Keterbatasan Perumuman Operator Integral Fraksional di Ruang Lebesgue pada Ruang Kuasi Metrik tak Homogen

Mohammad Imam Utoyo[1)], Toto Nusantara[2)], Inna Kuswandari[1)], Abdullah Jaelani[1)]

[1]Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga, Surabaya
[2]Fakultas MIPA,Universitas Negeri Malang, Malang

Abstrak

Pada makalah ini dikaji tentang syarat cukup dan syarat perlu untuk keterbatasan perumuman operator integral fraksional di ruang Lebesgue pada ruang kuasi metrk non homogen. Pembuktian syarat cukup yang diperoleh adalah dengan menggunakan ketaksamaan Holder, ketaksamaan Minskowski, dan keterbatasan operator maksimal di Ruang Lebesgue. Syarat perlu keterbatasan operator yang dihasilkan bukan merupakan syarat cukup.

Kata Kunci: Perumuman operator integral fraksional, keterbatasan operator, syarat perlu, dan syarat cukup

PENDAHULUAN

Operator integral fraksional merupakan perumuman dari solusi persamaan Poisson $\Delta u := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right) u = -f$ (Evans, 1998). Salah satu interpretasi fisik dari persamaan Poisson adalah jika f merupakan densitas massa atau distribusi muatan, maka solusi persamaan Poisson menyatakan potensial gravitasi atau potensial elektrostatik (Folland, 1999).

Operator integral fraksional berbentuk integral dengan domain himpunan tak terbatas R^n. Akibatnya, nilai operator ini biasanya dihitung dengan metode numerik dengan alat bantu berupa program komputer. Untuk keperluan ini diperlukan jaminan bahwa nilainya ada atau dengan kata lain operator integral fraksionalnya terbatas.

Kajian terhadap keterbatasan operator integral fraksional telah dilakukan sejak tahun 1932 sampai dengan saat ini.Keterbatasan operator tersebut telah dikaji pada ruang Lebesgue, ruang Morrey klasik dan ruang Morrey diperumum di ruang Euclid dan ruang kuasi metrik baik homogen maupun tak homogen.Fokus kajian ini adalah memperumuman ruang operatornya.Fokus kajian lainnya dilakukan oleh Eridani *et al*. (2004) telah berhasil mengembangkan penelitian mereka pada perumuman operator integral di ruang Euclid.

Pada sisi lain, Utoyo (2011), Utoyo (2012a), Utoyo *et al*. (2012d), dan Utoyo (2012e) telah melakukan kajian keterbatasan operator integral fraksional di ruang Morrey (termasuk yang terboboti) pada ruang kuasi metrik tak homogen. Penelitian ini merupakan pengembangan dari keempat hasil penelitian tersebut di atas, yaitu dikembangkan ke keterbatasan perumuman operator integral fraksional tetapi di ruang Lebesgue di ruang kuasi metrik tak homogen. Ruang Lebesgue merupakan bentuk khusus dari ruang Morrey.

Dalam penelitian ini akan dikaji syarat cukup dan syarat perlu keterbatasan perumuman operator integral fraksional di ruang Lebesgue pada ruang kuasi metrik tak homogen. Kajian ini bertujuan untuk menentukan syarat cukup dan syarat perlu keterbatasan perumuman operator integral di ruang Lebesgue pada ruang kuasi metrik tak homogen. Selanjutnya akan dikaji apakah syarat perlu yang ditemukan juga merupakan syarat cukup untuk keterbatasan perumuman operator integral di ruang Lebesgue pada ruang kuasi metrik tak homogen

PEMBAHASAN

Ruang Kuasi Metrik

Misalkan $X := (X, d, \mu)$ merupakan ruang topologi dengan μ merupakan ukuran lengkap sehingga ruang fungsi kontinu dengan *support* lokal adalah rapat dalam $L^1(X, \mu)$ dan $d: X \times X \to [0, \infty)$ merupakan fungsi kuasi metrik, yaitu fungsi yang memenuhi kondisi:

(i) untuk semua $x \in X$, $d(x, x) = 0$

(ii) untuk semua $x, y \in X$ dengan $x \neq y$, $d(x, y) > 0$

(iii) Terdapat konstanta $K_1 > 1$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$, $d(x, y) \leq K_1 d(y, x)$.

