PRISMA 3 (2020): 34-40
PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/
ISSN 2613-9189

Operator Adjoint pada Ruang Fungsi Terintegral Dunford

Solikhin[a,*], Susilo Hariyanto[b], YD Sumanto[c], Abdul Aziz[d]

[a,b,c,d] Departemen Matematika FSM Universitas Diponegoro, Jl. Prof. H. Soedarto, SH. Tembalang, Semarang 50275, Indonesia

*Alamat Surel: solikhin@live.undip.ac.id

Abstrak

Artikel ini mengkaji integral Dunford fungsi bernilai Banach X. Jika fungsi $f:[a,b]\to X$ merupakan fungsi terukur lemah sedemikian sehingga fungsi x^*f terintegral Lebesgue, maka fungsi tersebut dikatakan terintegral Dunford. Nilai integral Dunford atas sebarang $A\subset[a,b]$ himpunan terukur adalah $(D)\int_A f = x_A^{**}\in X^{**}$. Diperlihatkan bahwa koleksi semua fungsi terintegral Dunford, $D[a,b]$ merupakan ruang linear. Jika untuk setiap $f\in D[a,b]$ didefinisikan operator $T^*:L_1^*\to X^{**}$ oleh $T^*(g)(x^*)=\int_a^b gT(x^*)$ $=\int_a^b gx^*(f)$, untuk setiap $g\in L_1^*=L_\infty$, maka T^* merupakan operator Adjoint dari operator T. Ditunjukan bahwa operator Adjoint T^* merupakan operator linear dan terbatas. Selanjutnya dikaji beberapa sifat yang lain dari operator Adjointnya.

Kata kunci:

Integral Dunford, Operator Adjoint

© 2020 Dipublikasikan oleh Jurusan Matematika, Universitas Negeri Semarang

1. Pendahuluan

Pada banyak penerapan, misalnya dalam persamaan differensial, optimasi dan lain sebagainya tidak menutup kemungkinan permasalahan integral dihadapkan pada fungsi bernilai Banach X. Kajian teori integral untuk fungsi bernilai Banach telah berkembang dan menjadi kajian yang perlu dikembangkan oleh peneliti. Para peneliti telah mengkaji teori integral dari suatu fungsi bernilai Banach atau bernilai vektor yang merupakan pengembangan dari fungsi bernilai real R. Misalnya seperti integral Bochner (Cao, 1992), integral Henstock-Bochner fungsi bernilai Banach, integral Henstock-Kurzweil dan integral McShane pada ruang fungsi bernilai Banach (Guoju, 2007), integral Henstock-Pettis pada ruang fungsi bernilai Banach (Park et al, 2006), dan integral Dunford (Schwabik & Guoju, 2005).

Integral Bochner diperkenalkan oleh Salomon Bochner. Ia memperluas definisi integral Lebesgue (Gordon, 1994) ke dalam fungsi bernilai Banach. Fungsi $f:I\to X$ terintegral Bochner, jika ada barisan fungsi sederhana $f_n:I\to X, n\in N$ sehingga $\lim_{n\to\infty}\int_I \|f_n-f\|_X=0$ (Schwabik & Guoju, 2005). Lain halnya integral Dunford, ia mendefinisikan integralnya dari suatu fungsi terukur lemah. Jika fungsi $f:[a,b]\to X$ merupakan fungsi terukur lemah sedemikian sehingga fungsi x^*f terintegral Lebesgue untuk setiap $x^*\in X^*$, maka fungsi tersebut dikatakan terintegral Dunford pada $[a,b]$. Nilai integral Dunford atas sebarang $A\subset[a,b]$ himpunan terukur adalah $(D)\int_A f = x_A^{**}\in X^{**}$ (Schwabik & Guoju, 2005).

Kajian untuk integral Dunford telah digeneralisasikan pada integral tipe Riemann, seperti integral Henstock-Dunford dan Henstock-Pettis (Guoju & Tianqing, 2001). Integral Henstock-Dunford

To cite this article:
Solikhin, Haryanto, S., Sumanto, Y.D., & Aziz, A. (201920). Operator Adjoint pada Ruang Fungsi Terintegral Dunford. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 3*, 34-916

menyaratkan bahwa fungsi bernilai riil $x^* f$ terintegral Henstock (Lee, 1989). Tidak hanya sebatas ini, integral Henstock-Dunford juga digeneralisasi dalam ruang Euclide, yaitu integral Henstock-Dunford pada ruang Euclide (Saifullah, 2003).

