MODEL PERSAMAAN DIFERENSIAL PADA INTERAKSI DUA POPULASI

Supandi, Saifan Sidiq Abdullah
Fakultas PMIPATI Universitas PGRI Semarang
hspandi@gmail..com

Abstrak

Persaingan kehidupan di alam dapat dikategorikan dua jenis yaitu pertama persaingan antara dua spesies dengan jenis makanan yang sama, dan yang kedua persaingan antara dua spesies dengan satu spesies sebagai pemangsa dan yang lainnya sebagai mangsa. Dalam paper ini akan dibahas model persaingan dua spesies model kedua, yaitu pemangasa-mangsa dengan menggunakan sistem persamaan diferensial. Dari model ini akan ditentukan kapan kedua spesies saling berdampingan, atau kapan salah satu diantaranya akan punah dengan melihat parameter parameter yang diberikan.

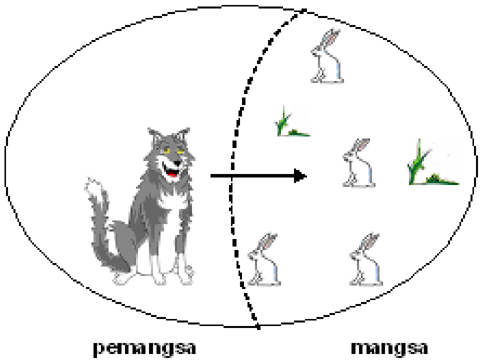
Kata Kunci: titik kritis, nilai eigen, stabil

PENDAHULUAN

Diberikan dua spesies yang berbeda, misalkan pemangsa dan mangsa yang hidup dalam suatu habitat atau wilayah yang sama dan bersifat tertutup (Murray, JD., 2002). Selama kuru waktu tertentu kedua spesies tersebut hidup bersama dan saling berinteraksi. Dalam model pemangsa-mangsa maka pemangsa dalam model ini memakaan mangsa, sedangkan mangsa memakan makanan lain yang ada dalam wilayah tersebut yang tersedia takterbartas. Tanpa adanya mangsa maka populasi pemangsa akan menurun dan lama kelamaan akan musnah dalam kurun waktu tertentu. Selanjutnya mangsa merupakan makanan pemangsa. Sedangkan jika tidak ada pemangsa maka populasinya tumbuh terus secara tak terbatas.

Jika populasi pemangsa lebih sedikit dibanding dengan populasi mangsa, maka populasi mangsanya berkembang biak secara cepat. Hal ini akan mengakibatkan sumberdaya alam pendukung yang dimakan oleh mangsa akan lebih cepat berkurang daripada kecepatan pertumbuhan populasi masngsa itu sendiri. Sebaliknya apabila populasi pemangsanya jauh lebih besar dibanding dengan populasi mangsa, maka populasi mangsanya semakin cepat berkurang, dan pada waktu tertentu akan punah. Ini akan berakibat pula populasi pemangsanya akan berkurang juga dan juga lama kelamaan akan punah karena mangsa sudah habis.. Permasalah seperti ini merupakan salah satu permasalahan atau kajian dalam ekologi agar kedua spesies tersebut dapat hidup berdampingan (ShonKwuiler, R.W. & Herod J. 2009). Model mangsa pemangsa yang banyak dikenal adalah model Lotka-Volterra. Menurut (Wiggins, Stephen, (2003), Ilfadillah, Juwita Sari, Nurafni, 2013) model ini disusun berdasarkan asumsi-asumsi antara lain, (1) dalam keadaan tanpa pemangsa, lingkungan hidup populasi mangsa sangat ideal sehingga perkembangannya takterbatas, (2) pertumbuhan pemangsa ideal, kecuali jika terdapat kendala pada ketersediaan makanan, (3) laju pemangsa memakan mangsa dan laju pertemuan antara pemangsa dan mangsa bersifat proporsional, (4) laju kematian pemangsa adalah konstan, tidak terpengaruh terhadap kepadatan dan umur pemangsa.