(iv) Terdapat konstanta $K_2 > 1$ sehingga untuk setiap $x, y, z \in X$,

$$d(x, z) \leq K_2(d(x, y) + d(y, z)).$$

Diasumsikan bahwa untuk semua $x \in X$ dan setiap konstanta $r > 0$ bola terbuka $B(x, r) := \{y \in X: d(x, y) < r\}$ merupakan himpunan terukur. Untuk setiap persekitaran V dari $x \in X$ terdapat konstanta $r > 0$ sehingga $B(x, r) \subseteq V$. Diasumsikan pula bahwa $\mu(X) = \infty$, untuk semua $x \in X$ dan untuk semua konstanta r_1 dan r_2 dengan $0 < r_1 < r_2 < \infty$ berlaku $\mu(\{x\}) = 0$ dan $B(x, r_2) \backslash B(x, r_1) \neq \emptyset$.

Tripel (X, d, μ) disebut ruang kuasi metrik. Jika μ pada ruang kuasi metrik memenuhi kondisi penggandaan, dinotasikan dengan $\mu \in (DC)$, (yaitu: $\mu \in (DC)$ jika untuk semua $x \in X$ dan semua konstanta $r > 0$ terdapat konstanta $C_1 > 1$ sehingga $\mu(B(x, 2r)) \leq C_1 \mu(B(x, r))$), maka (X, ρ, μ) disebut ruang tipe homogen. Jika kondisi penggandaan tidak terpenuhi, maka X disebut ruang tipe tak homogen. Ukuran μ dikatakan memenuhi kondisi pertumbuhan, dinotasikan dengan $\mu \in GC$, jika untuk semua $x \in X$ dan semua konstanta $r > 0$ terdapat konstanta $C > 0$ sehingga $\mu(B(x, r)) \leq Cr$.

Keterbatasan Operator Maksimal di Ruang Lebesgue

Operator maksimal di ruang kuasi metrik tak homogen didefinisikan sebagai

$$M^n f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu B(x, N_o r)} \int_{B(x,r)} |f(y)| d\mu(y)$$

dengan $N_o = K_2(1 + 2K_1)$, sedangkan Ruang Lebesgue M^p dengan $1 \leq p < \infty$ adalah himpunan fungsi terukur-$\mu f: X \to R$ sehingga

$$\|f: M^p\| = \left(\int_X |f(y)|^p d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Dengan menggunakan *covering lemma* dan Teorema interpolasi Marcinkiewicz dapat dibuktikan bahwa M^n terbatas di M^p dengan $1 < p < \infty$ (Proposition 6.1.1. dalam Edmunds *et al*., 2002). Keterbatasan ini akan digunakan untuk membuktikan keterbatasan perumuman operator integral fraksional K_ρ^n di ruang kuasi metrik yang didefinisikan sebagai

$$K_\rho^n f(x) = \int_X f(y) \rho(d(x, y)) d(x, y)^{-1} d\mu(y),$$

dengan $\rho: (0, \infty) \to (0, \infty)$ merupakan suatu fungsi. Jika $\rho(t) = t^\alpha, 0 < \alpha < 1$, maka $K_\rho^n = K_\alpha^n$. Oleh karena itu, K_ρ^n merupakan perumuman dari K_α^n.