Kajian teori integral juga dikombinasikan dengan teori operator. Telah dibahas beberapa sifat dari operator Dunford-Pettis positif (Aqzzouz at all, 2009) . Selanjutnya, dikaji operator pada ruang fungsi yang terintegral Bochner. Selanjutnya, dikaji operator pada ruang fungsi terintegral Dunford (Solikhin, 2018).

Memperhatikan hasil kajian operator pada ruang fungsi terintegral Dunford, maka perlu dikaji lebih khusus tentang operator adjoint (Darmawijaya, 2007) pada ruang fungsi terintegral Dunford. Bagaimana operator adjointnya dan sifat-sifat dari operator adjointnya.

2. Pembahasan

Integral Dunford didefinisikan berdasarkan fungsi terukur lemah yang eksistensinya dijamin oleh Lemma Dunford. Selanjutnya diperlihatkan bahwa ruang fungsi yang terintegral Dunford merupakan ruang linear. Berdasarkan ruang linear ini dikontruksi operator, khususnya operator adjoint dan dibahas sifat-sifatnya.

2.1. Fungsi Terukur Lemah

Berikut ini dibahas fungsi terukur dan fungsi terukur lemah bernilai Banach.

Definisi 1 (Schwabik & Guoju, 2005) *Fungsi* $f:[a,b]\to X$ *merupakan fungsi sederhana, jika ada himpunan terukur* $A_i \subset [a,b]$, $i=1,2,...,n$ *sehingga* $A_i \cap A_j = \varnothing$, *untuk setiap* $i \neq j$ *dan* $[a,b]=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, *dengan* $f(x)=y_i \in X$ *untuk* $x \in A_i$, $i=1,2,...,n$.

Berdasarkan fungsi sederhana, dapat didefinisikan fungsi terukur sebagai berikut.

Definisi 2 (Schwabik & Guoju, 2005) *Fungsi* $f:[a,b]\to X$ *disebut fungsi terukur, jika ada barisan fungsi sederhana* $f_n:[a,b]\to X$, $n \in N$ *berlaku*

$$\lim_{n\to\infty}\left\| f_n(x)-f(x)\right\|_X = 0 ,$$

untuk setiap x *di* $[a,b]$.

Menurut Definisi 2, jadi fungsi sederhana adalah fungsi terukur. Selanjutnya, jika f terukur maka fungsi bernilai riil $\|f\|_X :[a,b]\to R$ juga merupakan fungsi terukur.

Teorema 3 (Schwabik & Guoju, 2005) *Jika* f *fungsi terukur, maka fungsi riil* $\|f\|_X$ *fungsi terukur.*

Bukti: Karena f fungsi terukur, maka ada barisan fungsi sederhana (f_n), $n \in N$ sehingga

$$\lim_{n\to\infty}\left\| f_n(x)-f(x)\right\|_X = 0$$

untuk setiap $x \in [a,b]$. Oleh karena f_n fungsi sederhana untuk setiap $n \in N$, maka $\|f_n\|_X$ juga merupakan fungsi sederhana untuk setiap $n \in N$. Akibatnya, f_n fungsi terukur dan berlaku

$$\left|\left\| f_n(x)\right\|_X - \left\| f(x)\right\|_X\right| \le \left\| f_n(x)-f(x)\right\|_X ,$$

untuk setiap x di $[a,b]$. Hal ini berarti bahwa $\lim_{n\to\infty}\left\| f_n(x)-f(x)\right\|_X = 0$, yaitu $\|f\|_X$ terukur. □

Definisi 4 (Schwabik & Guoju, 2005) *Fungsi* f *dikatakan fungsi terukur lemah, jika untuk setiap* $x^* \in X^*$ *berakibat bahwa fungsi riil* $x^* f$ *merupakan fungsi terukur.*

Setiap fungsi terukur merupakan fungsi terukur lemah.

Teorema 5 (Schwabik & Guoju, 2005) *Jika* f *fungsi terukur, maka* f *terukur lemah.*

Bukti: Fungsi f terukur, berarti ada barisan fungsi sederhana (f_n), $n \in N$ sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f_n(x) - f(x) \right\|_X = 0,$$

untuk sebarang $x \in [a,b]$.

Diambil sebarang $x^* \in X^*$, maka berlaku

$$\left| x^* f_n(x) - x^* f(x) \right| \le \left\| x^* \right\|_X \left\| f_n(x) - f(x) \right\|_X .$$

Karena $\lim_{n\to\infty} \left\| f_n(x) - f(x) \right\|_X = 0,$ berakibat $\lim_{n\to\infty} \left| x^*\left(f_n(x) - f(x) \right) \right| = 0$. Jadi, f terukur lemah. □

Berdasarkan fungsi terukur lemah dikontruksi lemma yang akan menjamin eksistensi dari integral Dunford.