Sebagai contoh dua spesies yang interaksi kehidupannya dipandang sebagai pemangsa dan mangsa antara lain, (1) serigala dan kelinci, (2) ikan Grass Carp dan Enceng Gondok (Dwi Fahmi Ilmiawan. 2015), dan sebagainya.



Gambar 1. Serigala dan kelinci

Pada Gambar 1, diberikan serigala dan kelinci yang hidup dalam suatu habitat tertutup. Untuk kelangsungan hidupnya serigala memakan kelinci, sedangkan kelinci memakan makanan lain yang ada di alam sekitarnya (Ilfadillah, Juwita Sari, Nurafni, 2013)

PEMBAHASAN

Misalkan dua spesies mangsa-pemangsa dimodelkan sebagai berikut:

$x(t)$: populasi mangsa pada saat t, dan

$y(t)$: populasi pemangsa pada saat t

Mangsa tanpa adanya pemangsa populasinya tumbuh cepat tak terbatas. Dalam hal ini, laju pertumbuhan populasinya sebanding dengan populasi pada saat yang sama. Secara matematis dapat dimodelkan dalam persamaan (1)

$$\frac{dx}{dt} \sim x \text{ atau } \frac{dx}{dt} = ax \ldots\ldots (1)$$

Dengan a = konstanta pertumbuhan mangsa.

Disisi lain dengan adanya pemangsa maka akan terjadi interaksi antara mangsa dan pemangsa, yaitu mangsa dimakan pemangsa. Dengan adanya pemangsa populasi mangsa akan berkurang. Sehingga laju pertumbuhan populasi mangsa sebanding dengan interaksi antara mangsa dan pemangsa. Hubungan ini dapat dapat dimodelkan dalam model matematis (2).

$$\frac{dx}{dt} \sim xy \ atau \ \frac{dx}{dt} = -bxy \ldots\ldots (2)$$

Dengan $b =$ konstanta interaksi antara mangsa dan pemangsa

Hubungan persamaan (1) dan (2) akan memberikan perkembangan mangsa dan pemangsa. Model hubungan kedua persamaan tersebut dituliskan dalam model persamaan:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

Persamaan terakhir menunjukkan bahwa pertumbuhan dari populasi mangsa akan dipengaruhi oleh pemangsa. Bentuk pengaruhnya yaitu menghambat atau mengurangi laju populasi mangsa..

Laju pertumbuhan pemangsa tanpa adanya mangsa akan pelan , dan bahkan akan meluruh menuju kepunahan. Dengan demikian laju peluruhan populasinya sebanding populasi pada saat yang sama. Secara matematis dapat dimodelkan menjadi:

$$\frac{dy}{dt} \sim y \ atau \ \frac{dy}{dt} = -cy \ldots\ldots (3)$$

dengan $c =$ konstanta keseimbangan atau konstanta peluruhan pemangsa.

Dengan adanya mangsa maka akan terjadi interaksi antara pemangsa dan mangsa, dimana pemangsa akan memakan mangsa. Dengan demikian akan menyebabkan bertambahnya populasi pemangsa dan mengurangi pertumbuhan mangsa. Laju pertumbuhan populasi pemangsa sebanding dengan interaksi antara pemangsa dan mangsa.

$$\frac{dy}{dt} \sim xy \ atau \ \frac{dy}{dt} = dxy \ldots\ldots (4)$$

Jika persamaan (3) dan persamaan (4) digabung makan diperoleh persamaan (5)

.

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy \ldots\ldots (5)$$

Persamaan (5) menunjukkan bahwa laju pertumbuhan populasi pemangsa didorong karena adanya interaksi dengan mangsa tetapi tergantung dari jumlah mangsa. Selanjutnuya karena mangsa dan pemangsa hidup dalam habitat yang sama, maka model matematis dari masalah mangsa pemangsa menjadi gabungan antara persamaan (2) dan persamaan (5):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases} \ldots\ldots (6)$$