Eridani *et al*. (2004) menemukan bahwa fungsi $\rho: (0, \infty) \to (0, \infty)$ dengan $\rho(t) = t^\alpha, 0 < \alpha < 1$ memenuhi kondisi penggandaan. Fungsi $\rho: (0, \infty) \to (0, \infty)$ disebut memenuhi kondisi penggandaan jika memenuhi kondisi: terdapat konstanta $C > 0$, sehingga

$$\text{Jika } \frac{1}{2} \leq \frac{r}{s} \leq 2, \text{ maka } \frac{1}{C} \leq \frac{\rho(r)}{\rho(s)} \leq C. \qquad (1)$$

Jika ρ memenuhi kondisi penggandaan, maka untuk setiap bilangan bulat k dan $r > 0$ berlaku bahwa jika $2^k r \leq d(x,y) < 2^{k+1}r$, maka $\frac{1}{2} \leq \frac{d(x,y)}{2^{k+1}r} \leq 2$, sehingga $\frac{1}{C} \leq \frac{\rho(d(x,y))}{\rho(2^{k+1}r)} \leq C$. Oleh karena itu,

$$\frac{1}{C}\rho(2^{k+1}r) \leq \rho(d(x,y)) \leq C\rho(2^{k+1}r). \qquad (2)$$

Berdasarkan (2) diperoleh bahawa, jika $2^k r \leq t \leq 2^{k+1}r$, maka $\frac{1}{C} \leq \frac{\rho(t)}{\rho(2^{k+1}r)} \leq C$, sehingga $\frac{\rho(2^{k+1}r)}{C} \leq \rho(t) \leq C\rho(2^{k+1}r)$. Oleh karena itu,

$$\frac{\rho(2^{k+1}r)}{C2^{k+1}r} \leq \frac{\rho(t)}{t} \leq \frac{C\rho(2^{k+1}r)}{2^k r} \qquad (3)$$

Berdasarkan (2) dan (3) diperoleh

$$\rho(2^{k+1}r) \leq C\int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{\rho(t)}{t} \qquad (4)$$

Di sisi lain, berdasarkan fakta bahwa $0 < \frac{1}{p} < 1$ diperoleh bahwa jika $2^k r \leq t \leq 2^{k+1}r$, maka

$$(2^{k+1}r)^{-\frac{1}{p}} \leq t^{-\frac{1}{p}} \leq (2^k r)^{-\frac{1}{p}}.$$

Berdasarkan uraian di atas diperoleh bahwa

$$\frac{\rho(2^{k+1}r)(2^{k+1}r)^{-\frac{1}{p}}}{C2^{k+1}r} \leq \rho(t)t^{-1-\frac{1}{p}} \leq \frac{\rho(2^k r)(2^k r)^{-\frac{1}{p}}}{2^k r}.$$

Oleh karena itu,

$$\int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{\rho(2^{k+1}r)(2^{k+1}r)^{-\frac{1}{p}}}{C2^{k+1}r}\,dt = \frac{1}{C}\rho(2^{k+1}r)(2^{k+1}r)^{-\frac{1}{p}} \leq \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \rho(t)t^{-1-\frac{1}{p}}\,dt,$$

sehingga

$$\rho(2^{k+1}r)(2^{k+1}r)^{-\frac{1}{p}} \leq C\int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \rho(t)t^{-1-\frac{1}{p}}\,dt \qquad (5)$$

Eridani et al. (2009) telah menemukan bahwa Jika $B_0 := B(a_0, r_0)$, maka $\chi_{B_0} \in M^p$ dengan χ_{B_0} merupakan fungsi karakteristik dari B_0. Selanjutnya ada $C > 0$, sehingga $\|\chi_{B_0} : M^p\| \leq Cr_o^{\frac{1}{p}}$. Fakta ini menunjukkan bahwa M^p bukan merupakan himpunan kosong.

Jika diambil sebarang $B := B(a,r)$, misalkan $\frac{1}{2K_2}B := B(a, \frac{r}{2K_2})$, dan diambil sebarang $x, z \in \frac{1}{2K_2}B$. Berdasarkan sifat quasi metrik diperoleh bahwa untuk setiap $z \in B(x, \frac{r}{2K_2})$, $d(a,z) \leq K_2\{d(a,x) + d(x,z)\} < K_2\left\{\frac{r}{2K_2} + \frac{r}{2K_2}\right\} = r$, sehingga $z \in B$ dan oleh karena itu $B(x, \frac{r}{2K_2}) \subseteq B$.

