} = \bar{1}$, invers dari $\bar{1}$ adalah $\bar{1}$

$\bar{2}\,\bar{3} = \bar{1}$, invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{3}$

$\bar{3}\,\bar{2} = \bar{1}$,invers dari $\bar{3}$ adalah $\bar{2}$

4. Terhadap operasi tambah dan operasi kali secara bersama-sama berlaku
$\bar{a}\,(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\,\bar{c}$)

$\bar{2}\,(\bar{3} + \bar{4}) = \bar{2}\,(\bar{2}) = \bar{4}$

$\bar{2}\bar{3} + \bar{2}\,\bar{4}$) = $\bar{1} + \bar{3} = \bar{4}$)

Penjumlahan dan perkalian pada modulo 6 ($\mathbb{Z}6$)

Tabel 3 Tabel Penjumlahan $\mathbb{Z}6$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

a. Penjumlahan pada $\mathbb{Z}6$ tertutup, untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_6$ berlaku, $\bar{a} + \bar{b} \in \mathbb{Z}_6$

b. Asosiatif, untuk setiap $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_6$ berlaku, $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$

Contoh:
Misal $\bar{a} = \bar{2}$,$\bar{b} = \bar{3}$ dan $\bar{c} = \bar{1}$

$\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{2} + (\bar{3} + \bar{1}) = \bar{2} + \bar{4} = \bar{1}$

$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = (\bar{2} + \bar{3}) + \bar{1} = \bar{0} + \bar{1} = \bar{1}$

c. Komutatif, untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_6$ berlaku, $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$

Misal $\bar{a} = \bar{2}$, $\bar{b} = \bar{4}$

$\bar{a} + \bar{b} = \bar{2} + \bar{4} = \bar{0}$

$\bar{b} + \bar{a} = \bar{4} + \bar{2} = \bar{0}$

d. Terdapat unsur $\bar{0} \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $\bar{0} + \bar{a} = \bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$

Contoh,
$\bar{0} + \bar{4} = \bar{4} + \bar{0} = \bar{4}$

e. Untuk setiap - $\bar{a} \in \mathbb{Z}n$. terdapat – $(\bar{a}) \in \mathbb{Z}6$. yang memenuhi $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$

Contoh.
$\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$, invers $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$

$\bar{1} + \bar{5} = \bar{0}$, invers $\bar{1}$ adalah $\bar{5}$

$\bar{2} + \bar{4} = \bar{0}$, invers $\bar{2}$ adalah $\bar{4}$

$\bar{3} + \bar{3} = \bar{0}$, invers 3 adalah $\bar{3}$

$\bar{4} + \bar{2} = \bar{0}$, invers $\bar{4}$ adalah $\bar{2}$

$\bar{5} + \bar{1} = \bar{0}$, invers $\bar{5}$ adalah $\bar{1}$

Tabel 4 Tabel Perkalian $\mathbb{Z}6$

X	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Sifat-sifat

1. Operasi perkalian pada $\mathbb{Z}6$ tertutup, untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_6$ berlaku, $\bar{a}\bar{b} \in \mathbb{Z}_6$
2. Asosiatif, untuk setiap $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_5$ berlaku, $(\bar{a}\bar{b})\,\bar{c} = \bar{a}(\bar{b}\,\bar{c})$

   Contoh:
   Misal $\bar{a} = \bar{2}$, $\bar{b} = \bar{3}$ dan $\bar{c} = \bar{1}$

   $(\bar{a}\bar{b})\,\bar{c} = (\bar{2}\ \bar{3})\bar{1} = \bar{0}\ \bar{1} = \bar{0}$

   $\bar{a}(\bar{b}\,\bar{c}) = \bar{2}\ (\bar{3}.\bar{1}) = \bar{2}\ .\bar{3} = \bar{0}$

3. Komutatif, untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_6$ berlaku, $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}'\bar{a}$

   $\bar{a}\bar{b} = \bar{2}\,.\bar{4} = \bar{2}$

   $\bar{b}\bar{a} = \bar{4}\,.\bar{2} = \bar{2}$

4. Mempunyai unsur identitas, Terdapat unsur $\bar{I} \in \mathbb{Z}n$ yang memenuhi $\bar{I}\bar{a} = \bar{a}\,\bar{I} = \bar{a}$

   Identitas perkalian $\mathbb{Z}_6$ adalah $\bar{1}$

   $\bar{1}.\bar{1} = \bar{1}\,\bar{1} = \bar{1}$,

   $\bar{1}.\bar{2} = \bar{2}\,\bar{1} = \bar{2}$

   $\bar{1}.\bar{3} = \bar{3}\,\bar{1} = \bar{3}$

   $\bar{1}.\bar{4} = \bar{4}\,\bar{1} = \bar{4}$

   $\bar{1}.\bar{5} = \bar{5}\,\bar{1} = \bar{5}$

5. Terdapat $\bar{a} \in \mathbb{Z}6$. ada $a^{-1} \in \mathbb{Z}6$. yang memenuhi $\bar{a}.a^{-1} = \bar{I}$

   $\bar{1}\,\bar{1} = \bar{1}$, invers dari $\bar{1}$ adalah $\bar{1}$

   $\bar{5}\,\bar{5} = \bar{1}$, invers dari $\bar{5}$ adalah $\bar{5}$

   Tidak semua unsur di $\mathbb{Z}6$, tidak mempunyai invers

SIMPULAN

Dari uraian di atas, disimpulkan bahwa operasi jumlah dan kali pada subhimpunan $\mathbb{Z}n$, memenuhi sifat-sifat operasi bilangan yang berlaku pada himpunan $\mathbb{Z}$. Operasi jumlah untuk n bilangan bukan prima semua sifat dapat dipenuhi, namun untuk operasi kali tidak semua anggota $\mathbb{Z}n$ mempunyai invers.

DAFTAR PUSTAKA

Achmad Arifin. 2000. *Aljabar*. Bandung: ITB Bandung

Aucil Daniel L. 1979. *Intermediate Aljabar* . California. - Addision- Wesley

https://dwipurnomoikipbu.files.wordpress.com/2008/11/bab-iii-kongruensi.doc, (tanggal 7 Oktober 2016)

Keedy, Mervin L dan Bittinger Marvin L.1986. *Algebra and Trigonometry* . Addision- Wesley

Mathematics.its.ac.id/module/downlot_tugas.php?file=6...pdf (8 Oktober 2016)