Dalam perkembangannya, pertumbuhan mangsa da pemangsa akan sangata bergantung pada kondisi awal di habitat tersebut. Sehngga populasi awal merupakan syarat awal dari (6). Syarat awal dari persamaan (6) dapat ditulis sebagai berikut:

$$x(t_0) = x_{t_0} \; dan \; y(t_0) = y_{t_0}$$

Sistem persamaan diferensial (6) di atas disebut juga sebagai Model Matematis Pemangsa-Mangsa dan disebut juga dengan persamaan **Lotka-Volterra (** Anderson , W & Blake. 2012)

Analisis Model Matematis

Penyelesaian persamaan (6) merupakan dua fungsi terhadap waktu t, yaitu $x(t)$ dan $y(t)$. Diberikan sistem persamaan (6), akan dicari besaran $x(t)$ dan $y(t)$ yang memenuhi (6). Untuyk menyelesaikan pertumbuhan keduia spesies, akan dicari dahulu titik kritis dari sistem persamaan (6).

Misalkan persamaan (6) ditulis kembali menjadi,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x,y) \end{aligned}\right. \quad \dots\dots (7)$$

Dengan

$$f(x,y) = ax - bxy$$

$$g(x,y) = -cy + dxy$$

Titik kritis persamaan tersebut diperoleh ketika turunan pertamanya adalah nol, atau dapat dalambentuk sistem persamaan:

$$\frac{dx}{dt} = 0$$
$$\frac{dy}{dt} = 0$$

Dengan demikian diperoleh,

i) $\frac{dx}{dt} = 0 \rightarrow 0 = ax - bxy$

$$0 = x(a - by) \rightarrow x = 0 \text{ atau } y = a/b$$

ii) $\frac{dy}{dt} = 0 \rightarrow 0 = -cx + dxy$

$$0 = y(-c + dx) \rightarrow y = 0 \text{ atau } x = c/d$$

Dari i) dan ii) diperoleh titik kritisnya yaitu (0,0) dan $\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right)$

Kestabilan Titik Kritis

Untuk mengetahui jenis titik kritis dari persamaan diferensial (7) dibuat ke dalam matriks **Jacobian**, yaitu

$$J=\begin{bmatrix}\frac{df}{dx} & \frac{df}{dy}\\ \frac{dg}{dx} & \frac{dg}{dy}\end{bmatrix}$$

Dengan demikian untuk sistem persamaan (6) diperoleh matrik Jacobian sebagai berikut;

$$J=\begin{bmatrix}a-by & -bx\\ dy & -c+dx\end{bmatrix}$$

Dengan matrik Jacobian di atas maka untuk titik kritis $(0{,}0)$ diperoleh Jacobian;

$$J_{(0,0)}=\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & -c\end{bmatrix}$$

Niilai eigen matriks dari matri Jacobian untuk titik kritis (0,0) ini adalah a dan $-c$, dengan a dan c adalah bilangan positif. Dari kedua nilai eigen terdapat eigen yang real dan positif, dengan demikian titik kritis $(0{,}0)$ merupakan titik pelana (*sadde*) dan tidak stabil (Lawrence Perko, 2001)

Untuk titik kritis $\left(\frac{c}{d},\frac{a}{b}\right)$, maka matrik Jacobian menjadi

$$J_{(0,0)}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{bc}{d}\\ \frac{ad}{b} & 0\end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks Jacobian untuk titik kritis $\left(\frac{c}{d},\frac{a}{b}\right)$ yaitu $i\sqrt{ac}$ dan $-i\sqrt{ac}$. Nilai eigen dalam bentuk bilangan imajiner (dengan bagian real yang sama) dan berbeda tanda. Dengan demikian titik kritis $\left(\frac{c}{d},\frac{a}{b}\right)$ berjenis pusat dan bersifat stabil.