Selanjutnya untuk setiap $x \in B(a,r)$ diperoleh

$$K_\rho^n \chi_B(x) = \int_X \chi_{\boldsymbol{B}}(y)\rho\big(d(x,y)\big)d(x,y)^{-1}d\mu(y) = \int_B \rho(d(x,y))d(x,y)^{-1}d\mu(y)$$
$$\geq \int_{B(x,\frac{r}{2K_2})} \rho(d(x,z))d(x,z)^{-1}d\mu(z).$$

Oleh karena itu, untuk setiap $B := B(a,r)$,

$$\int_{B\left(x,\frac{r}{2K_2}\right)} \rho\big(d(x,z)\big)d(x,z)^{-1}d\mu(z) \leq K_\rho^n \chi_B(x) \qquad (6)$$

Keterbatasan Perumuman Operator Integral Fraksional di Ruang Lebesgue

Teorema 1. Misalkan $\mu \in GC(1)$, ρmemenuhi kondisi penggandaan, dan untuk setiap $r > 0$ berlaku $\int_r^\infty \rho(t)t^{-\frac{p+1}{p}}dt \leq Cr^{-\frac{1}{p}}$.

(i) Jika $\int_0^r \frac{\rho(t)}{t}dt \leq C$, maka K_ρ^n terbatas pada M^p

(ii) Jika K_ρ^n terbataspada L^p , maka $\int_0^r \frac{\rho(t)}{t}dt \leq Cr^{\frac{1}{p}}\mu\big(B(a,r)\big)^{-\frac{1}{p}}$.

Bukti:

(i) Diambil sebarang $r > 0$, maka

$$\left|K_\rho^n f(x)\right| \leq \left|\int_{d(x,y)<r} f(y)\rho\big(d(x,y)\big)d(x,y)^{-1}d\mu(y)\right| + \left|\int_{d(x,y)\geq r} f(y)\rho(d(x,y))d(x,y)^{-1}d\mu(y)\right|$$

Berdasarkan (2), (5), $\mu \in GC$, dan hipotesis teorema diperoleh bahwa

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{d(x,y)<r} f(y)\rho\big(d(x,y)\big)d(x,y)^{-1}d\mu(y)\right| \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{-1}\int_{2^k r\leq d(x,y)<2^{k+1}r}|f(y)|\rho\big(d(x,y)\big)d(x,y)^{-1}d\mu(y) \\
&\leq C\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{\rho(2^{k+1}r)}{2^k r}\int_{2^k r\leq d(x,y)<2^{k+1}r}|f(y)|d\mu(y) \\
&\leq C\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{\rho(2^{k+1}r)}{2^k r}\int_{B(x,2^{k+1}r)}|f(y)|d\mu(y) \\
&\leq C\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{\rho(2^{k+1}r)\mu B(x,N_o 2^{k+1}r)}{2^k r}.\frac{1}{\mu B(x,N_o 2^{k+1}r)}\int_{B(x,2^{k+1}r)}|f(y)|d\mu(y) \\
&\leq C\textstyle\sum_{k=-\infty}^{-1}\rho(2^{k+1}r)M^n f(x)\ [\\
&\leq CM^n f(x)\sum_{k=-\infty}^{-1}\int_{2^k r}^{2^{k+1}r}\frac{\rho(t)}{t}dt \\
&\leq CM^n f(x)\int_0^r \frac{\rho(t)}{t}dt \leq CM^n f(x).
\end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\left|\int_{d(x,y)<r} f(y)\rho\big(d(x,y)\big)d(x,y)^{-1}d\mu(y)\right| \leq CM^n f(x).$$