Lemma 6 Dunford (Schwabik & Guoju, 2005) *Misalkan* X *ruang Banach dan* X^* *dual dari ruang Banach* X. *Jika fungsi* $f:[a,b] \to X$ *terukur lemah dan setiap* $x^* \in X^*$ *fungsi riil* $x^* f$ *terintegral Lebesgue, yaitu* $x^* f \in L_1$, *maka untuk setiap* $A \subset [a,b]$ *himpunan terukur ada dengan tunggal vektor* $x_A^{**} \in X^{**}$ *sehingga berlaku*

$$x_A^{**}\left(x^* \right) = \int_A x^* f,$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Bukti: (Solikhin, 2018) □

2.2. Integral Dunford

Diberikan definisi dari integral Dunford dan ditunjukkan bahwa koleksi semua fungsi yang terintegral Dunford merupakan ruang linear.

Definisi 7 (Schwabik & Guoju, 2005) *Diketahui* X *ruang Banach dan* X^* *dual dari* X. *Fungsi terukur lemah* $f:[a,b] \to X$ *dikatakan terintegral Dunford pada* $[a,b]$, *jika untuk setiap* $x^* \in X^*$ *fungsi riil* $x^* f$ *adalah terintegral Lebesgue dan untuk setiap* $A \subset [a,b]$ *himpunan terukur ada dengan tunggal vektor* $x_A^{**} \in X^{**}$ *benar bahwa*

$$x_A^{**}\left(x^* \right) = (L)\int_A x^* f,$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Simbol $D[a,b]$ menotasikan koleksi dari semua fungsi f yang terintegral Dunford pada $[a,b]$. Jadi, $f \in D[a,b]$ berarti bahwa fungsi f terintegral Dunford pada $[a,b]$.

Teorema 8 (Solikhin, 2018) *Jika* $f \in D[a,b]$, *maka untuk sebarang* $A \subset [a,b]$ *himpunan terukur* $x_A^{**} \in X^{**}$ *tunggal.*

Bukti: □

Contoh fungsi yang terintegral Dunford adalah fungsi konstan, fungsi kontinu, fungsi yang terintegral Riemann, fungsi yang terintegral Lebesgue (Solikhin, 2018) dan lain sebagainya.

Teorema 9 *Fungsi* f *adalah terintegral Dunford pada* $[a,b]$ *jika dan hanya jika untuk sebarang* $x^* \in X^*$ *berakibat bahwa fungsi bernilai riil* $x^* f$ *adalah terintegral Lebesgue pada* $[a,b]$.

Bukti: Menurut Definisi **7** jika fungsi $f \in D[a,b]$, maka untuk setiap $x^* \in X^*$ berakibat bahwa fungsi bernilai riil $x^* f$ adalah terintegral Lebesgue pada $[a,b]$. Sebaliknya jika fungsi riil $x^* f$ merupakan fungsi terintegral Lebesgue pada $[a,b]$, maka fungsi f terintegral Dunford pada $[a,b]$. □

Selanjutnya diperlihatkan bahwa koleksi dari semua fungsi yang terintegral Dunford, merupakan ruang linear.

Teorema 10 $D[a,b]$ *adalah ruang linear.*

Bukti: Diambil $f, g \in D[a,b]$ sebarang dan sebarang skalar $c \in R$. Ditunjukkan bahwa $f + g \in D[a,b]$ dan $cf \in D[a,b]$. Karena $f, g \in D[a,b]$, maka untuk setiap $x^* \in X^*$ berturut-turut berakibat bahwa fungsi riil $x^* f$ dan $x^* g$ terintegral Lebesgue pada $[a,b]$. Oleh karena itu, untuk setiap $x^* \in X^*$ tersebut fungsi riil $x^*\left(f+g\right)$ juga terintegral Lebesgue pada $[a,b]$. Jadi, $f + g \in D[a,b]$. Lebih lanjut untuk sebarang skalar $c \in R$ dan untuk setiap $x^* \in X^*$ di atas fungsi riil $x^*\left(cf\right)$ juga terintegral Lebesgue pada $[a,b]$. Jadi, fungsi $cf \in D[a,b]$. □

2.3. Operator Adjoint pada Ruang Fungsi Terintegral Dunford

Misalkan X ruang Banach dengan dualnya X^* dan dual keduanya adalah X^{**} serta L_1 adalah ruang fungsi terintegral Lebesgue pada $[a,b]$.