Trajektori

Trayektori pada bidang fase dari sistem persamaan (6) dinyatakan dalam $\frac{dy}{dx}$, yaitu:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-c+dx)y}{(a-by)x}$$

dan:

$$\frac{(a-by)dy}{y} = \frac{(-c+dx)dx}{x}$$

Dengan mengintegralkan kedua sisi maka diperoleh

$$\int \frac{(a-by)dy}{y} = \int \frac{(-c+dx)dx}{x}$$

$$a\ln|y| - by = -c\ln|x| + dx + K'$$

dengan K' =konstanta

Persamaan terakhir memberikan suatu penyelesaian implisit yaitu;

$$\frac{y^a x^c}{e^{by+dx}} = K \dots\dots (8)$$

Persamaan (8) disebut dengan trajektori dari model $x(t)$ dan $y(t)$ pada fase xy. Trajektori pada bidang fase tersebut menggambarkan hubungan pertumbuhan $x(t)$ dan $y(t)$ dari waktu ke waktu t.

$x(t)$: populasi mangsa pada saat t, dan

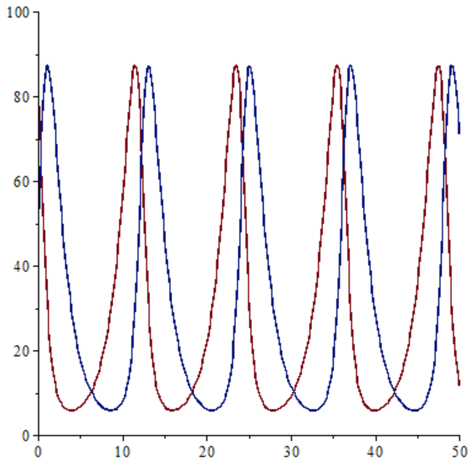
$y(t)$: populasi pemangsa pada saat t

Sebagai contoh diketahui dalam sebuah ekosistem pemangsa dan mangsa. Dengan pemangsa $x(t)$ misalkan serigala dan mangsa $y(t)$ adalah kelinci. Dalam kasus ini konstanta a,b,c, dan d dari persaman (6) ditentukan. Kondisi awal sebelum terjadi interaksi diberikan syarat awal yaitu jumlah kelinci 80 ekor dan serigala 50 ekor. Dari permsalahan ini didapatkan model persamaan differensial sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = 0.6x - 0.02xy$$

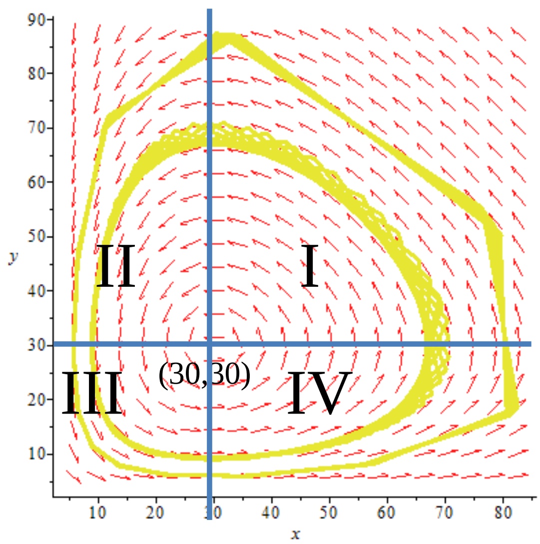
$$\frac{dy}{dt} = -0.6y + 0.02xy$$

Penyelesaian:
Dengan menggunakan bantuan software maple (William P. Fox, 2012) , diperoleh grafik seperti pada Gambar 2.



Gambar 2. Kurva pertumbuhan mangsa pemangsa dari waktu ke waktu

Gambar 2 menunjukkan pertumbuhan antara mangsa dan pemangsa mencapai pertumbuahn yang sama dari waktu ke waktu. Hal ini terjadi karena matrik jacobian memiliki nilia eigen real. Untuk titik kritis dengan dengan Jacobiannya memiliki nilai eigen imajiner pertumbuhan $x(t)$ dan $y(t)$ mengikuti pertumbuhan sinusoidal secara periodik. Pertumbuhan tersebut terlihat dalam Gambar bidang fase pada Gambar 3.