Selanjutnya, berdasarkan Ketaksamaan Holder,(5), dan hipotesis teorema diperoleh

$$\left|\int_{d(x,y)\geq r} f(y)\rho\big(d(x,y)\big)d(x,y)^{-1}d\mu(y)\right|$$
$$\leq \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^k r\leq d(x,y)<2^{k+1}r} |f(y)|\rho\big(d(x,y)\big)d(x,y)^{-1}d\mu(y)$$
$$\leq C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho(2^{k+!}r)}{2^k r}\int_{2^k r\leq d(x,y)<2^{k+1}r} |f(y)|d\mu(y)$$
$$\leq C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho(2^{k+1}r)}{2^k r}\int_{B(x,2^{k+1}r)} |f(y)|d\mu(y)$$
$$\leq C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho(2^{k+1}r)}{2^k r}\Big[\int_{B(x,2^{k+1}r)} d\mu\Big]^{1-\frac{1}{p}}\times\Big[\int_{B(x,2^{k+1}r)} |f(y)|^p d\mu\Big]^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho(2^{k+1}r)}{2^k r}[\mu\{B(x,2^{k+1}r)\}]^{1-\frac{1}{p}}\Big[\int_{B(x,2^{k+1}r)} |f(y)|^p d\mu\Big]^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq C\sum_{k=0}^{\infty}\rho(2^{k+1}r)(2^{k+1}r)^{-\frac{1}{p}}\Big[\int_{B(x,2^{k+1}r)} |f(y)|^p d\mu\Big]^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq C\|f:M^p\|\sum_{k=0}^{\infty}\rho(2^{k+1}r)(2^{k+1}r)^{-\frac{1}{p}}$$
$$\leq C\|f:M^p\|\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^k r}^{2^{k+1}r}\rho(t)t^{-1-\frac{1}{p}}dt$$
$$= C\|f:M^p\|\int_{r}^{\infty}\rho(t)t^{-1-\frac{1}{p}}dt\leq Cr^{-\frac{1}{p}}\|f:M^p\|.$$

Oleh karena itu,

$$\left|\int_{d(x,y)\geq r} f(y)\rho\big(d(x,y)\big)d(x,y)^{-1}d\mu(y)\right|\leq Cr^{-\frac{1}{p}}\|f:M^p\|.$$

Berdasarkan uraian di atas diperoleh bahwa

$$|K_\rho^n f(x)|\leq C[M^n f(x)+r^{-\frac{1}{p}}\|f:M^p\|].$$

Misalkan $B\coloneqq B(a,r)$, maka dengan menggunakan ketaksamaan Minskowski, $\mu\in GC$, dan keterbatasan operator M^n di ruang M^p

$$\left\{\int_B |K_\rho^n f(x)|^p d\mu(x)\right\}^{\frac{1}{p}}\leq C\left\{\int_B \left([M^n f(x)+r^{-\frac{1}{p}}\|f:M^p\|]\right)^p d\mu(x)\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq C\left[\left\{\int_B [M^n f(x)]^p d\mu(x)\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\int_B r^{-1}\|f:M^p\|^p d\mu(x)\right\}^{\frac{1}{p}}\right]$$
$$\leq C\left\{\int_X [M^n f(x)]^p d\mu(x)\right\}^{\frac{1}{p}}+C\|f:M^p\|\left\{\frac{1}{r}\int_B d\mu(x)\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C\{\|f:M^p\| + C(\frac{\mu(B)}{r})^{\frac{1}{p}}\|f:M^p\|\} \leq C\|f:M^p\|.$$

Oleh karena itu,

$$\left\{\int_X \left|K_\rho^n f(x)\right|^p d\mu(x)\right\}^{\frac{1}{p}} \leq C\|f:M^p\|,$$

sehingga $\|K_\rho^n : M^p\| \leq C\|f:M^p\|$.