Lemma 11 (Kreyszig, 1989 ; Darmawijaya, 2007) *Dual dari* L_1 *adalah* L_∞, *yaitu* $L_1^* = L_\infty$.

Bukti: Untuk setiap $y = \{y_n\} \in L_\infty$ dibentuk fungsional f_y pada L_1 oleh

$$f_y\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n .$$

Diperoleh bahwa f_y linear dan kontinu, yaitu untuk sebarang $x = \{x_n\}, z = \{z_n\} \in L_1$ dan sebarang skalar $c \in R$ berlaku

$$f_y\left(x+z\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n + z_n\right) y_n = f_y\left(x\right) + f_y\left(z\right) \text{ dan } f_y\left(cx\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(cx_n\right) y_n = cf_y\left(x\right).$$

Selanjutnya untuk setiap $x = \{x_n\} \in L_1$ berlaku

$$\left|f_y\left(x\right)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right| \le \|x\|_1 \|y\|_\infty .$$

Jadi setiap $y = \{y_n\} \in L_\infty$ menentukan dengan tunggal fungsional linear kontinu f_y pada L_1, atau $L_\infty \subset L_1^*$.

Sebaliknya, diambil sebarang fungsional linear kontinu f pada L_1. Untuk setiap $x = \{x_n\} \in L_1$ dapat direpresentasikan oleh

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n ,$$

dengan $e_n = \left\{0,..., \underset{\text{ke } n}{1}, 0,...,0\right\}$.

Karena f linear, maka diperoleh

$$f(x) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n).$$

Hal ini berarti bahwa $f(x)$ merupakan kombinasi linear dari barisan bilangan $\{f(e_n)\}$ atau fungsional linear kontinu f bergantung pada barisan bilangan $\{f(e_n)\}$.

Selanjutnya karena f kontinu, maka $|f(x)|$ terbatas, yaitu $|f(x)| < \infty$. Menurut Ketaksamaan Cauchy-Schwartz, diperoleh

$$|f(x)| = \left| f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n (f(e_n))\right| \le \|x\|_{L_1} \sup_{n\ge 1} |f(e_n)|.$$

Supaya $f(x)$ terbatas, maka haruslah $\sup\limits_{n\ge 1} |f(e_n)| < \infty$. Hal ini berarti bahwa $y = \{f(e_n)\} \in L_\infty$.

Jadi, setiap fungsional linear kontinu f pada L_1 menentukan dengan tunggal vektor $y = \{f(e_n)\} \in L_\infty$, yaitu $L_1^* \subset L_\infty$.

Jadi, karena $L_\infty \subset L_1^*$ dan $L_1^* \subset L_\infty$, maka $L_1^* = L_\infty$. □

Diketahui X ruang Banach, X^* dual dari X, dan X^{**} dual kedua dari X. Untuk setiap $f \in D[a,b]$ didefinisikan operator $T^* : L_1^* \to X^{**}$ oleh

$$T^*(g)(x^*) = \int_a^b gT(x^*) = \int_a^b gx^*(f),$$

untuk setiap $g \in L_1^* = L_\infty$.

Operator T^* disebut operator adjoint (operator pendamping) terhadap operator $T : X^* \to L_1$ pada L_1.

Teorema 12 (Schwabik & Guoju, 2005) *Operator adjoint T^* merupakan operator linear terbatas dan*

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

Bukti: Operator adjoint T^* linear, yaitu untuk sebarang $g_1, g_2 \in L_1^* = L_\infty$ dan sebarang skalar $c_1, c_2 \in R$ berlaku

$$T^*(c_1 g_1 + c_2 g_2)(x^*) = \int_a^b (c_1 g_1 + c_2 g_2) T(x^*) = c_1 \int_a^b (g_1 T(x^*)) + c_2 \int_a^b (g_2 T(x^*))$$

$$= c_1 T^*(g_1)(x^*) + c_2 T^*(g_2)(x^*).$$

Karena $f = T^*(g)$ dan $\|f\| \le \|g\|\|T\|$ maka $\|T^*(g)\| = \|f\| \le \|g\|\|T\|$.

Jadi,

$$\|T^*\| \le \|T\|.$$

Untuk setiap $x_0^* \ne \theta \in X^*$ terdapat $g_0 \in X^{**}$ dengan $\|g_0\| = 1$ dan $g_0(T(x_0^*)) = \|T(x_0^*)\|$.