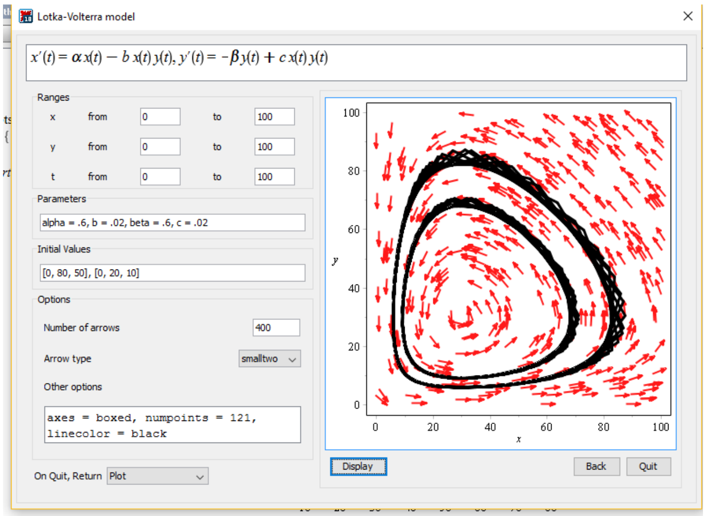


Gambar 3. Phase Portrait model mangsa-pemangsa

Berdasarkan Syamsuddin Toaha dan Malik Abu Hassan (2008) serta dari Gambar 3 phasepotrait menunjukkan adanya empat kuadran, yaitu (1) kuadran I menunjukkan bahwa populasi mangsa menurun sedangkan populasi pemangsa naik, (2) kuadran II menunjukkan bahwa populasi mangsa dan pemangsa turun, (3) kuadran III menunjukkan bahwa populasi mangsa naik sedangkan pemangsa turun, dan (4) uadran IV menunjukkan bahwa populasi mangsa dan pemangsa naik

Selain menggunakan syntax, fase portrait bisa dilihat dari melalui langkah-langkah pada apliaksi Maple (William P. Fox, 2012) sebagai berikut:

- Klik menu **Tools**
- Pilih **Tutors**
- Klik **Differential Equations**
- Klik DE Plots
- Setelah muncul tampilan DE Plots (Interactive), Klik pada bagian system kemudian pilih Lotka-Volterra Models
- Klik Menu DEPlots



SIMPULAN

Terdapat empat kemungkinan dalam model interaksi dua spesies mangsa-pemangsa, Pertama populasi mangsa menurun sedangkan populasi pemangsa naik, kedua populasi mangsa dan pemangsa turun. Selanjutnya yang ketiga populasi mangsa naik sedangkan pemangsa turun, dan kemungkinan keempat yaitu populasi mangsa dan pemangsa naik.

DAFTAR PUSTAKA

Anderson , W & Blake. 2012, *Mathematical Modeling form Undergraduate. major Qualifying Project*, Worcester polytecnic Institut.

Dwi Fahmi Ilmiawan. 2015. *Analisis Dinamik Model Predator-Prey Pada Populasi Eceng Gondok Dengan Adanya Ikan Grass Carp Dan Pemanenan*, Skripsi Universitas Negeri Semarang, tidak dipublikasikan

Ilfadillah, Juwita Sari, Nurafni, 2013, Pemodelan Matematika dua Spesies Model Mangsa-Memangsa, (Online) http://www.slideshare.net/Nurafnhy/pemodelan-2-species (diakses 19 Oktber 2016)

Lawrence Perko, 2001, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

Murray, JD., 2002. Mathematical Biologi: an introduction (3rd eds), Springer: New York

ShonKwuiler, R.W. & Herod J. 2009, *Matheamtical Biologi: an Introduction with Maple and Matlab* (2nd eds), Springer: New York

Syamsuddin Toaha , Malik Abu Hassan, 2008. Stability Analysis of Predator-Prey Population Model with Time Delay and Constant Rate of Harvesting, Journal of Mathematics (ISSN 1016-2526), Vol. 40 (2008) pp. 37-48

William P.Fox. 2012. *Mathematical Modeling with Maple,* International Edition, Brooke/Cole, Cengage Learning

Wiggins, Stephen. 2003, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag New York