(ii) Misalkan K_ρ^n terbatas dari M^p ke M^p. Untuk setiap $B := B(a,r)$, berdasarkan (6) diperoleh

$$Cr^{\frac{1}{p}} \geq \|\chi_{B(a,r)}:M^p\| \geq \|K_\rho^n \chi_{B(a,r)}:M^p\| \geq \left(\int_{B(a,r)} \left|K_\rho^n \chi_{B(a,r)}(y)\right|^p d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\geq \left(\int_{B(a,r)} \left|\int_{B\left(x,\frac{r}{2K_2}\right)} \rho\big(d(x,z)\big)d(x,z)^{-1}d\mu(z)\right|^p d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\geq \mu(B\left(x,\frac{r}{2K_2}\right))^{\frac{1}{p}} \int_{B\left(x,\frac{r}{2K_2}\right)} \rho\big(d(x,z)\big)d(x,z)^{-1}d\mu(z),$$

sehingga

$$\int_{B\left(x,\frac{r}{2K_2}\right)} \rho\big(d(x,z)\big)d(x,z)^{-1}d\mu(z) \leq C(\frac{r}{2K_2})^{\frac{1}{p}}\mu\left(B\left(x,\frac{r}{2K_2}\right)\right)^{-\frac{1}{p}}.$$

Oleh karena itu, untuk setiap $r > 0$, berlaku

$$\int_{B(x,r)} \rho\big(d(x,z)\big)d(x,z)^{-1}d\mu(z) \leq Cr^{\frac{1}{p}}\mu\big(B(a,r)\big)^{-\frac{1}{q}}.\blacksquare$$

Teorema 2. Jika $1 < p < q < \infty$, ρ memenuhi kondisi penggandaan, dan untuk setiap $r > 0$ berlaku $\int_r^\infty \rho(t)t^{-\frac{p+1}{p}}dt \leq Cr^{-\frac{1}{q}}$,

(i) Jika untuk setiap $r > 0$ berlaku $\int_0^r \frac{\rho(t)}{t}dt \leq Cr^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$, maka K_ρ^n terbatas dari M^p ke M^q.

(ii) Jika K_ρ^n terbatas dari M^p ke M^q, maka untuk setiap $r > 0$ berlaku

$$\int_{B\left(x,\frac{r}{2K_2}\right)} \rho\big(d(x,z)\big)d(x,z)^{-1}d\mu(z) \leq C\, r^{\frac{1}{p}}\mu\big(B(a,r)\big)^{-\frac{1}{q}}.$$

Bukti:

(i)Diambil sebarang $r > 0$, maka

$$\left|K_\rho^n f(x)\right| \leq \left|\int_{d(x,y)<r} f(y)\rho\big(d(x,y)\big)d(x,y)^{-1}d\mu(y)\right| + \left|\int_{d(x,y)\geq r} f(y)\rho(d(x,y))d(x,y)^{-1}d\mu(y)\right|.$$

Berdasarkan fakta bahwa ρmemenuhi kondisi penggandaan, berdasarkan (2), (3), $\mu \in GC$, dan hipotesis teorema diperoleh bahwa

$$\left|\int_{d(x,y)<r} f(y)\rho\big(d(x,y)\big)d(x,y)^{-1}d\mu(y)\right|$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{-1} \int_{2^k r\leq d(x,y)<2^{k+1}r} |f(y)|\rho\big(d(x,y)\big)d(x,y)^{-1}d\mu(y)$$

$$\leq C\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{\rho(2^{k+1}r)}{2^k r}\int_{2^k r\leq d(x,y)<2^{k+1}r} |f(y)|d\mu(y)$$

$$\leq C\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{\rho(2^{k+1}r)}{2^k r}\int_{B(x,2^{k+1}r)}|f(y)|d\mu(y)$$

$$\leq C\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{\rho(2^{k+1}r)\mu B(x,N_o 2^{k+1}r)}{2^k r}\cdot\frac{1}{\mu B(x,N_o 2^{k+1}r)}\int_{B(x,2^{k+1}r)}|f(y)|d\mu(y)$$

$$\leq C\sum_{k=-\infty}^{-1}\rho(2^{k+1}r)M^n f(x)$$

$$\leq \ Cr^{s-1}M^n f(x)\sum_{k=-\infty}^{-1}\int_{2^{k+1}r}^{2^{k+2}r}\frac{\rho(t)}{t}dt$$