Jadi,

$$g_0(T(x_0^*)) = T^*(g_0)(x_0^*).$$

Katakan $f_0 = T^*(g_0)$ dan diperoleh

$$\|Tx_0^*\| = g_0 T(x_0^*) = f_0(x_0^*) \leq \|f_0\|\|x_0^*\| = \|T^* g_0\|\|x_0^*\| \leq \|T^*\|\|g_0\|\|x_0^*\|.$$

Karena $\|g_0\| = 1$, sehingga untuk setiap $x_0^* \neq \theta \in X^*$ berlaku $\|Tx_0^*\| \leq \|T^*\|\|x_0^*\|$.

Jadi,

$$\|T\| \leq \|T^*\|.$$

Karena $\|T\| \leq \|T^*\|$ dan $\|T^*\| \leq \|T\|$, maka $\|T^*\| = \|T\|$. □

Teorema 13 *Jika* $T_1 : X^* \to L_1$ *dan* $T_2 : X^* \to L_1$ *dua operator linear terbatas dan sebarang skalar* $c \in R$*, maka*

(i) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$.

(ii) $(cT_1)^* = cT_1^*$.

(iii) $\|T_1 T_1^*\| = \|T_1^* T_1\| = \|T_1\|^2 = \|T_1^*\|^2$.

Bukti: (i) $(T_1 + T_2)^*(g)(x^*) = \int_a^b g(T_1 + T_2)(x^*) = \int_a^b gT_1(x^*) + \int_a^b gT_2(x^*) = T_1^*(g)(x^*) + T_2^*(g)(x^*)$.

(ii) $(cT_1)^*(g)(x^*) = \int_a^b g(cT_1)(x^*) = c\int_a^b gT_1(x^*) = cT_1^*(g)(x^*)$.

(iii) Karena T_1 dan T_1^* dua operator linear terbatas dan $\|T_1^*\| = \|T_1\|$, maka diperoleh $\|T_1 T_1^*\| = \|T_1^* T_1\| = \|T_1\|^2 = \|T_1^*\|^2$. □

Jika $f \in D[a,b]$ maka operator adjoint T^* merupakan operator kompak lemah.

3. Simpulan

Himpunan semua fungsi yang terintegral Dunford merupakan ruang linear. Untuk sebarang fungsi f yang terintegral Dunford pada $[a,b]$, maka operator Adjoint $T^* : L_1^* \to X^{**}$ yang didefinisikan oleh $T^*(g)(x^*) = \int_a^b gT(x^*) = \int_a^b gx^*(f)$, untuk setiap $g \in L_1^* = L_\infty$ merupakan operator linear terbatas. Selanjutnya jika T_1^* dan T_2^* dua operator Adjoint dan sebarang skalar $c \in R$, maka berlaku $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$ dan $(cT_1)^* = cT_1^*$. Lebih lanjut, bahwa operator adjoint T^* merupakan operator kompak lemah.

Daftar Pustaka

Aqzzouz, B., Elbourb, A., & Hmichane, J. (2009). Some properties of the class of positive Dunford–Pettis operators, *J. Math. Anal. App.,. 354* (-), 295–300.

Cao, S. C., (1992). The Henstock Integral for Banach-valued Functions. *Southeast Asian Bull. Math,* 16(1), 35-40.

Cao, S. C., (1993). On The Henstock-Bochner Integral. *Southeast Asian Bull. Math. Special Issue,* p. 1-3.

Darmawijaya, S. (2007). *Pengantar Analisis Abstrak.* Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Gordon, R.A. (1994). *The Integral of lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*. Mathematical Society, USA.

Guoju, Ye., & Tianqing, An. (2001). On Henstock-Dunford and Henstock-Pettis Integrals. *IJMMS*, 25(7), 467-478.

Guoju, Ye. (2007). On Henstock–Kurzweil and McShane integrals of Banach space-valued functions. *J. Math. Anal. Appl. 330* (-) 753–765.

Kreyszig, E. (1989). *Introductory Funtional Analysis with Applications*. John Willey & Sons, USA.

Lee, P. Y. (1989). *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*. World Scientific, Singapore.

Park, at al. (2006). The Henstock-Pettis integral of Banach Space-valued functions. *Journal of the Chungcheong mathematical society, 19*(3), 231-236.

Saifullah. (2003). *Integral Henstock-Dunford pada Ruang Euclide* R^n. Tesis, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Schwabik, S., & Guoju, Ye. (2005). *Topics in Banach Space Integration*. World Scientific, Singapore.

Solikhin, dkk. (2018). Operator pada Ruang Fungsi Terintegral Dunford. *Journal of Fundamental Mathematics and Application (JFMA), 2*(1), 110-121.