$$\leq CM^n f(x) r^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Oleh karena itu,

$$\left|\int_{d(x,y)<r} f(y)\rho\big(d(x,y)\big)d(x,y)^{-1}d\mu(y)\right| \leq CM^n f(x) r^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Selanjutnya, berdasarkan Ketaksamaan Holder diperoleh

$$\left|\int_{d(x,y)\geq r} f(y)\rho\big(d(x,y)\big)d(x,y)^{-1}d\mu(y)\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^k r\leq d(x,y)<2^{k+1}r}|f(y)|\rho\big(d(x,y)\big)d(x,y)^{-1}d\mu(y)$$

$$\leq C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho(2^{k+!}r)}{2^k r}\int_{2^k r\leq d(x,y)<2^{k+1}r}|f(y)|d\mu(y)$$

$$\leq C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho(2^{k+1}r)}{2^k r}\int_{B(x,2^{k+1}r)}|f(y)|d\mu(y)$$

$$\leq C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho(2^{k+1}r)}{2^k r}\Big[\int_{B(x,2^{k+1}r)} d\mu\Big]^{1-\frac{1}{p}}\times\Big[\int_{B(x,2^{k+1}r)}|f(y)|^p d\mu\Big]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho(2^{k+!}r)}{2^k r}[\mu\{B(x,2^{k+1}r)\}]^{1-\frac{1}{p}}\Big[\int_{B(x,2^{k+1}r)}|f(y)|^p d\mu\Big]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho(2^{k+1}r)}{2^k r}[2^{k+1}r]^{1-\frac{1}{p}}\Big[\int_{B(x,2^{k+1}r)}|f(y)|^p d\mu\Big]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C\|f:M^p\|\sum_{k=0}^{\infty}\rho(2^{k+1}r)(2^{k+1}r)^{-\frac{1}{p}}$$

$$\leq C\|f:M^p\|\sum_{k=0}^{\infty}C\int_{2^k r}^{2^{k+1}r}\rho(t)t^{-1-\frac{1}{p}}dt$$

$$= C\|f:M^p\|\int_r^{\infty}\rho(t)t^{-1-\frac{1}{p}}dt \leq C\|f:M^p\|r^{-\frac{1}{q}}.$$

Oleh karena itu,

$$\left|\int_{d(x,y)\geq r} f(y)\rho\big(d(x,y)\big)d(x,y)^{-1}d\mu(y)\right| \leq C\|f: M^p\| r^{-\frac{1}{q}}..$$

Berdasarkan uraian di atas diperoleh bahwa

$$\left|K_\rho^n f(x)\right| \leq C r^{-\frac{1}{q}}[r^{\frac{1}{p}} M^n f(x) + \|f: M^p\|].$$

Selanjutnya dipilih bilangan real $r > 0$, sehingga $r^{-\frac{1}{p}} = \frac{M^n f(x)}{\|f: M^p\|}$.

Berdasarkan uraian di atas diperoleh bahwa

$$\left|K_\rho^n f(x)\right| \leq C\left(\frac{M^n f(x)}{\|f: M^p\|}\right)^{\frac{p}{q}} [\|f: M^p\| + \|f: M^p\|] = C(M^n f(x))^{\frac{p}{q}} \|f: M^p\|^{1-\frac{p}{q}},$$

sehingga $\left|K_\rho^n f(x)\right|^q \leq C M^n f(x)^p \left\|f: M_\phi^p\right\|^{q-p}$

Berdasarkan ketaksamaan Minskowski dan keterbatasan operator M^ndi ruang M^p

$$\begin{aligned}
\left(\int_X \left|K_\rho^n f(x)\right|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} &\leq C\left(\int_X M^n f(x)^p \left\|f: M_\phi^p\right\|^{q-p} d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C\|f: M^p\|^{1-\frac{p}{q}}\left(\int_X M^n f(x)^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\|f: M^p\|^{1-\frac{p}{q}}\|f: M^p\|^{\frac{p}{q}} \\
&\leq C\|f: M^p\|
\end{aligned}$$

Oleh karena itu, $\|K_\rho^n: M^q\| \leq C\|f: M^p\|$.

(ii) Misalkan K_ρ^n terbatas dari M^p ke M^q. Untuk setiap $B \coloneqq B(a,r)$, berdasarkan (6) diperoleh

$$\begin{aligned}
C r^{\frac{1}{p}} &\geq \|\chi_{B(a,r)}: M^p\| \geq \|K_\rho^n \chi_{B(a,r)}: M^q\| \geq \left(\int_{B(a,r)} \left|K_\rho^n \chi_{B(a,r)}(y)\right|^q d\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\geq \left(\int_{B(a,r)} \left|\int_{B\left(x,\frac{r}{2K_2}\right)} \rho\big(d(x,z)\big)d(x,z)^{-1}d\mu(z)\right|^q d\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\geq \mu\left(\frac{1}{2K_2}B\right)^{\frac{1}{q}} \int_{B\left(x,\frac{r}{2K_2}\right)} \rho\big(d(x,z)\big)d(x,z)^{-1}d\mu(z),
\end{aligned}$$

sehingga

$$\int_{B\left(x,\frac{r}{2K_2}\right)} \rho\big(d(x,z)\big)d(x,z)^{-1}d\mu(z) \leq C\left(\frac{r}{2K_2}\right)^{\frac{1}{p}} \mu\left(B\left(a,\frac{r}{2K_2}\right)\right)^{-\frac{1}{q}}.$$

Oleh karena itu, untuk setiap $r > 0$, berlaku

$$\int_{B(x,r)} \rho\big(d(x,z)\big)d(x,z)^{-1}d\mu(z) \leq C r^{\frac{1}{p}} \mu\big(B(a,r)\big)^{-\frac{1}{q}}.\blacksquare$$

.

SIMPULAN

Dari pembahasan di atas diperoleh bahwa syarat cukup dan perlu untuk keterbatasan perumuman operator integral fraksional diberikan dalam Teorema 1 dan Teorema 2. Dari kedua terorema tersebut terlihat bawa syarat perlu yang dihasilkan bukan merupakan syarat cukup.

DAFTAR PUSTAKA

Edmunds D., Kokilashvili V., & Meskhi A. 2002, *Bounded and CompactIntegral Operator, Mathematics and Its Applications*, 543, Kluwer Academics Publisher, Dordrecht, The Netherlands, 367, 377.

Eridani, Gunawan H., & Nakai E. 2004. On Generalized Fractional Integral Operator, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, **60**(3): 539–550 :e10, 307–318

Eridani, Kokilashvill V., & Meskh, A. 2009. Morrey Space and Fractional Integral Operators, *Expo.Math.* **27**(3): 227–239.

Evans L. 1998. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Math., 19, AMS, Providence, Rhode Island, 20-23.

Folland G.B. 1999. *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, second Edition, John Wiley and Sons Inc., New York, 208.

Utoyo M.I. 2011. Fractional integral operator and Olsen inequalities in Morrey space on non-homogeneous spaces. *Internat. J. Functional Analysis, Operator Theory and Applications* **4**(1).

Utoyo M.I. 2012a. Fractional integral operator and Olsen inequalities in weighted Morrey space on non-homogeneous spaces, *Far East Journal of Mathematical Sciences* (*FJMS*) **66**(1): 45-62.

Utoyo M.I, Nusantara T., Widodo B., & Suhariningsih. 2012d. Fractional integral operator on non-homogeneous space and Olsen inequality in the classic Morrey space on non-homogeneous space. *Int. Journal of Math. Analysis* **6**(31): 1501 - 1511.

Utoyo M.I. 2012e. Fractional integral operator and Olsen inequalities in weighted Morrey space on non-homogeneous spaces. *Far East Journal of Mathematical Sciences* (FJMS) **66**(1): 45-62.